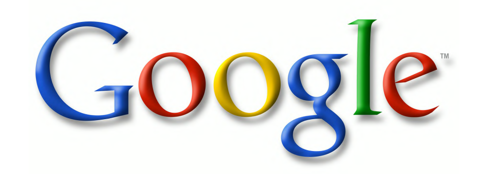
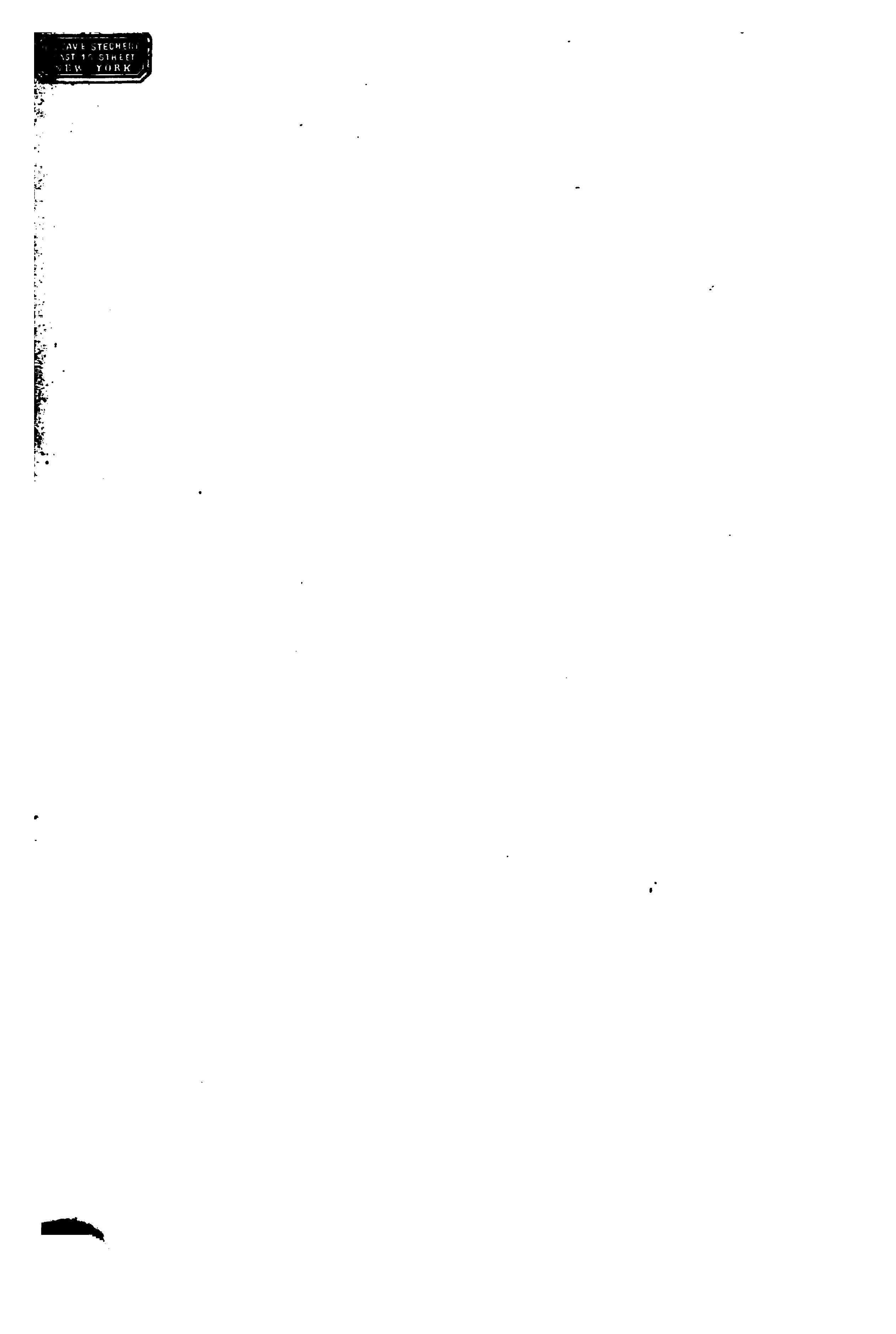

Google


STECHERT
STREET
NEW YORK

BEISPIELE UND AUFGABEN

ZUR

BERECHNUNG

DER

STATISCH BESTIMMTEN TRÄGER

FÜR

BRÜCKEN UND DÄCHER.

VON

DR. JACOB J. WEYRAUCH,
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU STUTTGART.

MIT 222 FIGUREN AUF LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

Vorwort.

Die vorliegende Sammlung von Beispielen und Aufgaben soll in erster Linie mit der Behandlung statisch bestimmter Träger vertraut machen, numerische Grundlagen für Constructionsübungen, Dimensionenberechnungen und Vergleiche mit graphischen Ableitungen auf der Hochschule bieten und dem projectirenden Ingenieur mittelst vollständig durchgerechneter Zahlenbeispiele bequeme Methoden für die Berechnung der am meisten vorkommenden Träger an die Hand geben. In zweiter Linie soll die Sammlung das Verständniss meiner *Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer* erleichtern, die Anwendung der dort besprochenen Beziehungen und Rechnungsverfahren zeigen und weniger wichtige, aber doch praktisch nothwendige oder zweckmässige Ergänzungen der Theorie liefern. Schliesslich wünsche ich durch Vereinfachung der Berechnungen und zahlenmässige Klarlegung der Eigenschaften verschiedener Constructionen zu grösserer Freiheit bei der Auswahl von Trägern mit Rücksicht auf technische und ästhetische Bedürfnisse, auch in gewöhnlichen Fällen, beizutragen.

Bezüglich der *Theorie* kann auf das Vorwort zu dem oben erwähnten Werke verwiesen werden. Den acht Abschnitten des Letzteren entsprechen die acht Abschnitte dieser Sammlung. Die in den einzelnen Beispielen verwendeten Formeln sind jedoch im Allgemeinen angeführt, sodass ähnliche Berechnungen auch ohne Rückgreifen auf die Theorie erledigt werden können. Etwaige Abweichungen gegen die angenommenen Fahrbahnlagen, Diagonalenstellungen u. s. w. wird man in dem beim Ansatze der Formeln citirten Paragraphen berücksichtigt finden. Für den Studirenden kann es zur Förderung der Selbstthätigkeit zweckmässig sein, bei eigenen Berechnungen nach Durchsicht entsprechender Beispiele nicht nur die gegebenen Abmessungen und Belastungen, sondern je nach Umständen auch die Diagonalenstellung, Fahrbahnlage, Trägerform

oder das Trägersystem zu ändern. Für praktische Zwecke geht man am besten direct auf den in Frage kommenden Fall los, und zwar immer auf den möglichst speziellen, sodass z. B. für die Berechnung eines Parallelträgers nicht bei Trägern mit beliebigen Gurtungsformen und für die Berechnung von Trägern mit Verticalen nicht bei beliebigen Systemen nachgesehen wird. Auf abweichende Verfahren und eventuelle Vereinfachungen ist gelegentlich in den Schlussbemerkungen zu den einzelnen Beispielen hingewiesen. Die angewandten Buchstabenbezeichnungen sind vielfach erklärt, in anderen Fällen können die am Ende der *Theorie* gegebenen Verzeichnisse dort gebrauchter Buchstaben und Worte zu schneller Orientirung dienen.

Die aufgenommenen Beispiele und Aufgaben sind natürlich den oben erwähnten Zwecken angepasst, sodass manche derselben nicht unmittelbar praktischen Bedürfnissen entsprechen, sondern zur Klärung der Theorie, zur Erleichterung von Vergleichen und Begründung von Vereinfachungen gegeben wurden. Wiederholungen vollständig gleichartiger Berechnungen sind vermieden und nirgends ist mehr zugelassen als die auftretenden Besonderheiten mit sich brachten. Letztere möglichst zu berücksichtigen, schien jedoch schon deshalb angezeigt, damit der praktische Ingenieur ohne spezielle Studien immer sofort den bequemsten Weg einschlagen kann. Viele Beispiele sind unter gleichen Voraussetzungen bezüglich der Spannweite, Trägerhöhe, Felderzahl u. s. w. berechnet, um so den Einfluss verschiedener Belastungsarten, Trägerformen und sonstiger Bedingungen hervortreten zu lassen. Die Formberechnung ist ebenfalls aufgenommen. Der Berechnung mit Radlastzügen und Lastäquivalenten (Eisenbahnbrücken) ist dieselbe Aufmerksamkeit gewidmet wie der Berechnung mit constanter gleichmässig vertheilter Verkehrslast (Strassenbrücken). Bei Dachbindern ist auch der schiefe Winddruck berücksichtigt.

Der besseren Unterscheidung wegen sind numerische Berechnungen als *Beispiele* (Anzahl 130), Formelnentwicklungen als *Aufgaben* (Anzahl 50) bezeichnet. Letztere zu verfolgen hat für den einen Zweck, welcher Aufschluss über die Entstehung darin gegebener Formeln sucht, oder die Theorie überall durchdringen will, oder auch Uebung in selbstständigen Ableitungen erstrebt. Die Berechnung einer grösseren Anzahl verschiedenartiger Zahlenbeispiele jedoch und die Durchsicht möglichst vieler derselben wird jedem Studirenden der Ingenieurwissenschaft nützlich sein. Um die Auswahl zu erleichtern, ist ein sehr ausführliches Inhaltsverzeichniss beigegeben und darin zu den einzelnen Beispielen und Aufgaben bemerkt, nach

welchem Paragraphen der Theorie sie etwa gelöst werden können, ohne dass damit andere Verwendungen ausgeschlossen sind. Bei Uebungen wird man im Allgemeinen mit den einfachsten Fällen beginnen.

Wie die *Theorie der statisch bestimmten Träger* einen Theil meiner Vorträge über *Analytische Theoric der Ingenieurconstructionen* wiedergiebt, so ist die vorliegende Sammlung von Beispielen und Aufgaben im Anschlusse an die begleitenden Uebungen entstanden. Demnach sind alle Lösungen analytisch oder numerisch, nicht graphisch, vorgenommen, wobei ich freilich nur meinen Neigungen zu folgen brauchte und im Einklange mit meiner Ansicht über die Bedeutung der beiden Methoden blieb. Da ferner an hiesiger Hochschule die Uebungen im Dimensioniren zweckmässiger Weise mit den Constructionsübungen verbunden sind, so bleibt auch diese Sammlung auf Formberechnungen und statische Berechnungen beschränkt. Um jedoch den Bedürfnissen der verschiedenen Dimensionirungsverfahren gerecht zu werden, bei welchen für jeden Constructionstheil entweder nur die absolut grösste Grenzbeanspruchung oder beide Grenzbeanspruchungen oder diese und die Beanspruchung durch die feste Last bekannt sein müssen, ist überall Bedacht auf Feststellung dieser drei besonderen Beanspruchungen genommen, welche zu vollständigem Einblick in das Kräftespiel ohnehin nöthig sind.*)

Schliesslich erlaube ich mir an den freundlichen Leser die Bitte, mich von etwa gefundenen Fehlern recht bald benachrichtigen zu wollen. Dass solche hier und da vorhanden sind, ist anzunehmen, da nicht alle Beispiele in allen Theilen doppelt gerechnet werden konnten. Auch in den so umfangreichen theoretischen Entwickelungen dürfte sich noch Manches besser machen lassen. Ich werde für jede private wie öffentliche, wenn nur sachliche und wohlgemeinte Belehrung jederzeit dankbar sein.

Stuttgart, im Januar 1887.

Der Verfasser.

---

*) Eine vollständige Uebersicht der gebräuchlichen und bis in die neueste Zeit vorgeschlagenen Dimensionirungsmethoden nebst Beispielen der Anwendung, sowie eine Darstellung und Discussion der neueren Versuchsergebnisse und sonstigen Erfahrungen über die Elasticität und Festigkeit von Schmiedeeisen, Flusseisen und Stahl enthält das demnächst erscheinende Werk: *Weyrauch, Stabilité des constructions en fer et en acier et calcul de leurs dimensions,* traduit et annoté par *M. Svilokossitch,* Paris 1888.

Inhaltsverzeichniss.

I. Abschnitt.

Beliebige ebene Träger.

*) A. = Aufgabe, B. = Beispiel.

II. Abschnitt.

Ebene Fachwerke beliebiger Art.

*) Dachbinder findet man speciell behandelt in den Beispielen 17, 18, 20, 21, 22, 34, 38, 39, 40, 49, 50, 57, 58, 75, 84, 85, 86, 103 sowie in den Aufgaben 20, 22, 23, 26. Zahlreiche andere Beispiele und Aufgaben, insbesondere solche für gleichmässig vertheilte bewegte Last, gelten gemeinsam für Brücken und Dächer.

III. Abschnitt.

Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern.

IV. Abschnitt.

Einfluss der Gegendiagonalen*).

*) Träger mit Gegendiagonalen sind weiter behandelt in den Beispielen 41—48 (einfache Parallelträger), 59—61 (Schwedlerträger), 80—83 (continuirliche Gelenkträger), 101—102 (continuirliche Bogenträger). Der Einfluss der Gegendiagonalen ist im Allgemeinen nachträglich berücksichtigt, weil wir die Anwendung von Gegendiagonalen bei keinem Träger für selbstverständlich halten.

V. Abschnitt.

Continuirliche Gelenkträger.

VI. Abschnitt.

Bogenträger mit drei Gelenken.

VII. Abschnitt.

Träger mit constantem Horizontalschube. Continuirliche Bogenträger. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Träger mit imaginären Gelenken.

VIII. Abschnitt.

Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke mehrfachen Systems auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme.

I. Abschnitt.

Beliebige ebene Träger.

Aufgabe 1. Concentrirte Lasten.

Es sind die Werthe der Integrale

$$\int_0^x x \sum_0^x P dx, \qquad \int_0^x \sum_0^x P(x^2 - a^2) dx$$

und der Differentialquotienten

$$\frac{d \sum_0^x P(x^2 - a^2)}{dx}, \qquad \frac{dx \sum_0^x P(x - a)^2}{dx}$$

zu berechnen.

Nach § 4, 5) 6) hat man bei beliebigem Ausdrucke der Function $\varphi(x, a)$

(1) $$\int_0^x \sum_0^x \varphi(x,a) dx = \sum_0^x P \int_a^x \varphi(x,a) dx,$$

(2) $$\frac{d \sum_0^x P\varphi(x,a)}{dx} = \sum_0^x P \frac{d\varphi(x,a)}{dx}.$$

Demgemäss folgen die Werthe der oben gegebenen Integrale

(3) $$\int_0^x x \sum_0^x P dx = \sum_0^x P \int_a^x x\,dx = \sum_0^x P \left(\frac{x^2}{2}\right)_{x=a}^{x=x} = \frac{1}{2} \sum_0^x P(x^2 - a^2),$$

(4) $$\int_0^x \sum_0^x P(x^2 - a^2)\,dx = \sum_0^x P \int_0^x (x^2 - a^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \sum_0^x P(x^3 - 3xa^2 + 2a^3)$$

und die Werthe der gegebenen Differentialquotienten

$$(5) \qquad \frac{d\sum\limits_0^x P(x^2-a^2)}{dx} = \sum_0^x P\frac{d(x^2-a^2)}{dx} = 2x\sum_0^x P,$$

$$(6) \qquad \frac{dx\sum\limits_0^x P(x-a)^2}{dx} = \sum_0^x P\frac{d(x^3-2ax^2+xa^2)}{dx} = \sum_0^x P(x-a)(3x-a).$$

Integrationen und Differentiationen von der Art 1) 2) kommen besonders in der Theorie der Biegung gerader und einfach gekrümmter Stäbe vor. Doch hat man auch in § 9 und A. 10 Beispiele solcher Differentiationen.

Aufgabe 2. Stetig vertheilte Lasten.

Es sollen folgende Summen berechnet werden:

$$\sum_0^x Pa, \qquad \sum_x^l P(l-a)$$

für eine gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit,

$$\sum_0^l (Pa\,(l-a)\,(l^2+la-a^2)$$

für gleichmässig vertheilte Lasten p von 0 bis z und p' von z bis l,

$$\sum_0^x P, \qquad \sum_0^x P(x-a)$$

für eine stetig vertheilte Last des Gesetzes

$$p = a\,(l-a)\,\frac{4f}{l^2}$$

bei constanten l, f, wonach die p wie die Ordinaten einer Parabel durch die Punkte 0 und l mit verticaler Axe variiren.

Nach § 5, 6) haben wir bei beliebigen Streckengrenzen v, w und beliebigen Ausdrücken von p, $\varphi(x,a)$

$$(1) \qquad \sum_v^w P\varphi(x,a) = \int_v^w \varphi(x,a)\,p\,da.$$

Demgemäss erhält man für die zwei ersten der oben gegebenen Summen mit constantem p

$$(2) \qquad \sum_0^x Pa = p\int_0^x a\,da = p\left(\frac{a^2}{2}\right)_{a=0}^{a=x} = \frac{px^2}{2},$$

(3) $$\sum_x^l P(l-a) = p\int_x^l (l-a)\,da = p\left(la - \frac{a^2}{2}\right)_{a=x}^{a=l} = \frac{p(l-x)^2}{2}.$$

Weiter ist mit p von $a=0$ bis $a=z$ und p' von $a=z$ bis $a=l$

$$\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2) = p\int_0^z (l^3a - 2la^3 + a^4)\,da$$
$$+ p'\int_z^l (l^3a - 2la^3 + a^4)\,da,$$

woraus bei gleichem Vorgehen wie oben

(4) $$\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2) = p\left(\frac{l^3z^2}{2} - \frac{lz^4}{2} + \frac{z^5}{5}\right)$$
$$+ p'\left(\frac{l^5}{5} - \frac{l^3z^2}{2} + \frac{lz^4}{2} - \frac{z^5}{5}\right)$$

oder auch

(5) $$\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2) = \frac{pl^5}{5}$$
$$+ \frac{p'-p}{10}(l-z)^2(2l^3+4l^2z+lz^2-2z^3)$$

und speziell wenn die Last von 0 bis l gleichmässig vertheilt ist, mit $p'=p$ oder $z=l$,

(6) $$\sum_0^l Pa(l-a)(l^2+la-a^2) = \frac{pl^5}{5}.$$

Für die oben erwähnte parabolische Belastung schliesslich liefert 1) die beiden letzten verlangten Summenwerthe

(7) $$\sum_0^x P = \frac{4f}{l^2}\int_0^x (l-a)\,a\,da = \frac{2f}{3l^2}x^2(3l-2x),$$

(8) $$\sum_0^x P(x-a) = \frac{4f}{l^2}\int_0^x (x-a)(l-a)\,a\,da$$
$$= \frac{4f}{l^2}\int_0^x (lxa - la^2 - xa^2 + a^3)\,da = \frac{fx^3}{3l^2}(2l-x).$$

Zu weiterer Uebung kann man die Formeln § 10, 4)—6) oder § 23, 6) 7) oder auch § 66, 12) 13) und andere berechnen.

Aufgabe 3. Bewegte Lasten.

Es sollen die Differentialquotienten

$$\frac{d\sum\limits_c^v P(z-a)}{da}, \quad \frac{d\sum\limits_0^x P(x^2-a^2)}{da}, \quad \frac{d\sum\limits_0^x Pa(x-a)^2}{da}$$

für ein zwischen den Streckengrenzen c und v bezw. 0 und x bleibendes System von Lasten P in festen Entfernungen berechnet werden.

Nach § 6, 5) hat man bei beliebigen Streckengrenzen v, w und beliebigem Ausdrucke der Function $\varphi(x,a)$

$$(1) \qquad \frac{d\sum\limits_v^w P\varphi(x,a)}{da} = \sum_v^w P\frac{d\varphi(x,a)}{da}.$$

Wir erhalten hieraus die verlangten Werthe

$$(2) \qquad \frac{d\sum\limits_c^v P(z-a)}{da} = \sum_c^v P\frac{d(z-a)}{da} = -\sum_c^v P,$$

$$(3) \qquad \frac{d\sum\limits_0^x P(x^2-a^2)}{da} = \sum_0^x P\frac{d(x^2-a^2)}{da} = -2\sum_0^x Pa,$$

$$(4) \qquad \frac{d\sum\limits_0^x Pa(x-a)^2}{da} = \sum_0^x P\frac{d(ax^2-2xa^2+a^3)}{da}$$

$$= \sum_0^x P(x-a)(x-3a).$$

Zu weiterer Uebung kann man die Formeln § 25, 7) oder § 59, 7) 8) oder auch § 68, 14)—16) berechnen.

Aufgabe 4. Träger mit beliebig gerichteten äusseren Kräften.

Für die Schnittkräfte und Schnittmomente ebener Träger sollen Beziehungen analog denjenigen des § 7 unter der Voraussetzung abgeleitet werden, dass die äusseren Activkräfte beliebige Richtungen in der Trägerebene haben.

Wir gehen ganz wie in § 7 vor. Zwischen den Schnitten 0 und s mögen in Punkten der Abscissen $e_1, e_2, \ldots$ und Ordinaten $c_1, c_2, \ldots$

äussere Activkräfte $R_1, R_2, \ldots$ auf den Träger kommen, deren Verticalcomponenten $K_1, K_2, \ldots$ und deren Horizontalcomponenten $L_1, L_2, \ldots$ seien. Die K und L sollen als positiv gelten, wenn sie von oben nach unten (entgegengesetzt der Richtung der wachsenden Ordinaten) bezw. von rechts nach links wirken (entgegengesetzt der Richtung der wachsenden Abscissen). Dann hat man für den beliebigen Schnitt s die resultirende Horizontalkraft (Fig. 1)

$$H_s = H - \sum_0^s L, \tag{1}$$

die resultirende Verticalkraft

$$V_s = V - \sum_0^s K, \tag{2}$$

und das resultirende Moment hinsichtlich eines beliebigen Drehpunkts der Coordinaten u, w

$$M_s = M + Vu - Hw - \sum_0^s K(u - e) + \sum_0^s L(w - c). \tag{3}$$

Auch hier bedeuten die Grenzen der Σ Schnitte, also im Allgemeinen nicht Abscissen.

Es sei R_s die resultirende Schnittkraft und ψ der Winkel, welchen ihre Richtung mit der Abscissenaxe bildet; dann hat man für die Componenten von R_s in beliebigen Richtungen, welche die Winkel φ mit der Abscissenaxe bezw. Ordinatenaxe einschliessen

$$N_s = V_s \sin\varphi + H_s \cos\varphi = R_s \cos(\psi - \varphi) \tag{4}$$

$$T_s = V_s \cos\varphi - H_s \sin\varphi = R_s \sin(\psi - \varphi). \tag{5}$$

Für den Winkel ψ gilt weiter

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{V_s}{H_s} \tag{6}$$

und für die als Absolutwerth aufzufassende Resultante

$$R_s = \sqrt{H_s^2 + V_s^2} = \sqrt{N_s^2 + T_s^2} = \frac{H_s}{\cos\psi} = \frac{V_s}{\sin\psi}. \tag{7}$$

Wir nehmen nun rechts von Schnitt s einen Trägerpunkt der Coordinaten l, k an und durch denselben einen beliebig geformten Schnitt l so, dass zwischen den Schnitten 0 und l keine Auflager liegen. Gleichung 3) liefert dann für das Moment im Schnitte l bezüglich des Drehpunktes l, k

$$M' = M + Vl - Hk - \sum_0^l K(l - e) + \sum_0^l L(k - c),$$

und hieraus folgt für die Verticalkraft im Schnitte 0

$$(8)\quad V_0 = V = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk + \sum_0^l K(l-e) - \sum_0^l L(k-c)\right].$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in 2) erhält man mit $s = l$ die Verticalkraft im Schnitte l

$$(9)\quad V_l = -V' = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk - \sum_0^l Ke - \sum_0^l L(k-c)\right].$$

Die Subtraction dieser Gleichung von 8) ergibt

$$(10)\qquad V_0 - V_l = V + V' = \sum_0^l K.$$

Diese Formel drückt aus, dass die Summe der Verticalreactionen gegen einen beliebigen Trägertheil gleich der Summe der Verticalcomponenten aller äusseren Activkräfte auf denselben ist.

Aufgabe 5. Spezielle Fälle zur vorigen Aufgabe.

Die Formeln der vorigen Aufgabe für die am Schlusse des § 8 betrachteten Fälle zu spezialisiren.

Die Schnitte und Punkte 0, l sind ganz wie in § 8 anzunehmen. Fassen wir zunächst einen Träger mit zwei beliebigen Gelenkauflagern ins Auge. Wegen $M = 0$, $M' = 0$ erhält man das Moment in einem beliebigen Schnitte s

$$(1)\qquad M_s = Vu - Hw - \sum_0^s K(u-e) + \sum_0^s L(w-c)$$

und die Verticalreactionen der Auflager

$$(2)\qquad V = \frac{1}{l}\left[\sum_0^l K(l-e) - \sum_0^l L(k-c) + Hk\right],$$

$$(3)\qquad V' = \frac{1}{l}\left[\sum_0^l Ke \qquad + \sum_0^l L(k-c) - Hk\right].$$

Die übrigen Gleichungen der Aufgabe 4 bleiben ungeändert. 1)—3) gelten für beliebige Bogen und Balken mit zwei Gelenkauflagern und ist also der in § 8 zuletzt betrachtete Fall bereits erledigt. Der Werth des Horizontalschubs H hängt von weiteren constructiven Mitteln ab oder ergibt sich aus der Elasticitätstheorie.

Handelt es sich beispielsweise um den in § 8 behandelten Balken

mit einem verschiebbaren und einem unverschiebbaren Gelenkauflager, so legen wir den Ursprung der Coordinaten in das Letztere und erhalten nach A. 4, 1)

$$H_l = H - \sum_0^l L = 0,$$

wonach der Horizontalschub und die Horizontalkraft in einem beliebigen Schnitte s

$$(4) \qquad H = \sum_0^l L, \qquad H_s = \sum_s^l L.$$

Die Beziehungen 1) — 3) nehmen hiermit folgende speziellere Formen an

$$(5) \qquad V = \frac{1}{l}\left[\sum_0^l K(l-e) + \sum_0^l Lc\right],$$

$$(6) \qquad V' = \frac{1}{l}\left[\sum_0^l Ke \quad - \sum_0^l Lc\right],$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} M_s = {} & \frac{l-u}{l}\left[\sum_0^s Ke - \sum_0^s Lc\right] \\ & + \frac{u}{l}\left[\sum_s^l K(l-e) - \sum_s^l L\left(\frac{l}{u}w - c\right)\right], \end{aligned}$$

während wir natürlich auch nach 1) — 3) mit 4) rechnen können.

Für den Balkenträger mit einem festgespannten und einem frei schwebenden Ende haben wir wie im vorigen Falle nach A. 4, 1)

$$(8) \qquad H = \sum_0^l L, \qquad H_s = \sum_s^l L.$$

Durch Substitution des Ausdrucks für H in A. 4, 9) folgt wegen $V' = 0$ und $M' = 0$ das Moment im Einspannungsquerschnitt

$$(9) \qquad M = \sum_0^l Lc - \sum_0^l Ke,$$

und hiermit aus A. 4, 8) die Verticalkraft daselbst

$$(10) \qquad V = \sum_0^l K.$$

Mit 8) — 10) aber liefert A. 4, 3) das Moment in einem beliebigen Schnitte s

$$(11)\qquad M_s = \sum_0^l K(u-e) - \sum_0^l L(w-c).$$

Lässt man die L verschwinden, so gehen alle Formeln in die entsprechenden des § 8 über.

Beispiel 1. Curven der Momente und Verticalkräfte.

Für den in Fig. 2 angedeuteten Träger sind zu bestimmen: a) die Stützenreactionen, b) die Verticalkräfte V_x und Momente M_x soweit, dass die Curven dieser Grössen verzeichnet werden können (Fig. 3), c) die Werthe von M_x und V_x für $x = 4$ m.

a) Greifen bei den Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ die Lasten $P_1, P_2, \ldots$ am Träger an, dann sind nach § 8, 8) die Stützenreactionen

$$(1)\qquad V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a), \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Pa,$$

wonach im vorliegenden Falle

$$V = \frac{1}{10}(6 \,.\, 8 + 4 \,.\, 7 + 10 \,.\, 5 + 3 \,.\, 2) = 13{,}2 \text{ tn},$$

$$V' = \frac{1}{10}(6 \,.\, 2 + 4 \,.\, 3 + 10 \,.\, 5 + 3 \,.\, 8) = 9{,}8 \text{ tn}.$$

Natürlich hätte man auch rechnen können

$$V' = \sum_0^l P - V = 23 - 13{,}2 = 9{,}8 \text{ tn}.$$

b) Für die Verticalkraft und das Moment in einem beliebigen Querschnitte x hat man nach § 8, 6) 7)

$$(2)\qquad V_x = P - \sum_0^x P, \qquad M_x = Vx - \sum_0^x P(x-a).$$

Da nun zwischen zwei aufeinanderfolgenden P die Curve der V_x horizontal und diejenige der M_x geradlinig verläuft, so können wir die erstere sofort auftragen, während zur Verzeichnung der letzteren genügt, die M_x bei den Angriffspunkten der P zu kennen. Es folgen aber aus 2)

für $x = 2$ $\quad M_x = 13{,}2 \,.\, 2 = 26{,}4$ mtn,
„ $x = 3$ $\quad M_x = 13{,}2 \,.\, 3 - 6 \,.\, 1 = 33{,}6$ mtn,
„ $x = 5$ $\quad M_x = 13{,}2 \,.\, 5 - 6 \,.\, 3 - 4 \,.\, 2 = 40{,}0$ mtn,
„ $x = 8$ $\quad M_x = 13{,}2 \,.\, 8 - 6 \,.\, 6 - 4 \,.\, 5 - 10 \,.\, 3 \,. = 19{,}6$ mtn.

c) Die Werthe aller am Träger vorkommenden Verticalkräfte liegen zwischen denjenigen bei den Stützen

$$V_0 = V = 13{,}2 \quad \text{und} \quad V_l = -V' = -9{,}8,$$

während das grösste Moment nach $x = 5$ liegt, nämlich da, wo die Verticalkraft von

$$V_x = 13{,}2 - (2 + 3) = 8{,}2 \text{ in } V_x = 13{,}2 - (2 + 3 + 10) = -1{,}8$$

übergeht, also den Werth Null durchschreitet. Für $x = 4$ liefert 2)

$$M_x = 13{,}2 \,.\, 4 - 6 \,.\, 2 - 4 \,.\, 1 = 36{,}8 \text{ mtn},$$
$$V_x = 13{,}2 - 6 - 4 = 3{,}2 \text{ tn}.$$

Beispiel 2. Träger mit Zwischenträgern.

Es sollen die Stützenreactionen V, V', H und die Stabkräfte O, U des in Fig. 4 verzeichneten Bogenträgers von 30 m Spannweite mit parabolischem (einer Parabel mit verticaler Axe eingeschriebenem) Untergurt berechnet werden: a) für die angedeutete Locomotivbelastung, b) für den Fall, dass noch eine weitere Locomotive gleicher Anordnung mit dem Schlote gegen die vorhandenen auf die Fahrbahn gestellt wird. Länge der je ein Feld überspannenden Fahrbahnträger $\lambda = v - c = 3$ m.

Bezeichnen f den Pfeil und p den Parameter der Parabel des Untergurts, wird ferner der Ursprung der Coordinaten in ein Kämpfergelenke gelegt und die Abscissenaxe horizontal angenommen, so lautet die Scheitelgleichung der Parabel

$$\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = 2p\,(f - y),$$

wir erhalten für $x = 0$

$$\frac{l^2}{4} = 2pf$$

und durch Elimination von p

(1) $$y = \frac{4f}{l^2}\, x\,(l - x).$$

Speziell für unsern Fall folgt mit $l = 30$, $f = 5$

$$y = x\,\frac{30 - x}{45},$$

wonach bei

$x =$	0	3	6	9	12	15 m,
$y =$	0	1,8	3,2	4,2	4,8	5 m.

Die Resultante der Stabkräfte O, U geht stets durch den Schnittpunkt ihrer Richtunglinien, dessen Entfernung d vom Ende des dritten Feldes sich ergibt aus

$$d : 1{,}8 = d + 3 : 2{,}8\,,$$

sodass $d = 5{,}4$ m und die Abscisse des Schnittpunkts gleich 14,4 m ist.

Für die äusseren Kräfte des Trägers im Ganzen hat man

$$(2) \qquad Vl - \sum_0^l P(l-a) = 0\,, \qquad V'l - \sum_0^l Pa = 0$$

und für die äusseren Kräfte des Trägertheils vor dem Schnitte s, wenn der Drehpunkt für M_s in den Durchschnitt der Richtungslinien von O, U gelegt wird und σ die Länge des durch U beanspruchten Stabes bedeutet,

$$(3) \qquad V - \sum_0^s K + U\frac{\varkappa}{\sigma} = 0\,,$$

$$(4) \qquad H + O + U\frac{\lambda}{\sigma} = 0\,,$$

$$(5) \qquad M_s = 0 = Vu - Hw - \sum_0^s K(u-e)\,.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich U, O, H bestimmen.

Im Belastungsfalle a) hat man nach 2)

$$V = \frac{1}{30}(6.15 + 6.13{,}7 + 6.12{,}4 + 4.11{,}2 + 5.8{,}2 + 6.4 + 6.2{,}7 + 6.1{,}4 + 4.0{,}2) = 12{,}73 \text{ tn},$$

$$V' = \frac{1}{30}(6.15 + 6.16{,}3 + 6.17{,}6 + 4.18{,}8 + 5.21{,}8 + 6.26 + 6.27{,}3 + 6.28{,}6 + 4.29{,}8) = 36{,}27 \text{ tn},$$

$$\text{Probe} \sum_0^l P = 6.6 + 2.4 + 5 = 49\,.$$

Sodann ergeben sich nach 5) 3) 4)

$$12{,}73 \,.\, 14{,}4 - H \,.\, 6 = 0\,, \qquad H = 30{,}55 \text{ tn}\,,$$

$$12{,}73 + U\frac{1}{3{,}16} = 0\,, \qquad U = -40{,}23 \text{ tn}\,,$$

$$30{,}55 + O - 40{,}23\,\frac{3}{3{,}16} = 0\,, \qquad O = 7{,}64 \text{ tn}\,,$$

Bei letzteren beiden Ansätzen war zu beachten, dass $\sigma = \sqrt{1 + 3^2} = 3{,}16$ m ist.

Im Belastungsfalle b) hat man

$$V = 12{,}73 + \frac{1}{30}(6.19 + 6.20{,}3 + 6.21{,}6 + 4.22{,}8 + 5.25{,}8) = 32{,}25 \text{ tn},$$

$$V' = 36{,}27 + \frac{1}{30}(6.11 + 6.\ 9{,}7 + 6.\ 8{,}4 + 4.\ 7{,}2 + 5.\ 4{,}2) = 43{,}75 \text{ tn},$$

$$\text{Probe} \sum_0^l P = 9.6 + 3.4 + 2.5 \qquad = 76,$$

und da nun nach § 10, 1)

$$(6) \qquad \sum_0^s K = \sum_0^c P + \frac{1}{\lambda}\sum_c^v P(v-a),$$

$$(7) \qquad \sum_0^s K(u-e) = \sum_0^c P(u-a) + \frac{u-c}{\lambda}\sum_c^v P(v-a),$$

so folgen weiter

$$32{,}25.14{,}4 - H.6 - 5.10{,}2 - \frac{8{,}4}{3}(4.1{,}8 + 6.0{,}6) = 0, \quad H = \quad 63{,}86 \text{ tn},$$

$$32{,}25 - 5 - \frac{1}{3}(4.1{,}8 + 6.0{,}6) + U\frac{1}{3{,}16} = 0, \qquad U = -74{,}73 \text{ tn},$$

$$63{,}86 + O - 74{,}73\frac{3}{3{,}16} = 0, \qquad O = -\ 7{,}08 \text{ tn}.$$

Beispiel 3. Ermittelung von Influenzlinien.

Für den im vorigen Beispiele behandelten Träger sind die Influenzlinien der Kräfte V, V', H, U, O zu verzeichnen.

Da die Fahrbahnträger von Feldlänge sind, so verläuft die Influenzlinie nach § 11 zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten geradlinig. Bezüglich der Rechnung mit den Fahrbahnlasten P wird auf den in § 10 hervorgehobenen Satz verwiesen.

Für eine an beliebiger Stelle a auf die Fahrbahn kommende Last P haben wir

$$V = P\frac{l-a}{l}, \qquad V' = P\frac{a}{l}.$$

Die Gleichungen der Influenzlinien von V, V' folgen daraus mit $P = 1$

$$(1) \qquad b = \frac{l-a}{l}, \qquad b = \frac{a}{l}.$$

In Fig. 5 sind die Linien verzeichnet.

Zur Bestimmung der Influenzlinien von H hat man für eine bei a auf die Fahrbahn kommende Kraft P, wenn $a < c$

$$Vu - Hw - P(u-a) = 0$$

und wenn $a > v$

$$Vu - Hw = 0$$

Nach Einsetzen des obigen Ausdrucks von V liefern diese Gleichungen

$$\frac{l-u}{l} Pa - Hw = 0 \qquad \frac{l-a}{l} Pu - Hw = 0$$

woraus mit $P = 1$ die Gleichung der Influenzlinie von H allgemein und bei den gegebenen Dimensionen folgen:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{für } a < c & b = \frac{l-u}{l} \frac{a}{w} = 0{,}087\, a, \\ \text{für } a > v & b = \frac{l-a}{l} \frac{u}{w} = 2{,}4 - 0{,}08\, a, \end{cases}$$

Die Influenzlinie verläuft hiernach und mit Rücksicht auf das Anfangs Gesagte auf den Strecken 0 bis c, c bis v, v bis l geradlinig. Zur Verzeichnung in Fig. 6 genügt zu berechnen

für $a = c$ $\quad b = 0{,}087 \,.\, 6 = 0{,}52$ tn,

für $a = v$ $\quad b = 2{,}4 - 0{,}08 \,.\, 9 = 1{,}68$ tn.

Behufs Ermittelung der Influenzlinie von U hat man für eine bei a auf die Fahrbahn wirkende Last P, wenn $a < c$

$$V - P + U \frac{\varkappa}{\sigma} = 0$$

und wenn $a > v$

$$V + U \frac{\varkappa}{\sigma} = 0.$$

Nach Einsetzen von V folgen daraus

$$-P \frac{a}{l} + U \frac{\varkappa}{\sigma} = 0, \qquad P \frac{l-a}{l} + U \frac{\varkappa}{\sigma} = 0$$

und mit $P = 1$ als Gleichung der Influenzlinie von U:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{für } a < c & b = \frac{\sigma}{\varkappa} \frac{a}{l} = 0{,}105\, a, \\ \text{für } a > v & b = -\frac{l-a}{l} \frac{\sigma}{\varkappa} = -3{,}16 + 0{,}105\, a. \end{cases}$$

Auch hier verläuft die Influenzlinie auf den Strecken 0 bis c, c bis v, v bis l geradlinig. Zur Verzeichnung in Fig. 7 wurden berechnet

für $a = c$ $\quad b = 0{,}105 \,.\, 6 = 0{,}63$ tn,

für $a = v$ $\quad b = -3{,}16 + 0{,}105 \,.\, 9 = -2{,}22$ tn.

Für die Stabkraft O hat man bei jeder Belastung

$$H + O + U\frac{\lambda}{\sigma} = 0$$

und speziell einer bei a angreifenden Last P entsprechend, mit obigen H, U, wenn $a < c$

$$P\frac{a}{l}\left(\frac{l-u}{l} + \frac{\lambda}{\varkappa}\right) + O = 0$$

und wenn $a > v$

$$P\frac{l-a}{l}\left(\frac{u}{w} - \frac{\lambda}{\varkappa}\right) + O = 0.$$

Wir erhalten mit $P = 1$ als Gleichung der Influenzlinie von O:

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{für } a < c & b = -\left(\frac{l-u}{w} + \frac{\lambda}{\varkappa}\right)\frac{a}{l} = -0{,}187\,a, \\ \text{für } a > v & b = \left(\frac{\lambda}{\varkappa} - \frac{u}{w}\right)\frac{l-a}{l} = 0{,}6 - 0{,}02\,a. \end{cases}$$

Zur Verzeichnung der wieder aus drei geraden Strecken bestehenden Linie in Fig. 8 genügen

für $a = c$ $\qquad b = -0{,}187\,. = -1{,}12$ tn,
für $a = v$ $\qquad b = 0{,}6 - 0{,}02\,.\,9 = 0{,}42$ tn.

Aufgabe 6. Ermittelung von Influenzlinien.

Es sollen bestimmt werden: a) die Influenzlinien der Stützenreactionen des einfachen Balkenträgers mit zwei Gelenkauflagern; b) die Influenzlinien sämmtlicher Stabkräfte des in Fig. 9 angedeuteten Trägers dieser Art, bei welchem die Fahrbahnträger von Feldlänge sind.

a) Für die von beliebigen Lasten P bei Abscissen a herrührenden Stützenreactionen des einfachen Balkenträgers mit zwei Gelenkauflagern hat man nach § 10

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a), \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Pa.$$

Hieraus folgen die Gleichungen der Influenzlinien von V und V'

$$b = \frac{l-a}{l}, \qquad b = \frac{a}{l}.$$

Die Linien sind in Fig. 5 verzeichnet.

b) Wie sich in Aufgabe 18 zeigen wird, hat man bei beliebiger Belastung der Fahrbahn, wenn die K entsprechende Knotenpunktslasten bedeuten, die Stabkräfte

$$V_1 = -K_1 \qquad Y_1 = K_1 \frac{3d_1}{4h} \qquad Z_1 = K_1 \frac{d_3}{4h}$$

$$V_2 = -K_2 \qquad Y_2 = K_2 \frac{d_2}{2h} \qquad Z_2 = K_2 \frac{d_2}{2h}$$

$$V_3 = -K_3 \qquad Y_3 = K_3 \frac{d_3}{4h} \qquad Z_3 = K_3 \frac{3d_1}{4h}$$

$$X = -(3K_1 + 4K_2 + 3K_3)\frac{\lambda}{4h},$$

worin λ, h und d_1, d_2, d_3 die Längen der horizontalen, verticalen und durch Y_1, Y_2, Y_3 beanspruchten Stäbe sind. Demnach liefert eine Last $P = 1$

bei					
$a =$	0	λ	2λ	3λ	l
$V_1 =$	0	-1	0	0	0
$V_2 =$	0	0	-1	0	0
$V_3 =$	0	0	0	-1	0
$Y_1 =$	0	$\frac{3d_1}{4h}$	0	0	0
$Y_2 =$	0	0	$\frac{d_2}{2h}$	0	0
$Y_3 =$	0	0	0	$\frac{d_3}{4h}$	0
$Z_1 =$	0	$\frac{d_3}{4h}$	0	0	0
$Z_2 =$	0	0	$\frac{d_2}{2h}$	0	0
$Z_3 =$	0	0	0	$\frac{3d_1}{4h}$	0
$X =$	0	$-\frac{3\lambda}{4h}$	$-\frac{\lambda}{h}$	$-\frac{3\lambda}{4h}$	0

Da nun die Influenzlinien zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten geradlinig verlaufen (§ 14), so können dieselben nach vorstehenden Angaben verzeichnet werden. In Fig. 10 ist dies für die Stabkräfte der ersten Trägerhälfte geschehen, während die Influenzlinien für Z_1, Z_2, Z_3, V_3 symmetrisch zu derjenigen von Y_1, Y_2, Y_3, V_1 liegen.

Aufgabe 7. Gewöhnliche (insbesondere vollwandige) Balkenträger mit beliebiger Belastung.

Für stabförmige Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern seien die Momente M_s auf die Axpunkte ihrer Schnitte s bezogen und

diese vertical oder so klein, dass allgemein $\sum_0^s K = \sum_0^x K$ gesetzt werden kann, wenn x die Abscisse des Axpunktes vom Schnitte s bedeutet. Das Moment und die Verticalkraft eines beliebigen Schnittes auszudrücken: a) im allgemeinsten Falle; b) wenn die Verkehrslast direct auf die betrachteten Träger wirkt; c) wenn die Verkehrslast zunächst auf Zwischenträger kommt; d) für das Eigengewicht allein ohne und mit Rücksicht auf Zwischenträger.

a) Es mögen, wie für stabförmige Träger üblich, die Schnitte s durch die Abscissen ihrer Axpunkte bezeichnet sein. Dann hat man nach § 8, 6) 7) das Moment und die Verticalkraft bei x für jede Belastung

$$(1) \qquad M_x = \frac{l-x}{l} S + \frac{x}{l} S', \qquad V_x = \frac{1}{l}(S' - S),$$

worin S, S' die statischen Momente der Lasten, welche von 0 bis x bezw. von x bis l wirklich auf den Träger kommen, in Hinsicht der Punkte 0 und l. Bezeichnen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{V}_x$ die Beiträge des Eigengewichts zu M_x, V_x, während S, S' sich allein auf die Verkehrslast beziehen, so können wir setzen

$$(2) \qquad M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l} S + \frac{x}{l} S', \quad V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{1}{l}(S' - S).$$

Für $x = 0$ erhält man als $V = V_0$ stets auch die Stützenreaction bei 0 und ebenso mit $x = l$ als $V' = -V_l$ die Stützenreaction bei l.

b) Kommen die Verkehrslasten $P_1, P_2, \ldots$ bei den Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ direct auf den betrachteten Träger, so liefert 2)

$$(3) \qquad \begin{cases} M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a), \\ V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l} \sum_0^x Pa + \frac{1}{l} \sum_x^l P(l-a). \end{cases}$$

c) Wirken dagegen die Verkehrslasten $P_1, P_2, \ldots$ bei $a_1, a_2, \ldots$ zunächst auf Zwischenträger und bezeichnen $K_1, K_2, \ldots$ die von ihnen allein herrührenden Knotenpunktslasten bei $e_1, e_2, \ldots$ dann folgen aus 2)

$$(4) \qquad \begin{cases} M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l} \sum_0^x Ke + \frac{x}{l} \sum_x^l K(l-e) \\ V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l} \sum_0^x Ke + \frac{1}{l} \sum_x^l K(l-e) \end{cases}$$

oder wegen § 10, 2)

$$(5)\quad \begin{cases} M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l} \sum_0^c Pa + \left(\frac{x}{l} - \frac{x-c}{v-c}\right) \sum_c^v P(z-a) \\ \qquad + \frac{x}{l} \sum_v^l P(l-a) \\ \qquad \text{mit} \quad z = \frac{v-c}{cl - x(l-v+c)} cl, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l} \sum_0^c Pa + \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{v-c}\right) \sum_c^v P(z-a) \\ \qquad + \frac{1}{l} \sum_v^l P(l-a) \\ \qquad \text{mit} \quad z = \frac{cl}{l-v+c}. \end{cases}$$

Hierin bedeuten c, v die Abscissen derjenigen Knotenpunkte, bei welchen der vom Schnitte x getroffene Fahrbahnträger aufliegt.

d) Wenn das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf den Hauptträger gelten soll, so hat man nach 1) mit A. 2, 2) 3)

$$(7)\qquad \mathfrak{M}_x = \frac{g}{2} x(l-x), \qquad \mathfrak{V}_x = g\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Diese Ausdrücke werden am meisten verwendet und sind besonders bei Ueberwiegen des Hauptträgergewichts berechtigt.

Wenn dagegen das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Fahrbahn gelten soll, dann ergeben sich aus 1) mit § 10, 5)

$$(8)\qquad \mathfrak{M}_x = \frac{g}{2}[x(l-c-v) + cv], \qquad \mathfrak{V}_x = \frac{g}{2}(l-c-v).$$

Diese Gleichungen können bei Ueberwiegen des Fahrbahngewichts (am ehesten bei Strassenbrücken) in Frage kommen.

Wenn schliesslich ein Theil des Eigengewichts von h per Längeneinheit gleichmässig vertheilt auf den Hauptträger ist (Eigengewicht desselben), während andre Theile des Eigengewichts als Knotenpunktslasten $G_1, G_2, \ldots$ bei $e_1, e_2, \ldots$ angreifen, so folgen

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = \frac{h}{2} x(l-x) + \frac{l-x}{l} \sum_0^x Ge + \frac{x}{l} \sum_x^l G(l-e), \\ \mathfrak{V}_x = h\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{1}{l} \sum_0^x Ge + \frac{1}{l} \sum_x^l G(l-e). \end{cases}$$

Die für den Fall von Zwischenträgern abgeleiteten Gleichungen 5) 6) 8) nehmen bei Anwendung auf Schnitte x durch Knotenpunkte mit $c = v = x$ dieselben Formen an, welche ohne Vorhandensein von Zwischenträgern gelten. Daher: *Für diejenigen Schnitte x, welche mit Knotenpunkten zusammenfallen, kann bei Berechnung der M_x, V_x ganz so verfahren werden, als ob gar keine Zwischenträger vorhanden wären.* Dies gilt beispielsweise für die Stützenreactionen $V = V_0$, $V' = -V_l$, da bei 0 und l immer Knotenpunkte liegen, wenn Zwischenträger vorhanden sind.

Aufgabe 8. Gewöhnliche Balkenträger. Influenzlinien.

Für den in Aufgabe 7 behandelten Träger sind die Influenzlinien des Moments M_x und der Verticalkraft V_x zu bestimmen: a) unter Voraussetzung direct auf den Träger wirkender Verkehrslast, b) für den Fall, dass die Verkehrslast durch Zwischenträger übertragen wird.

Wir bleiben bei den Bezeichnungen der Aufgabe 7. Die Influenzlinie einer Grösse B entsteht, wenn bei jeder Abscisse a die Ordinate b gleich dem Factor gemacht wird, mit welchem P für diese Stelle a im allgemeinen Ausdrucke von B multiplicirt erscheint.

Direct wirkende Verkehrslast. Nun haben wir für unmittelbar auf den betrachteten Träger wirkende Verkehrslasten P nach A. 7, 3)

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} M_x &= \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a) \\ V_x &= \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l} \sum_0^x Pa + \frac{1}{l} \sum_x^l P(l-a). \end{aligned} \right.$$

Daher muss sein

	von $a = 0$ bis $a = x$,	von $a = x$ bis $a = l$,
für M_x	$b = \frac{l-x}{l} a$,	$b = \frac{l-a}{l} x$,
„ V_x	$b = -\frac{a}{l}$,	$b = \frac{l-a}{l}$,

und es ergeben sich folgende Constructionen (Fig. 11, 12): Man trage $0\,0_1 = x$ bei 0 als Ordinate an, ziehe $l0_1$, errichte in x das Perpendikel xx_1, welches die Gerade $l0_1$ bei x_1 schneidet und verbinde 0 mit x_1, dann ist $0x_1l$ die Influenzlinie für M_x. — Trägt man ferner bei 0 und l bezw. $00_1 = 1$, $ll_1 = -1$ als Ordinaten an, zieht $0l_1$, $l0_1$ und in x bis zu den Schnittpunkten mit diesen Geraden das Perpendikel x_1x_2, dann ist $0x_1x_2l$ die Influenzlinie für V_x. Mit

$x = 0$ entsteht daraus die Influenzlinie Fig. 13 für die Stützenreaction $V = V_x$.

Indirect wirkende Verkehrslast. Kommt die Verkehrslast zunächst auf ein System von Zwischenträgern, so hat man nach A. 7, 5) 6)

$$(2)\quad \begin{cases} M_x = \mathfrak{M}_x + \dfrac{l-x}{l}\sum_0^c Pa + \left(\dfrac{x}{l} - \dfrac{x-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a) \\ \qquad + \dfrac{x}{l}\sum_v^l P(l-a), \\ V_x = \mathfrak{V}_x - \dfrac{1}{l}\sum_0^x Pa + \left(\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a) \\ \qquad + \dfrac{1}{l}\sum_v^l P(l-a). \end{cases}$$

Es sind hiernach die Ordinaten der Influenzlinien

	von $a = 0$ bis $a = c$,	von $a = v$ bis $a = l$,
für M_x	$b = \dfrac{l-x}{l}a$,	$b = \dfrac{l-a}{l}x$,
„ V_x	$b = -\dfrac{a}{l}$,	$b = \dfrac{l-a}{l}$.

Die Influenzlinien verlaufen auf den Strecken 0 bis c und v bis l ganz wie ohne Vorhandensein von Zwischenträgern, und da der Beitrag einer Last $P = 1$ nach 2) oder § 11 auch zwischen c und v mit a der Gleichung einer geraden Linie entsprechend variirt, so besteht die Abweichung der Influenzlinien gegenüber deren Verlauf im obigen Falle lediglich darin, dass nur ihre auf den Verticalen in c und v liegenden Punkte c_1, v_1 durch gerade Linien verbunden sind (Fig. 14, 15). Die Abscissen z entsprechen nach 2) den Durchschnittspunkten der Geraden $c_1 v_1$ mit der Abscissenaxe.

Mit $c = v = x$ gehen die jetzt gefundenen Influenzlinien in die oben erhaltenen über. Wir haben diesen Fall für diejenigen Schnitte, welche mit Knotenpunkten zusammenfallen. Beispielsweise bleibt die Influenzlinie der Stützenreaction $V = V_0$ durch Fig. 13 bestimmt.

Aufgabe 9. Gewöhnliche Balkenträger. Bewegte Radlastzüge.

Für den in Aufgabe 7 behandelten Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern sind die Grenzwerthe von M_x und V_x bei verschiedenen möglichen Radlastzügen unter der Voraussetzung abzuleiten, dass diese bewegte Lasten direct auf den betrachteten Träger wirken.

Nach A. 7, 3) haben wir für jede bestimmte Belastung

$$(1)\qquad M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l}\sum_0^x Pa + \frac{x}{l}\sum_x^l P(l-a),$$

$$(2)\qquad V_x = \mathfrak{B}_x - \frac{1}{l}\sum_0^x Pa + \frac{1}{l}\sum_x^l P(l-a).$$

Die Beiträge $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{B}_x$ der festen Last sind in Aufgabe 7 für alle Fälle bestimmt. Gewöhnlich kommen im vorliegenden Falle die Ausdrücke A. 7, 7) zur Verwendung.

Bewegt sich ein beliebiges System gleichzeitig auf dem Träger Platz findender Lasten in festen Entfernungen um unendlich wenig weiter, so ändern sich die Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ aller P um das gleiche da, wir erhalten nach der Anleitung in § 6

$$(3)\qquad \frac{dM_x}{da} = \frac{l-x}{l}\sum_0^x P - \frac{x}{l}\sum_x^l P = \sum_0^x P - \frac{x}{l}\sum_0^l P,$$

$$(4)\qquad \frac{dV_x}{da} = -\frac{1}{l}\sum_0^x P - \frac{1}{l}\sum_x^l P = -\frac{1}{l}\sum_0^l P.$$

Die Bedingung für das Maximum von M_x lautet daher

$$(5)\qquad \sum_0^x P = \frac{x}{l}\sum_0^l P.$$

Dasselbe tritt ein, wenn diejenige Last P_x bei x anlangt, bei welcher die Summe der von 0 nach l hin addirten Lasten des bewegten Systems den Werth $\frac{x}{l}\sum_0^l P$ durchschreitet. Für mathematische Maxima und Minima von V_x müsste sein

$$-\frac{1}{l}\sum_0^l P = 0.$$

Da dies für wirkliche Lasten P nicht möglich ist, so existiren keine mathematischen Maxima und Minima der Verticalkraft V_x.

Es handelt sich nun aber darum, die Grenzwerthe von M_x und V_x bei verschiedenen möglichen Lastsystemen festzustellen. Ein Blick auf die Influenzlinien Fig. 11—13, oder die Formeln 1) 2) genügt, um den Einfluss der Lasten P an beliebigen Stellen a zu übersehen. Für M_x tragen alle P in gleichem Sinne bei und zwar umsomehr, jemehr sich dieselben dem Schnitte x nähern; für V_x erhalten wir

von 0 bis x negative, von x bis l positive Beiträge, dem Zahlenwerthe nach aber wieder um so grössere, je näher die Last an den Schnitt x gelangt. Die Beiträge sind stets proportional den Grössen der Lasten. Es ergeben sich hiernach folgende Berechnungsmethoden.

Momente. Wir bringen einen Lastzug I, welcher möglichst grosse Lasten möglichst dicht um ein Rad O enthält, in solcher Richtung auf den Träger, dass mit O über x die ungünstigste Zugseite von O aus auf die längste Trägerstrecke von x aus käme, bestimmen die ungünstigste Stellung mit Hülfe von 5) und erhalten für dieselbe max M_x nach 1). Der zweite Grenzwerth ist min $M_x = \mathfrak{M}_x$. — Für den gewöhnlichen Fall, dass die feste Last zur Mitte symmetrisch liegt, braucht man wegen

$$(6) \qquad \max M_x = \max M_{l-x}, \qquad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{l-x}$$

nur eine Trägerhälfte zu berechnen, andernfalls gilt dies wenigstens bezüglich des Beitrags der Verkehrslast. — Bei Unsicherheit über die ungünstigste Zugrichtung wären beide Richtungen zu probiren.

Verticalkraft. Ein Lastsystem II, welches möglichst grosse Lasten möglichst dicht beim Vorderrad O enthält, sei in der Richtung von l nach 0 kommend mit dem Vorderrad O bis x gelangt. Wir erhalten dann nach 2)

$$(7) \qquad \text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{1}{l} \sum_x^l P(l-a).$$

Dasselbe Lastsystem, in der Richtung von 0 nach l fahrend, mit dem Vorderrade O bis x gelangt, liefert den zweiten Grenzwerth

$$(8) \qquad \text{neg max } V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l} \sum_0^x Pa.$$

Mit den Grenzwerthen von $V_0 = V$ haben wir auch diejenigen der Stützenreaction bei 0

$$(9) \qquad \max V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \qquad \min V = \mathfrak{V}.$$

Für symmetrisch zur Trägermitte liegende feste Last genügt wegen

$$(10) \qquad \text{neg max } V_x = -\text{pos max } V_{l-x}, \qquad \mathfrak{V}_x = -\mathfrak{V}_{l-x}$$

die Berechnung der positiven max V_x, im anderen Falle gilt dies nur hinsichtlich der Beiträge der Verkehrslast.

Bemerkungen. Nach 5) tritt max M_x im Augenblicke der Ankunft eines Rades bei x oder bei Aenderung des Lastsystems auf

dem Träger ein, weil nur dann Aenderungen von $\sum_0^x P$, $\sum_0^l P$ entstehen. Es gibt jedoch für jedes gleichzeitig auf dem Träger Platz findende bewegte System $P_1, P_1 \ldots P_n$ eine Anzahl Schnitte x, welche ihr max M_x vom erwähnten Augenblicke an solange beibehalten, bis das nächste Rad nach x gelangt, weil eben die Bedingung 5) solange erfüllt bleibt. Diese Schnitte finden sich aus

$$\frac{x}{l}\sum_0^l P = P_1, \quad P_1 + P_2, \ldots \quad P_1 + P_2 + P_{n-1}:$$

$$(11) \qquad x = \frac{P_1}{\sum\limits_0^l P}\, l, \quad \frac{P_1 + P_2}{\sum\limits_0^l P}\, l, \quad \frac{P_1 + \cdots + P_{n-1}}{\sum\limits_0^l P}\, l.$$

Aus 5) folgt unmittelbar auch ein graphisches Verfahren (Fig. 16) zur Bestimmung der für max M_x gültigen Stellung eines gegebenen Lastsystems: Man trage die P der Reihe nach von l aus senkrecht auf, verbinde 0 mit dem Endpunkte l_1, errichte in x das Perpendikel xx_1 bis zum Schnittpunkte x_1 mit $0l_1$ und ziehe von x_1 aus eine Parallele zu $0l$ nach ll_1 hin; die Last, welche getroffen wird, muss über x stehen. — Trifft die Parallele gerade den Grenzpunkt zweier Lasten, so darf man jede derselben über x bringen oder sie beliebig zu beiden Seiten stellen, wir haben es dann mit einem der Schnitte 11) zu thun. Die in Fig. 17 angedeutete Bestimmung der letzteren bedarf hiernach keiner weiteren Erklärung.

Liesse sich nur ein Lastsystem II mit verhältnissmässig kleiner oder von der nächsten weit abliegender Last O bilden, so wäre denkbar, dass die max V_x erst eintreten, wenn das zweite Rad bei x anlangt. Denn wenn zwar O letzterenfalls in entgegengesetztem Sinne wie die übrigen Lasten wirkt, so kommen doch diese mit grösseren Beiträgen zur Geltung und dieser Einfluss kann überwiegen. Bei Brückenträgern treten solche Fälle nicht ein, eventuell wären, wie auch sonst in Zweifelsfällen, Proberechnungen vorzunehmen, wobei die Influenzlinien gute Dienste leisten.

Ausführlicheres über die Maximalmomente gewöhnlicher Balkenträger mit und ohne Zwischenträger bei festen und bewegten Lastsystemen enthält ein Aufsatz des Verfassers, Zeitschrift d. Hannöv. Arch. u. Ing. Vereins 1875.

Beispiel 4. Zur vorigen Aufgabe.

Eine durch gewöhnliche Balkenträger von $l = 10$ m Spannweite gebildete eingeleisige Brücke wird von Locomotiven der in Fig. 18

skizzirten Radanordnung befahren. Die Radlasten wirken direct auf die Brückenträger, das Eigengewicht soll mit $g = 0{,}6$ tn pro laufenden Meter Brückenträger als gleichmässig vertheilt auf die Letzteren gelten. Die Grenzwerthe des Momentes M_x und der Verticalkraft V_x für Querschnitte x in Abständen von je 1 m zu berechnen.

Da die Bufferlänge der angenommenen Maschine 11 m und die Entfernung vom Ende bis zur nächsten Radaxe noch mindestens 2 m beträgt, so können entweder zwei Maschinen theilweise oder eine vollständig auf dem Träger Platz finden. Sowohl für die M_x als für die V_x wirkt eine Maschine ungünstiger.

Momente. Nach A. 7, 3) 7) hat man für den vorliegenden Fall bei jeder Belastung

$$M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a), \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{g}{2} x(l-x). \tag{2}$$

Zur Erzeugung der max M_x auf der ersten Trägerhälfte lassen wir die Maschine mit dem Schlote vorn von l nach 0 hin fahren. Das Moment max M_x tritt dann ein, wenn dasjenige Rad P_x bei x anlangt, mit welchem in

$$\sum_0^x P = \frac{x}{l} \sum_0^l P \tag{3}$$

die Summe links den Werth rechts durchschreitet.

Gesammtlast des bewegten Systems für einen Träger, wenn die ganze Maschine auf der Brücke steht, $\sum_0^l P = 3 \,.\, 6 + 4 + 5 = 27$, also $\frac{1}{l}\, 27 = 2{,}7$. Für $x = 1$ ist $2{,}7x = 2{,}7$, $P_x = P_1$ und mit $\mathfrak{M}_x = 0{,}3 \,.\, 1 \,.\, 9 = 2{,}7$

$$\max M_x = 2{,}7 + \frac{1}{10} [6\,(9 + 7{,}7 + 6{,}4) + 4 \,.\, 5{,}2 + 5 \,.\, 2{,}2]$$
$$= 2{,}7 + 17{,}04 = 19{,}74 \text{ mtn}.$$

Für $x = 2$ ist $2{,}7x = 5{,}4$, $P_x = P_1$ und mit $\mathfrak{M}_x = 0{,}3 \,.\, 2 \,.\, 8 = 4{,}8$

$$\max M_x = 4{,}8 + \frac{2}{10} [6\,(8 + 6{,}7 + 5{,}4) + 4 \,.\, 4{,}2 + 5 \,.\, 1{,}2]$$
$$= 4{,}8 + 28{,}68 = 33{,}48 \text{ mtn}.$$

Für $x = 3$ ist $2{,}7x = 8{,}1$, $P_x = P_2$ und mit $\mathfrak{M}_x = 0{,}3 \,.\, 3 \,.\, 7 = 6{,}3$

$$\max M_x = 6{,}3 + \frac{7}{10}6 \,.\, 1{,}7 + \frac{3}{10}[6\,(7 + 5{,}7) + 4 \,.\, 4{,}5 + 5 \,.\, 1{,}5]$$
$$= 6{,}3 + 37{,}65 = 43{,}95 \text{ mtn}.$$

Für $x = 4$ ist $2{,}7x = 10{,}8$, $P_x = P_2$ und mit $\mathfrak{M}_x = 0{,}3 \,.\, 4 \,.\, 6 = 7{,}2$

$$\max M_x = 7{,}2 + \frac{6}{10}6 \,.\, 2{,}7 + \frac{4}{10}[6\,(6 + 4{,}7) + 4 \,.\, 3{,}5 + 5 \,.\, 0{,}5]$$
$$= 7{,}2 + 42{,}00 = 49{,}20 \text{ mtn}.$$

Für $x = 5$ ist $2{,}7x = 13{,}5$, $P_x = P_3$ und mit $\mathfrak{M}_x = 0{,}3 \,.\, 5 \,.\, 5 = 7{,}5$

$$\max M_x = 7{,}5 + \frac{5}{10}[6\,(5 + 3{,}7 + 2{,}4) + 4 \,.\, 3{,}8 + 5 \,.\, 0{,}8]$$
$$= 7{,}5 + 42{,}90 = 50{,}40 \text{ mtn}.$$

Wegen $\max M_x = \max M_{l-x}$ hat man für

$x =$	6	7	8	9 m
$\max M_x =$	49,20	43,95	33,48	19,74 mtn.

Verticalkräfte. Die positiven $\max V_x$ entstehen, wenn die Maschine mit dem Schlote vorn in der Richtung von l nach 0 fahrend mit dem Vorderrade bei x anlangt. Man hat dann nach A. 9, 7) und A. 7, 7)

$$\text{(4)} \qquad \text{pos} \max V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{1}{l}\sum_x^l P(l - a)$$

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{V}_x = g\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

und erhält für $x = 0$ mit $\mathfrak{V}_0 = 0{,}6 \,.\, 5 = 3{,}0$

$$\text{pos} \max V_x = 3{,}0 + \frac{1}{10}[6\,(10 + 8{,}7 + 7{,}4) + 4 \,.\, 6{,}2 + 5 \,.\, 3{,}2]$$
$$= 3{,}0 + 19{,}74 = 22{,}74 \text{ tn},$$

für $x = 1$ mit $\mathfrak{V}_x = 0{,}6 \,.\, 4 = 2{,}4$

$$\text{pos} \max V_x = 2{,}4 + \frac{1}{10}[6\,(9 + 7{,}7 + 6{,}4) + 4 \,.\, 5{,}2 + 5 \,.\, 2{,}2]$$
$$= 2{,}4 + 17{,}04 = 19{,}44 \text{ tn},$$

für $x = 2$ mit $\mathfrak{V}_x = 0{,}6 \,.\, 3 = 1{,}8$

$$\text{pos} \max V_x = 1{,}8 + \frac{1}{10}[6\,(8 + 6{,}7 + 5{,}4) + 4 \,.\, 4{,}2 + 5 \,.\, 1{,}2]$$
$$= 1{,}8 + 14{,}34 = 16{,}14 \text{ tn},$$

für $x = 3$ mit $\mathfrak{V}_x = 0{,}6 \,.\, 2 = 1{,}2$

$$\text{pos} \max V_x = 1{,}2 + \frac{1}{10}[6\,(7 + 5{,}7 + 4{,}4) + 4 \,.\, 3{,}2 + 5 \,.\, 0{,}2]$$
$$= 1{,}2 + 11{,}64 = 12{,}84 \text{ tn},$$

für $x = 4$ mit $\mathfrak{V}_x = 0,6 \,.\, 1 = 0,6$

$$\text{pos max } V_x = 0,6 + \frac{1}{10}\,[6\,(6 + 4,7 + 3,4) + 4\,.\,2,2]$$
$$= 0,6 + 9,34 = 9,94 \text{ tn},$$

für $x = 5$ mit $\mathfrak{V}_x = 0,6 \,.\, 0 = 0$

$$\text{pos max } V_x = 0 + \frac{1}{10}\,[6\,(5 + 3,7 + 2,4) + 4\,.\,1,2]$$
$$= 0 + 7,14 = 7,14 \text{ tn},$$

für $x = 6$ mit $\mathfrak{V}_x = -0,6$

$$\text{pos max } V_x = -0,6 + \frac{1}{10}\,[6\,(4 + 2,7 + 1,4) + 4\,.\,0,2]$$
$$= -0,6 + 4,94 = 4,34 \text{ tn},$$

für $x = 7$ mit $\mathfrak{V}_x = -1,2$

$$\text{pos max } V_x = -1,2 + \frac{6}{10}\,(3 + 1,7 + 0,4)$$
$$= -1,2 + 3,06 = 1,86 \text{ tn},$$

für $x = 8$ mit $\mathfrak{V}_x = -1,8$

$$\text{pos max } V_x = -1,8 + \frac{6}{10}\,(2 + 0,7) = -1,8 + 1,62 = -0,18 \text{ tn},$$

für $x = 9$ mit $\mathfrak{V}_x = -2,4$

$$\text{pos max } V_x = -2,4 + \frac{6}{10}\,1 = -2,4 + 0,6 = -1,80 \text{ tn},$$

für $x = 10$ mit $\mathfrak{V}_x = -3,0$

$$\text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x = -3,00 \text{ tn}.$$

Wegen neg max $V_x = -$ pos max V_{l-x} folgen weiter

für $x =$	0	1	2	3	4	5	6 m:
neg max $V_x =$	3	1,8	0,18	$-1,86$	$-4,34$	$-7,14$	$-9,94$ tn,

für $x =$	7	8	9	10 m:
neg max $V_x =$	$-12,84$	$-16,14$	$-19,44$	$-22,74$ tn,

während die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind

$$\max V = 22,74 \text{ tn}, \qquad \min V = \mathfrak{V} = 3 \text{ tn}.$$

In Fig. 19 sind die Curven der max M_x und max V_x aufgetragen.

Bemerkungen. Angenommen, es läge das Rad P_1 um 3,5 m von P_2 ab und wäre max M_x für $x = 3$ zu berechnen. Dann würden, wenn alle Radlasten auf der Brücke stünden, wie oben

$$\frac{x}{l}\sum_0^l P = 8,1, \quad P_x = P_2.$$

Für diese Stellung des Lastsystems ist aber P_1 gar nicht mehr auf dem Träger. Daraus geht hervor, dass für $x = 3$ durch die Lasten P_2 bis P_5 ein grösseres Moment erzeugt werden kann als durch P_1 bis P_5. Denn wenn die Lasten P_2 bis P_5 beim Vorrücken gegen 0 hin wachsende M_x erzeugen, obschon der Beitrag von P_1 abnimmt, so muss M_x umsomehr zunehmen, wenn dieser entgegengesetzte Einfluss wegfällt, man hat einfach nicht das richtige Lastsystem auf dem Träger gewählt. Mit dem neuen System erhält man für $x = 3$

$$\frac{x}{l} \sum_0^l P = \frac{3}{10} 21 = 6{,}3, \quad P_x = P_2 \text{ (neuer Index)},$$

$$\max M_x = 6{,}3 + \frac{7}{10} 6 \, . \, 1{,}7 + \frac{3}{10} (6 \, . \, 7 + 4 \, . \, 5{,}8 + 5 \, . \, 2{,}8)$$
$$= 37{,}20 \text{ mtn},$$

während der grösste mit dem erstgewählten System zu erzielende Werth von M_x, welcher kein Maximum in mathematischem Sinne ist, sich ergibt wenn P_1 bei 0 ankommt

$$M_x = 6{,}3 + \frac{3}{10} (6 \, . \, 6{,}5 + 6 \, . \, 5{,}2 + 4 \, . \, 4 + 5 \, . \, 1) = 33{,}66 \text{ mtn}.$$

In Wirklichkeit würde man natürlich nicht auf das erste Lastsystem verfallen sein und auch in weniger drastischen Fällen können nur selten Zweifel über die Wahl des Lastsystems bestehen.

Wir haben oben bei Berechnung der max M_x die gerade bei x befindliche Last P in $\sum_x^l P$ berücksichtigt, würden aber zu den gleichen Resultaten gelangt sein, wenn wir sie in $\sum_0^x P$ aufgenommen hätten. Dies zeigt schon ein Blick auf Fig. 11, folgt aber auch aus 1), da für $a = x$

$$\frac{l - x}{l} Pa = \frac{x}{l} P(l - a)$$

ist. Der Werth von V_x dagegen ändert sich nach Fig. 12 oder A. 7, 3) um P wenn eine gerade bei x befindliche Last einmal auf die Strecke vor x, dann auf diejenige nach x gerechnet wird.

Aufgabe 10. Gewöhnliche Balkenträger. Absolutes Maximalmoment.

Das absolut grösste Moment M_x zu bestimmen, welches an dem in Aufgabe 7 betrachteten Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern beim Befahren mit Radlastzügen entstehen kann, wenn letztere direct

auf den Träger wirken und das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf denselben gelten soll.

Für jede bestimmte Belastung sei das grösste am Träger vorkommende Moment M_x durch M_m bezeichnet (§ 9). Befindet sich die Verkehrslast in Bewegung, dann wechselt der *Maximalmomentenpunkt* m fortwährend seinen Ort und das Maximalmoment M_m seinen Werth. Das grösste aller möglichen M_m ist das gesuchte *absolute Maximalmoment* max M_m. Da dasselbe natürlich auch das max M_x für seinen Querschnitt $x = m$ ist, so muss nach A. 9, 5) beim Eintreten von max M_m die Bedingung erfüllt sein

$$(1) \qquad \sum_0^m P = \frac{m}{l} \sum_0^l P.$$

Bestimmen wir nun zunächst m und max M_m unter der Voraussetzung, dass die Radlast P_m bereits bekannt ist, unter welcher max M_m eintreten wird. Für ein beliebiges auf dem Träger befindliches bewegtes System seien die (absoluten) Abstände der Lasten P_1, $P_2, \ldots P_n$ von P_m durch $d_1, d_2, \ldots d_m$ bezeichnet (Fig. 20). Dann können wir in der nach A. 7, 3) 7) für beliebige x bei jeder Laststellung gültigen Formel

$$(2) \qquad M_x = \frac{g}{2}\, x(l-x) + \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a)$$

für alle unter P_m eintretenden Momente setzen

$$\sum_0^x Pa = \sum_0^x P(x-d), \qquad \sum_x^l P(l-a) = \sum_x^l P(l-x-d),$$

womit speziell für diese Momente gilt

$$lM_x = x(l-x)\left(\frac{gl}{2} + \sum_0^l P\right) - (l-x)\sum_0^x Pd - x\sum_x^l Pd.$$

Da nun das grösste unter P_m eintretende Moment das gesuchte max M_m ist, so lautet die Bedingung für dasselbe

$$l\,\frac{dM_x}{dx} = 0 = (l-2x)\left(\frac{gl}{2} + \sum_0^l P\right) + \sum_0^x Pd - \sum_x^l Pd$$

und wir erhalten die Abscisse $x = m$ des absoluten Maximalmoments

$$(3) \quad m = \frac{l}{2} + \frac{(P_1 d_1 + \cdots + P_{m-1} d_{m-1}) - (P_{m+1} d_{m+1} + \cdots + P_n d_n)}{2 \sum_0^l P + gl}.$$

Subtrahirt man die mit x multiplicirte letzte Gleichung über 3) von der vorletzten, so folgt als Werth des absoluten Maximalmoments

$$(4)\qquad \max M_m = \left(\sum_0^l P + \frac{g\,l}{2}\right)\frac{m^2}{l} - (P_1 d_1 + \cdots + P_{m-1} d_{m-1}).$$

Diese Formel ist bequemer als 2), da der zweite Klammerausdruck und das Doppelte des ersten schon bei der Berechnung von m vorkommen.

Mittelst der Gleichungen 3) und 4) können Ort und Werth des absoluten Maximalmoments berechnet werden, wenn dasjenige Rad P_m bekannt ist, unter welchem $\max M_m$ eintritt. Unter P_m muss nach 1) die Summe der von 0 nach l hin addirten Lasten des bewegten Systems den Werth $\frac{m}{l}\sum_0^l$ durchschreiten. Da aber $\sum_0^x P$ unter P_m eine ganze Reihe von Werthen durchschreitet, da ferner m stets nahe bei $\frac{l}{2}$ liegt und also

$$\frac{\frac{l}{2}}{l}\sum_0^l P = \frac{1}{2}\sum_0^l P \text{ ein } \frac{m}{l}\sum_0^l P$$

benachbarter Werth ist, so können wir aussprechen: *Die Last P_m, unter welcher das absolute Maximalmoment eintritt, ist in der Regel diejenige Radlast, bei welcher die Summe der von 0 nach l hin addirten Lasten des bewegten Systems die halbe Gesammtlast des Letzteren durchschreitet.*

Zur Ermittelung des absoluten Maximalmoments würde also wie folgt zu verfahren sein: Man bringt einen Lastzug I, welcher möglichst grosse Lasten möglichst dicht um ein Rad O enthält in beliebiger Richtung auf den Träger, findet P_m durch Anwendung des vorstehenden Satzes und berechnet dann m und $\max M_m$ aus 3) und 4). — Der erwähnte Satz liefert wohl in allen praktischen Fällen das richtige P_m, was nach 1) controlirt werden kann, indem man zusieht, ob für das gefundene m nun wirklich $\frac{m}{l}\sum_0^l P$ unter P_m durchschritten wird. Wäre es nicht der Fall, so würde das folgende oder das vorhergehende Rad als P_m anzunehmen sein, jenachdem die Summe $\sum_0^m P$ kleiner oder grösser als $\frac{m}{l}\sum_0^l P$ ist.

Spezieller Fall. Fig. 21. In vielen Fällen, besonders bei Schienen-

trägern, finden nur zwei Räder gleichzeitig auf dem Träger Platz. Da so kleine Träger fast immer constanten Querschnitt erhalten, so pflegen nur die absolut grössten Werthe von Moment und Verticalkraft zu interessiren. Letztere findet sich nach Aufgabe 9 bei den Stützen. Wählen wir die grösste Radlast als P_1, so hat man $P_m = P_1$, und damit nach 3) 4) Ort und Werth des absoluten Maximalmoments

$$(5)\qquad m = \frac{l}{2} - \frac{P_2 d}{2(P_1 + P_2) + g l}$$

$$(6)\qquad \max M_m = \left(P_1 + P_2 + \frac{g l}{2}\right) \frac{m^2}{2}.$$

Natürlich hat man sich, nachdem m bestimmt ist, zu überzeugen, ob P_2 noch auf dem Träger ist, wenn P_1 über m steht. Wäre es nicht der Fall, so würde $\max M_m$ mit der grösstmöglichsten Radlast über $m = \frac{l}{2}$ eintreten.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Dass für solche das absolute Maximalmoment bei der Trägermitte entsteht, ist dann ohne Weiteres klar, wenn die Belastung per Längeneinheit für alle x gleich gross angenommen wird. Nach A. 10, 2) mit A. 2, 2) 3) und A. 7, 7) haben wir für beliebige x

$$\max M_x = \frac{q}{2} x (l - x).$$

Daher für $\max M_m$

$$\frac{d \max M_m}{dx} = 0 = q(l - 2x)$$

und hieraus

$$(7)\qquad m = \frac{l}{2}, \qquad \max M_m = \frac{q l^2}{8}.$$

Beispiel 5. Zur vorigen Aufgabe.

Die grössten Werthe des Moments und der Verticalkraft zu berechnen, welche für die Träger des Beispiels 4 beim Befahren mit den dort gewählten Locomotiven entstehen.

Bezüglich der Wahl des Lastsystems gilt das im Beispiel 4 Gesagte. Zur Berechnung des absoluten Maximalmoments haben wir

$$\frac{1}{2} \sum_0^l P = \frac{1}{2} (3 . 6 + 4 + 5) = 13{,}5 \text{ tn}.$$

Dieser Werth wird von $\sum_0^x P$ unter dem dritten Rade durchschritten, daher $P_m = P_3$ und nach A. 10, 3) 4)

$$m = 5 + \frac{6 \cdot 2{,}6 + 6 \cdot 1{,}3 - 4 \cdot 1{,}2 - 5 \cdot 4{,}2}{54 + 0{,}6 \cdot 10} = 4{,}96 \text{ m},$$

$$\max M_m = (27 + 3) \frac{4{,}96^2}{10} - 6\,(2{,}6 + 1{,}3) = 50{,}40 \text{ mtn}.$$

Die Summe $\sum_0^x P$, welche unter P_3 von 12 bis 18 wächst, durchschreitet daselbst, wie es verlangt wird, auch den Werth

$$\frac{m}{l} \sum_0^l P = 13{,}39 \text{ tn}.$$

Das absolute Maximalmoment tritt also fast genau bei der Trägermitte ein und weicht von dem $\max M_x$ daselbst, welches sich in Beispiel 4 gleich 50,40 ergab, nicht merklich ab. Dies wird in praktischen Fällen bei mehr als drei Rädern immer so sein und es ist dann genügend genau, wenn als $\max M_m$ einfach $\max M_x$ bei $x = \frac{l}{2}$ angenommen wird.

Die absolut grösste Verticalkraft entsteht unmittelbar bei den Stützen und findet sich wie in Beispiel 4

$$\max V_0 = 22{,}74 \text{ tn}.$$

Mit ihr haben wir auch die grössten vorkommenden Stützenreactionen.

Beispiel 6. Tabelle von Lastmomenten.

In den Ausdrücken

$$r_x = \sum_0^x Pa, \qquad s_x = \sum_x^l P(l - a)$$

mögen 0, x, l die Abscissen irgendwelcher Streckengränzen und die a Abscissen der Angriffspunkte von Lasten P bedeuten. Man verlangt für Streckenlängen x und $l - x$ von 0 bis 50 m:

a) Die Werthe s, wenn der in Fig. 22 angedeutete Lastzug II die Strecke nach x belastend mit dem Vorderrade O bei x steht, und die Werthe r, wenn derselbe Zug die Strecke vor x belastend mit dem Vorderrade O bei x steht, wobei das Rad O immer auf die belastete Strecke zu rechnen ist;

b) Die Werthe r, s, wenn der in Fig. 23 angedeutete Lastzug I wie dort mit Rad O bei x steht, wobei O auf die Strecke vor x gerechnet werden soll und die Werthe r, s, wenn derselbe Zug entsprechend Fig. 24 in entgegengesetzter Richtung mit Rad O bei x steht, wobei Rad O auf die Strecke nach x zu rechnen ist.

Ueber die Bedeutung der Züge I und II gibt § 12 Aufschluss. Bei bestimmter Zusammenstellung des Lastzugs sind die Werthe r nur von den Streckenlängen x und die s nur von den Streckenlängen $l - x$ abhängig, die Länge l ist gleichgültig.

Lastzug II. Wenn Zug II nach der Andeutung in Fig. 22 mit dem Vorderrade O bei x steht, so hat man für $l - x = 50$ m

$$s = 6\,(50 + 48{,}7 + 47{,}4 + 39 + 37{,}7 + 36{,}4 + 28 + 26{,}7 + 25{,}4 + 17 + 15{,}7 + 14{,}4 + 6 + 4{,}7 + 3{,}4) + 4\,(46{,}2 + 35{,}2 + 24{,}2 + 13{,}2 + 2{,}2) + 5\,(43{,}2 + 32{,}2 + 21{,}2 + 10{,}2)$$
$$= 6 \,.\, 400{,}5 + 4 \,.\, 121 + 5 \,.\, 106{,}8 = 3421 \text{ mtn},$$

für $l - x = 20$

$$s = 6\,(30 + 28{,}7 + 27{,}4 + 19 + 17{,}7 + 16{,}4 + 8 + 6{,}7 + 5{,}4) + 4\,(26{,}2 + 15{,}2 + 4{,}2) + 5\,(23{,}2 + 12{,}2 + 1{,}2)$$
$$= 6 \,.\, 159{,}3 + 4 \,.\, 45{,}6 + 5 \,.\, 36{,}6 = 1321,$$

für $l - x = 10$

$$s = 6\,(10 + 8{,}7 + 7{,}4) + 4 \,.\, 6{,}2 + 5 \,.\, 3{,}2 = 197{,}4.$$

In dieser Weise können die s für beliebige $l - x$ berechnet werden. Das Verfahren ist jedoch für grosse Streckenlängen etwas langweilig und bald erkennt man, dass sich nach Ermittelung des ersten Werthes s wie folgt weiter rechnen lässt. Für $l - x = 49$

$$s = 6\,(400{,}5 - 15) + 4\,(121 - 5) + 5\,(106{,}8 - 4) = 3291,$$

für $l - x = 48$

$$s = 6\,(385{,}5 - 15) + 4\,(116 - 5) + 5\,(102{,}8 - 4) = 3161,$$

für $l - x = 47$

$$s = 6\,(370{,}5 - 15) + 4\,(111 - 4{,}2) + 5\,(98{,}8 - 4) = 3064,$$

für $l - x = 46$

$$s = 6\,(355{,}5 - 14{,}4) + 4\,(106{,}8 - 4) + 6\,(94{,}8 - 4) = 2912.$$

Man hat dabei nur die Aenderung der Radzahl mit der Streckenlänge im Auge zu behalten, was bei obigem Verfahren nicht nöthig ist. Gelegentlich kann nach letzterem controlirt werden. Die berechneten s sind in der letzten Columne der unten folgenden Tabelle eingestellt. Man kennt damit auch die $r_x = s_{l-x}$ für den Fall, dass Zug II die Strecke von 0 bis x belastend mit dem Vorderrade O bei

x steht; diese sind in der vierten Columne der nachstehenden Tabelle aufgeführt.

Lastzug I. Wenn Zug I nach der Andeutung in Fig. 23 (*erste Zugrichtung*) mit Rad O über x steht erhält man für $x = 50$ m

$$r = 6\,(50 + 48{,}7 + 40{,}3 + 39 + 37{,}7 + 29{,}3 + 28 + 26{,}7 + 18{,}3 + 17 + 15{,}7 + 7{,}3 + 6 + 4{,}7) + 4\,(47{,}5 + 36{,}5 + 25{,}5 + 14{,}5 + 3{,}5) + 5\,(44{,}5 + 33{,}5 + 22{,}5 + 11{,}5 + 0{,}5)$$
$$= 6 \,.\, 368{,}7 + 4 \,.\, 127{,}5 + 5 \,.\, 112{,}5 = 3285 \text{ mtn},$$

für $x = 30$

$$r = 6\,(30 + 28{,}7 + 20{,}3 + 19 + 17{,}7 + 9{,}3 + 8 + 6{,}7) + 4\,(27{,}5 + 16{,}5 + 5{,}5) + 5\,(24{,}5 + 13{,}5 + 2{,}5)$$
$$= 6 \,.\, 139{,}7 + 4 \,.\, 49{,}5 + 5 \,.\, 40{,}5 = 1239,$$

für $x = 10$

$$r = 6\,(10 + 8{,}7 + 0{,}3) + 4 \,.\, 7{,}5 + 5 \,.\, 4{,}5 = 166{,}5.$$

In dieser Weise lassen sich alle r berechnen. Einfacher ist es wie im vorigen Falle nach Ermittelung des ersten Werthes wie folgt fortzufahren.

Für $x = 49$

$$r = 6\,(368{,}7 - 14) + 4\,(127{,}5 - 5) + 5\,(122{,}5 - 4{,}5) = 3158,$$

für $x = 48$

$$r = 6\,(354{,}7 - 14) + 4\,(122{,}5 - 5) + 5\,(118 - 4) = 3034 \text{ u. s. w.}$$

Auch hier wird man von Zeit zu Zeit mittelst des ersten Verfahrens controliren. Die berechneten r sind in der zweiten Columne unsrer Tabelle zusammengestellt.

Bei derselben Stellung des Lastzugs I, welche für die jetzt ermittelten r angenommen wurde, ergeben sich für $l - x = 50$ m

$$s = 6\,(48{,}7 + 44{,}7 + 43{,}4 + 42{,}1 + 33{,}7 + 32{,}4 + 31{,}1 + 22{,}7 + 21{,}4 + 20{,}1 + 11{,}7 + 10{,}4 + 9{,}1 + 0{,}7) + 4\,(40{,}9 + 29{,}9 + 18{,}9 + 7{,}9) + 5\,(37{,}9 + 26{,}9 + 15{,}9 + 4{,}9)$$
$$= 6 \,.\, 370{,}2 + 4 \,.\, 97{,}6 + 5 \,.\, 85{,}6 = 3052 \text{ mtn},$$

für $l - x = 30$

$$s = 6\,(28{,}7 + 24{,}7 + 23{,}4 + 22{,}1 + 13{,}7 + 12{,}4 + 11{,}1 + 2{,}7 + 1{,}4 + 0{,}1) + 4\,(20{,}9 + 9{,}9) + 5\,(17{,}9 + 6{,}9)$$
$$= 6 \,.\, 140{,}3 + 4 \,.\, 30{,}8 + 5 \,.\, 24{,}8 = 1089,$$

für $l - x = 10$

$$s = 6\,(8{,}7 + 4{,}7 + 3{,}4 + 2{,}1) + 4\,.\,0{,}9 = 117{,}0\,.$$

Schneller als bei dieser Berechnungsweise kommt man wieder wie folgt zum Ziele.

Für $x = 49$

$$s = 6\,(372{,}2 - 13{,}7) + 4\,(97{,}6 - 4) + 5\,(85{,}6 - 4) = 2933,$$

für $x = 48$

$$s = 6\,(358{,}5 - 13) + 4\,(93{,}6 - 4) + 5\,(81{,}6 - 4) = 2819 \text{ u. s. f.}$$

Die erhaltenen Werthe sind in der zweiten Columne der nachstehenden Tabelle aufgeführt.

Denkt man sich den Zug I nach der Andeutung Fig. 24 in umgekehrter Richtung wie oben mit dem Rade O über x stehend (*zweite Zugrichtung*), dann wird

$\sum_0^x Pa$ gleich dem oben berechneten $\sum_x^l P(l-a)$ für $l - x$ gleich x,

$\sum_x^l P(l-a)$ gleich dem oben berechneten $\sum_0^x Pa$ für x gleich $l - x$,

Wenn beispielsweise der ersten Zugrichtung entsprechen

für $x = 50,\ 30,\ 10$

$$r = 3285, \quad 1239, \quad 166{,}5,$$

so erhält man bei der zweiten Zugrichtung

für $l - x = 50,\ 30,\ 10$

$$s = 3285, \quad 1239, \quad 166{,}5,$$

und wenn sich bei der ersten Zugrichtung fanden

für $l - x = 50,\ 30,\ 10$

$$s = 3040, \quad 1089, \quad 117{,}0,$$

dann müssen der zweiten Zugrichtung entsprechen

für $x = 50,\ 30,\ 10$

$$r = 3040, \quad 1089, \quad 117{,}0.$$

Die Werthe r, s für die zweite Zugrichtung sind in den Columnen 3 und 7 unsrer Tabelle eingestellt.

Länge x in m.	$r_x = \sum_0^x Pa$ in mtn			Länge $l-x$ in m.	$s_x = \sum_x^l P(l-a)$ in mtn		
	Zug I, erste Richtung.	Zug I, zweite Richtung.	Zug II.		Zug I, erste Richtung.	Zug I, zweite Richtung.	Zug II.
0	0	0	0	0	0	0	0
1	6,0	0	6,0	1	0	6,0	6,0
2	16,2	4,2	16,2	2	4,2	16,2	16,2
3	30,2	10,2	30,6	3	10,2	30,2	30,6
4	46,2	16,2	49,4	4	16,2	46,2	49,4
5	62,2	22,2	71,4	5	22,2	62,2	71,4
6	80,7	32,4	93,4	6	32,4	80,7	93,4
7	101,7	46,8	116,4	7	46,8	101,7	116,4
8	122,7	65,4	143,4	8	65,4	122,7	143,4
9	143,7	89,4	170,4	9	89,4	143,7	170,4
10	166,5	117,0	197,4	10	117,0	166,5	197,4
11	193,5	145,0	224	11	145,0	193,5	224
12	226	173,0	257	12	173,0	226	257
13	264	205	295	13	205	264	295
14	305	238	336	14	238	305	336
15	348	271	382	15	271	348	382
16	383	304	431	16	304	383	431
17	428	342	481	17	342	428	481
18	490	383	530	18	383	490	530
19	532	429	583	19	429	532	583
20	580	480	638	20	480	580	638
21	630	535	692	21	535	630	692
22	684	589	746	22	589	684	746
23	744	644	806	23	644	744	806
24	808	704	870	24	704	808	870
25	876	764	938	25	764	876	938
26	946	824	1011	26	824	946	1011
27	1016	884	1087	27	884	1016	1087
28	1089	948	1163	28	948	1089	1163
29	1164	1016	1240	29	1016	1164	1240
30	1239	1089	1321	30	1089	1239	1321
31	1314	1167	1401	31	1167	1314	1401
32	1390	1249	1482	32	1249	1390	1482

Länge x in m.	$r_x = \sum_0^x Pa$ in mtn			Länge $l-x$ in m.	$s_x = \sum_x^l P(l-a)$ in mtn		
	Zug I, erste Richtung.	Zug I, zweite Richtung.	Zug II.		Zug I, erste Richtung.	Zug I, zweite Richtung.	Zug II.
33	1471	1331	1562	33	1331	1471	1562
34	1558	1413	1650	34	1413	1558	1650
35	1650	1499	1741	35	1499	1650	1741
36	1745	1586	1836	36	1586	1745	1836
37	1842	1673	1938	37	1673	1842	1938
38	1939	1760	2041	38	1760	1939	2041
39	2038	1851	2144	39	1851	2038	2144
40	2140	1947	2248	40	1947	2140	2248
41	2242	2046	2356	41	2046	2242	2356
42	2344	2151	2464	42	2151	2344	2464
43	2448	2260	2572	43	2260	2448	2572
44	2556	2369	2680	44	2369	2556	2680
45	2670	2478	2794	45	2478	2670	2794
46	2896	2591	2912	46	2591	2896	2912
47	2910	2705	3034	47	2705	2910	3034
48	3034	2819	3161	48	2819	3034	3161
49	3158	2933	3291	49	2933	3158	3291
50	3285	3052	3421	50	3052	3285	3421

Bemerkungen. Da die Tabellenwerthe den Radlasten auf einer Schiene entsprechen, so sind die Lastmomente per Geleise gleich dem doppelten derselben. Wir werden jedoch, um für den Druck möglichst kleine Zahlen zu erhalten, bei Berechnung von Eisenbahnbrücken immer eingeleisige Brücken mit zwei Hauptträgern annehmen. Für zweigeleisige Brücken mit zwei Hauptträgern sind unter den üblichen Voraussetzungen die Beanspruchungen doppelt so gross.

Eine Tabelle der vorgeführten Art sollte vor Berechnung der Brücken jeder grösseren Bahn angelegt werden, da wesentliche Abkürzungen der Berechnung damit erreicht werden. Die Züge I und II sind aus Locomotiven allein (was wir im Allgemeinen vorziehen) oder aus solchen und angehängten schwersten Güterwagen zusammen zu stellen, jenachdem man das eine oder andere für die Sicherheit erforderlich oder genügend erachtet. Bis zu welchen Streckenlängen

x und $l - x$ die Tabelle auszudehnen ist, hängt von den vorkommenden Spannweiten ab.

Aufgabe 11. Gewöhnliche Balkenträger. Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Lastäquivalente.

Für den in Aufgabe 7 behandelten Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern unter Voraussetzung direct wirkender Verkehrslasten abzuleiten: a) die Grenzwerthe von M_x und V_x wenn die bewegte Last mit p per Längeneinheit auf die ergriffene Strecke gleichmässig vertheilt ist; b) diejenigen Werthe von p, welche gleiche max M_x und gleiche max V_x wie bewegte Radlastzüge erzeugen.

Grenzwerthe. Nach A. 7, 2) hat man bei beliebiger Belastung

$$(1) \qquad M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l} S + \frac{x}{l} S', \quad V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{1}{l}(S' - S),$$

worin S, S' die Momente der von 0 bis x bezw. x bis l wirklich auf den Träger kommenden Verkehrslasten in Hinsicht der Punkte 0 und l. Der ersten dieser Gleichungen oder Fig. 11 zufolge treten die Grenzwerthe von M_x für Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein ein. Für den ersten Fall liefert A. 2, 2) 3)

$$S = \frac{p}{2} x^2, \qquad S' = \frac{p}{2}(l-x)^2,$$

womit nach 1)

$$(2) \qquad \max M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{p}{2} x (l-x), \qquad \min M_x = \mathfrak{M}_x.$$

Die Grenzwerthe von V_x entstehen nach 1) oder Fig. 12, wenn die Verkehrslast das eine Mal von x bis l, das andre Mal von 0 bis x reicht. Da im ersten Falle

$$S = 0, \qquad S' = \frac{p}{2}(l-x)^2$$

und im zweiten

$$S = \frac{p}{2} x^2, \qquad S' = 0,$$

so liefert 1)

$$(3) \quad \text{pos}\max V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{p}{2l}(l-x)^2, \quad \text{neg}\max V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{p}{2l} x^2.$$

Wegen $V = V_0$ sind die Grenzwerthe der Stützenreaction bei 0

$$(4) \qquad \max V = \mathfrak{V} + \frac{pl}{2}, \qquad \min V = \mathfrak{V}.$$

Die vom Eigengewicht allein herrührenden Werthe $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{V}_x$, $\mathfrak{V}$ sind in Aufgabe 7 für alle Fälle bestimmt.

Liegt die feste Last symmetrisch zur Trägermitte, so hat man

$$(5)\qquad \begin{cases} \max M_x = \max M_{l-x}, & \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{l-x}, \\ \text{neg}\max V_x = -\text{pos}\max V_{l-x}, & \mathfrak{V}_x = -\mathfrak{V}_{l-x}, \end{cases}$$

es brauchen also dann nur die Grenzwerthe von M_x für eine Trägerhälfte und die pos max V_x berechnet zu werden. Bei unsymmetrischer fester Last gilt Analoges nur für die Beiträge der Verkehrslast. Wird die feste Last mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf den Träger angenommen, so hat man nach 2) 4) und A. 7, 7) mit $q = g + p$

$$(6)\qquad \mathfrak{M}_x : \max M_x = g : q, \qquad \mathfrak{V} : \max V = g : q.$$

Die berechneten Grenzwerthe lassen sich natürlich auch sehr leicht mittelst der Influenzlinien ermitteln. Man entnimmt, § 12 c entsprechend, aus Fig. 11

$$\max M_x = \mathfrak{M}_x + p \cdot \overline{xx_1}\,\frac{l}{2}, \qquad \min M_x = \mathfrak{M}_x$$

und aus Fig. 12

$$\text{pos}\max V_x = \mathfrak{V}_x + p \cdot \overline{xx_2}\,\frac{l-x}{2}, \quad \text{neg}\max V_x = \mathfrak{V}_x - p \cdot \overline{xx_1}\,\frac{x}{2},$$

woraus wegen $\overline{xx_1} = \frac{l-x}{l}x$ im ersten Falle und $\overline{xx_1} = \frac{x}{2}$, $\overline{xx_2} = \frac{l-x}{2}$ im zweiten Falle sofort die Gleichungen 2) 3) folgen.

Lastaequivalente. Bezeichnen wir für bewegte Radlastzüge

$$\max M_x = \mathfrak{M}_x + m_x,$$

so folgt durch Gleichsetzen mit 2) zur Berechnung der max M_x

$$(7)\qquad p = \frac{2m_x}{x(l-x)},$$

worin für die in Aufgabe 9 bestimmte Totalbelastung des ganzen Trägers

$$(8)\qquad m_x = \frac{l-x}{l}\sum_0^x Pa + \frac{x}{l}\sum_x^l P(l-a).$$

Setzen wir ferner für bewegte Radlastzüge

$$\text{pos}\max V_x = \mathfrak{V}_x + v_x, \qquad \text{neg}\max V_x = \mathfrak{V}_x - w_x,$$

so ergeben sich mit 3) zur Berechnung der pos max V_x

$$(9)\qquad p = \frac{2lv_x}{(l-x)^2}$$

und zur Berechnung der neg max V_x

(10) $$p = \frac{2 l w_x}{x^2}.$$

Nach Aufgabe 9 ist bei Belastung durch einen Zug II von x bis l mit Vorderrad O bei x

(11) $$v_x = \frac{1}{l} \sum_x^l P(l - a)$$

und bei Belastung durch denselben Zug II von 0 bis x mit Vorderrad O bei x

(12) $$w_x = \frac{1}{l} \sum_0^x Pa,$$

wonach stets $w_x = v_{l-x}$ ist und zur Berechnung des neg max V_x für $x = e$ dasselbe p gilt wie zur Berechnung des pos max V_x für $l - x = e$.

Bei bestimmter Zusammenstellung des Lastzugs hängt $l v_x$ nur von der Streckenlänge $l - x$ und $l w_x$ nur von der Streckenlänge x ab, die Spannweite l ist ohne Einfluss. Auf Grund von 9) 10) lässt sich daher aussprechen: *Bei bestimmtem Lastzug II sind für Träger aller Spannweiten l die Lastaequivalente p zur Berechnung der pos max V_x in Schnitten von gleichem $l - x$ gleich gross und ebenso die p zur Berechnung der neg max V_x in Schnitten von gleichem x.* Beispielsweise entspricht dem Maximum der Stützenreaction $V = V_0$ eines Trägers der Spannweite l dasselbe p wie dem pos max V_x in demjenigen Schnitte eines Trägers der Spannweite L, für welchen $L - x = l$ ist (*Schäffer*, Deutsche Bauzeitung 1876).

Beispiel 7. Zur vorigen Aufgabe.

Für die in Beispiel 4 betrachteten Balkenträger sind diejenigen gleichmässig vertheilten Lasten p zu ermitteln, welche gleiche max M_x und gleiche max V_x wie die angenommenen Radlastsysteme ergeben.

Momente. Nach A. 11, 7) hat man zur Berechnung der Momente

(1) $$p = \frac{2 m_x}{x(l - x)},$$

woraus mit den in Beispiel 4 berechneten m_x:

für $x = 1$ $\quad p = \frac{2 \cdot 17{,}04}{1 \cdot 9} = 3{,}79$ tn,

$x = 2$ $\quad p = \frac{2 \cdot 28{,}68}{2 \cdot 8} = 3{,}58$ „

$$\text{für } x = 3 \qquad p = \frac{2 \cdot 37{,}65}{3 \cdot 7} = 3{,}59 \text{ tn},$$

$$x = 4 \qquad p = \frac{2 \cdot 42{,}00}{4 \cdot 6} = 3{,}50 \text{ „}$$

$$x = 5 \qquad p = \frac{2 \cdot 42{,}90}{5 \cdot 5} = 3{,}43 \text{ „}$$

Hiernach lässt sich die übliche Wahl eines constanten p für Berechnung sämmtlicher max M_x zur Noth rechtfertigen, da man den Momenten nach den Trägerenden hin mit den Dimensionen doch nicht genau folgen kann. Bei grösseren Spannweiten stimmen die p noch mehr überein.

Verticalkräfte. Zur Berechnung der pos max V_x hat man nach A. 11, 9)

$$p = \frac{2 l v_x}{(l - x)^2} \tag{2}$$

und mit den in Beispiel 4 berechneten v_x:

$$\text{für } x = 0 \qquad p = \frac{20 \cdot 19{,}74}{100} = 3{,}94 \text{ tn},$$

$$x = 1 \qquad p = \frac{20 \cdot 17{,}04}{81} = 4{,}21 \text{ „}$$

$$x = 2 \qquad p = \frac{20 \cdot 14{,}34}{64} = 4{,}48 \text{ „}$$

$$x = 3 \qquad p = \frac{20 \cdot 11{,}64}{49} = 4{,}75 \text{ „}$$

$$x = 4 \qquad p = \frac{20 \cdot 9{,}34}{36} = 5{,}19 \text{ „}$$

$$x = 5 \qquad p = \frac{20 \cdot 7{,}14}{25} = 5{,}71 \text{ „}$$

$$x = 6 \qquad p = \frac{20 \cdot 4{,}94}{16} = 6{,}17 \text{ „}$$

$$x = 7 \qquad p = \frac{20 \cdot 3{,}06}{9} = 6{,}80 \text{ „}$$

$$x = 8 \qquad p = \frac{20 \cdot 1{,}62}{4} = 8{,}10 \text{ „}$$

$$x = 9 \qquad p = \frac{20 \cdot 0{,}6}{1} = 12{,}00 \text{ „}$$

$$x = 10 \qquad p = \frac{20 \cdot 0}{0^2} = \infty \text{ „}.$$

Von der Annahme eines constanten p zur Berechnung aller max V_x kann hiernach keine Rede sein. In Fig. 25 sind die berechneten p bei den zugehörigen x aufgetragen.

Beispiel 8. Gewöhnliche Balkenträger. Tabellen von Lastäquivalenten.

Für direct befahrene vollwandige Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern sind zu ermitteln: a) die Lastäquivalente p des in § 12 angenommenen Lastzugs II (Fig. 22) zur Berechnung der max V_x bei Spannweiten l von 0 bis 50 m; b) die Lastäquivalente p des in § 12 angenommenen Lastzugs I (Fig. 24) zur Berechnung der max M_x in der Trägermitte für Spannweiten l von 0 bis 50 m.

Verticalkräfte. Nach A. 11, 9) 11) haben wir zur Berechnung der pos max V_x

$$(1) \qquad p = \frac{2 s_x}{(l-x)^2} \quad \text{mit} \quad s_x = \sum_x^l P(l-a),$$

wobei Zug II von l nach 0 fahrend mit dem Vorderrade O bei x angelangt ist. Die s_x lassen sich wie in Beispiel 6 berechnen oder aus der dortigen Tabelle entnehmen. Wir erhalten dann

$$\text{für } l - x = 50 \text{ m} \qquad p = \frac{2 \cdot 3421}{2500} = 2{,}74 \text{ tn}$$

$$l - x = 30 \qquad p = \frac{2 \cdot 1321}{900} = 2{,}93,$$

$$l - x = 10 \qquad p = \frac{2 \cdot 197{,}4}{100} = 3{,}95.$$

In gleicher Weise sind die übrigen p für pos max V_x der folgenden Tabelle berechnet, während nach Aufgabe 11 zur Berechnung des neg max V_x für $x = e$ dasselbe p gilt wie zur Berechnung des pos max V_x für $l - x = e$.

Lastäquivalente p für max V_x (Lastzug II).

$l-x$ für pos max V_x / x für neg max V_x	0	10	20	30	40 m
1	12,00	3,70	3,14	2,92	2,80
2	8,10	3,57	3,08	2,89	2,79
3	6,80	3,49	3,05	2,87	2,78
4	6,17	3,43	3,02	2,85	2,77
5	5,71	3,39	3,00	2,84	2,76
6	5,19	3,37	2,99	2,83	2,75
7	4,75	3,33	2,98	2,83	2,75
8	4,48	3,27	2,97	2,83	2,74
9	4,21	3,23	2,95	2,82	2,74
10 m	3,95	3,19	2,93	2,81	2,74

Die Einrichtung der Tabelle wird klar, wenn wir bemerken, dass beispielsweise für pos max V_x bei $l - x = 23$ und für neg max V_x bei $x = 23$ m das Lastäquivalent $p = 3{,}05$ tn ist.

Momente. Zur Berechnung von max M_x bei $x = \frac{l}{2}$ hat man nach A. 11, 7) 8)

$$(2) \qquad p = \frac{8m_x}{l^2} \quad \text{mit} \quad 2m_x = \sum_0^x Pa + \sum_x^l P(l-a).$$

Wir stellen nun den Lastzug I mit Rad O über x, berechnen die Summen in 2) wie in Beispiel 6 oder entnehmen sie aus der dortigen Tabelle und erhalten

$$\text{für } l = 50 \quad 2m_x = 764 + 876 = 1640, \quad p = \frac{4 \cdot 1640}{2500} = 2{,}63 \text{ tn},$$

$$l = 30 \quad 2m_x = 271 + 348 = 619, \quad p = \frac{4 \cdot 619}{900} = 2{,}75,$$

$$l = 10 \quad 2m_x = 22{,}2 + 62{,}2 = 84{,}4, \quad p = \frac{4 \cdot 84{,}4}{100} = 3{,}38.$$

In gleicher Weise sind alle nachstehenden Lastäquivalente p berechnet, welchen wir diejenigen beisetzen, welche sich ergeben hätten, wenn als Rad O über x das dritte Rad der gleichen Locomotive anstatt des zweiten gewählt worden wäre.

Für

$l =$	2	4	6	8	10	12	15	20	25	30	35	40	45	50 m,
$p =$	6,00	5,10	4,49	3,90	3,38	3,14	2,99	2,84	2,77	2,75	2,66	2,65	2,63	2,63 tn.
	6,00	4,85	4,20	3,74	3,43	3,13	2,82	2,70	2,76	2,71	2,67	2,61	2,62	2,61.

Abgesehen von der Spannweite $l = 10$ m (wir haben dann mit dem dritten Rade über x ein Rad mehr auf dem Träger als mit dem zweiten, Beispiel 4) erhält man also im ersten Falle ungünstigere Lastsysteme für M_x bei der Trägermitte als im zweiten Falle. Grosse Differenzen treten aber überhaupt nicht ein und es ist wenigstens für grössere Spannweiten besondere Aengstlichkeit bei der Auswahl des Rades O nicht nöthig. Die Richtung des Lastzugs ist, da es sich um die Trägermitte handelt, natürlich gleichgültig.

Nach § 12, b) lässt sich annehmen, dass die gewählten Laststellungen mit O über x entweder die genauen max M_x erzeugen oder doch nur wenig davon abweichende Momente. Wenn die Stellung genau richtig sein soll, so muss für dieselbe nach A. 9, 5) bei $x = \frac{l}{2}$

$$(3) \qquad \sum_0^x P = \frac{1}{2}\sum_0^l P$$

sein. Dies trifft für alle betrachteten Fälle zu, mit Ausnahme von $l = 40$ und $l = 20$. Da bei den angenommenen Laststellungen

$$\text{für } l = 40 \qquad \sum_0^l P = 99, \quad \sum_0^x P = 51 \text{ bis } 57,$$

$$l = 20 \qquad \sum_0^l P = 55, \quad \sum_0^x P = 28 \text{ „ } 34,$$

also beidemal $\frac{1}{2}\sum_0^l P$ von $\sum_0^x P$ schon vor $x = \frac{l}{2}$ überschritten ist, so bringen wir das letzte Rad vor dem in Fig. 24 bezeichneten O über x und erhalten für $l = 40$

$$\sum_x^l P(l-a) = 6\,(20 + 18{,}7 + 17{,}4 + 9 + 7{,}7 + 6{,}4) + 4\,(16{,}2 + 5{,}2) + 5\,(13{,}2 + 2{,}2) = 638,$$

$$\sum_0^x Pa = 6\,(16 + 14{,}7 + 13{,}4 + 5 + 3{,}7 + 2{,}4) + 4\,(12{,}2 + 1{,}2) + 5\,.\,9{,}2 = 430,$$

$$2m_x = 430 + 638 = 1068, \qquad p = \frac{4\,.\,1068}{1600} = 2{,}67,$$

$$\sum_0^l P = 6\,.\,12 + 4\,.\,4 + 5\,.\,3 = 103, \quad \sum_0^x P = 49 \text{ bis } 55,$$

und für $l = 20$

$$\sum_x^l P(l-a) = 6\,(10 + 8{,}7 + 7{,}4) + 4\,.\,6{,}2 + 5\,.\,3{,}2 = 197{,}4,$$

$$\sum_0^x Pa = 6\,(6 + 4{,}7 + 3{,}4) + 4\,.\,2{,}2 = 93{,}4,$$

$$2m_x = 93{,}4 + 197{,}4 = 291, \qquad p = \frac{4\,.\,291}{400} = 2{,}91,$$

$$\sum_0^l P = 6\,.\,6 + 4\,.\,2 + 5 = 49, \quad \sum_0^x P = 22 \text{ bis } 28.$$

Wir haben also jetzt mit veränderten Lastsystemen auf den Trägern die genauen Bedingungen für max M_x erfüllt, dabei aber an Stelle

von $p = 2{,}65$ und 2,84 die nur wenig abweichenden $p = 2{,}67$ und 2,91 erhalten. Die Neuberechnung hätte füglich unterbleiben können. Wir stellen nun die wie oben berechneten p für Spannweiten l von 1 bis 50 m in einer Tabelle zusammen.

Lastäquivalente p für max M_x (Lastzug I).

l	0	10	20	30	40 m
1	12,00	3,19	2,82	2,72	2,65
2	6,00	3,14	2,80	2,69	2,64
3	5,07	3,07	2,79	2,68	2,64
4	5,10	3,03	2,77	2,67	2,63
5	4,70	2,99	2,77	2,66	2,63
6	4,49	2,94	2,77	2,66	2,63
7	4,20	2,92	2,77	2,66	2,63
8	3,90	2,89	2,77	2,66	2,63
9	3,62	2,87	2,76	2,66	2,63
10 m	3,38	2,84	2,75	2,65	2,63

Bemerkungen. Zu beachten ist, dass alle berechneten p den Radlasten auf einer Schiene entsprechen, die p per Geleise also doppelt so gross sind.

Wir haben die p nach den Formeln für direct wirkende Verkehrslast berechnet. Dem am Schlusse der Aufgabe 7 hervorgehobenen Satze zufolge gelten jedoch dieselben Werthe auch für die Knotenpunkte solcher Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern, bei welchen die Verkehrslast zunächst auf Zwischenträger wirkt.

Den in Beispiel 6 besprochenen Tabellen können bei grösseren Bahnbauten Tabellen der obigen Arten angeschlossen werden, wenn man nach Formeln für gleichmässig vertheilte Lasten mit gleicher Genauigkeit wie mit bewegten Radlastzügen rechnen will. Uebrigens gestaltet sich letzteres Verfahren bei Vorhandensein einer Tabelle der in Beispiel 6 vorgeführten Art mindestens ebenso einfach als ersteres.

Beispiel 9. Gewöhnliche Balkenträger. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Für eine eingeleisige Eisenbahnbrücke von $l = 12$ m Spannweite, deren Hauptträger direct befahrene gewöhnliche Balkenträger sind,

werden Eigengewicht und Verkehrslast als gleichmässig vertheilt auf die ergriffenen Strecken angenommen. Die Grenzwerthe der Momente M_x und Vertikalkräfte V_x unter folgenden Voraussetzungen zu berechnen: Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}7$ tn, Verkehrslast für die max M_x $p = 3{,}3$ tn, die Lastäquivalente zur Berechnung der max V_x sind aus der Tabelle in Beispiel 8 zu entnehmen.

Momente. Nach A. 11, 2) und A. 7, 7) hat man mit $q = g + p$

(1) $$\max M_x = \frac{q}{2}\, x\,(l - x) = \frac{q}{g}\, \mathfrak{M}_x,$$

also im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned}
\text{für } x &= 1 & \max M_x &= 2\,.\,1\,.\,11 = 22 \text{ mtn},\\
x &= 2 & M_x &= 2\,.\,2\,.\,10 = 40\\
x &= 3 & M_x &= 2\,.\,3\,.\,9 = 54\\
x &= 4 & M_x &= 2\,.\,4\,.\,8 = 64\\
x &= 5 & M_x &= 2\,.\,5\,.\,7 = 70\\
x &= 6 & M_x &= 2\,.\,6\,.\,6 = 72.
\end{aligned}$$

Damit sind nach A. 11, 5) auch die max M_x der zweiten Trägerhälfte bekannt, die min $M_x = \mathfrak{M}_x$ sind sämmtlich $\frac{g}{p} = \frac{7}{40}$ so gross.

Verticalkräfte. Nach A. 11, 3) und A. 7, 7) haben wir

(2) $$\text{pos}\max V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{p}{2\,l}(l - x)^2 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{V}_x = g\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

woraus im vorliegenden Falle

für $x = 0$ mit $p = 3{,}57$

$$\text{pos}\max V_x = 0{,}7\,.\,6 + 3{,}57\,\frac{144}{24} = 25{,}62 \text{ tn } (24{,}00),$$

für $x = 1$ mit $p = 3{,}70$

$$\text{pos}\max V_x = 0{,}7\,.\,5 + 3{,}70\,\frac{121}{24} = 22{,}15 \text{ tn } (20{,}14),$$

für $x = 2$ mit $p = 3{,}95$

$$\text{pos}\max V_x = 0{,}7\,.\,4 + 3{,}95\,\frac{100}{24} = 19{,}26 \text{ tn } (16{,}55),$$

für $x = 3$ mit $p = 4{,}21$

$$\text{pos}\max V_x = 0{,}7\,.\,3 + 4{,}21\,\frac{81}{24} = 16{,}31 \text{ tn } (13{,}24),$$

für $x = 4$ mit $p = 4{,}48$

$$\text{pos}\max V_x = 0{,}7\,.\,2 + 4{,}48\,\frac{64}{24} = 13{,}35 \text{ tn } (10{,}20),$$

für $x = 5$ mit $p = 4{,}75$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 1 + 4{,}75 \frac{49}{24} = 10{,}40 \text{ tn } (7{,}44),$$

für $x = 6$ mit $p = 5{,}19$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 0 + 5{,}19 \frac{36}{24} = 7{,}78 \text{ tn } (4{,}95),$$

für $x = 7$ mit $p = 5{,}71$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 1 + 5{,}71 \frac{25}{24} = 5{,}25 \text{ tn } (2{,}73),$$

für $x = 8$ mit $p = 6{,}17$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 2 + 6{,}17 \frac{16}{24} = 2{,}71 \text{ tn } (0{,}80),$$

für $x = 9$ mit $p = 6{,}80$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 3 + 6{,}80 \frac{9}{24} = -0{,}45 \text{ tn } (-0{,}86),$$

für $x = 10$ mit $p = 8{,}10$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 4 + 8{,}10 \frac{4}{24} = -1{,}45 \text{ tn } (-2{,}25),$$

für $x = 11$ mit $p = 12{,}00$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 5 + 12{,}00 \frac{1}{24} = -3{,}00 \text{ tn } (-3{,}36),$$

für $x = 12$ mit $p = \infty$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 \,.\, 6 + \infty \cdot \frac{0^2}{24} = -4{,}20 \text{ tn } (-4{,}20).$$

Die neg max V_x sind damit nach A. 11, 5) ebenfalls bestimmt und als Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man

$$\max V = 25{,}62 \text{ tn } (24{,}00), \quad \min V = \mathfrak{B} = 4{,}20 \text{ tn } (4{,}20).$$

Allen berechneten V, V_x sind diejenigen Werthe in Klammer beigesetzt, welche sich ergeben hätten, wenn p constant wie für die max M_x gewählt worden wäre. Das angewandte Verfahren liefert dieselben V, V_x wie die Berechnung für die wirklichen Lastzüge.

Aufgabe 12. Gewöhnliche Balkenträger mit Zwischenträgern. Einfachste Berechnung.

Für den in Aufgabe 7 behandelten Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern ein möglichst einfaches Verfahren zur Bestimmung der Grenzwerthe von M_x, V_x unter der Voraussetzung anzugeben, dass die bewegte Last zunächst auf ein System von Zwischenträgern kommt.

Nach Aufgabe 7 kann die Berechnung der Grenzwerthe von M_x und V_x für diejenigen Schnitte x, welche mit Knotenpunkten zu-

sammenfallen, genau so vorgenommen werden, als ob gar keine Zwischenträger vorhanden wären. Damit erhalten wir eine Anzahl Punkte der Curven der max M_x und der positiven und negativen max V_x, während min $M_x = \mathfrak{M}_x$ für alle Schnitte in Aufgabe 7 bestimmt ist. Es fragt sich also nur noch, wie die erwähnten Curven zwischen den Knotenpunkten verlaufen. Führt man die Untersuchung durch (Aufgaben 13, 14, Beispiele 10, 11), so zeigt sich, dass die genauen Curven wie in Fig. 26, 27 strichpunktirt nach Innen gekrümmt sind. Nur in den Endfeldern verläuft die Curve der max M_x nahezu geradlinig. Es folgt hiernach zur Berechnung der Grenzwerthe von M_x und V_x folgendes einfache Verfahren:

a) Berechnung der max M_x und der positiven wie negativen max V_x für die Knotenpunkte, ganz als wenn die bewegten Lasten direct auf die Hauptträger wirkten;

b) Herstellung der Curven jener Grössen durch Auftragen der erhaltenen Werthe als Ordinaten bei ihren x und Verbinden je zweier aufeinanderfolgender Endpunkte durch gerade Linien (Fig. 26, 27).

Anstatt Curven der max M_x und max V_x zu verzeichnen, kann man natürlich auch diese Grenzwerthe für beliebige Zwischenpunkte durch Interpolation finden, womit die Veränderlichkeit ebenfalls geraden Linien entsprechend angenommen wird. — Das Verfahren gilt sowohl für bewegte Radlastzüge wie für gleichmässig vertheilte bewegte Last. Man erhält damit die Grenzwerthe für die Knotenpunkte genau, für die übrigen x im Allgemeinen etwas zu ungünstig, aber genauer als wenn gar keine Rücksicht auf die Zwischenträger genommen wird. Für letzteren Fall ist die Curve der max M_x in Fig. 26 punktirt angedeutet, während die entsprechenden Curven der max V_x in Fig. 27 von den wie oben durch gerade Linien hergestellten kaum zu unterscheiden waren. Da überdies die Berechnung nach dem obigen Verfahren kürzer als für direct wirkende Verkehrslast ist (weil man die Grenzwerthe für weniger x braucht), so hat man jedenfalls keinen Grund, die Zwischenträger unberücksichtigt zu lassen.

Das absolute Maximalmoment max M_m tritt stets unter dem der Trägermitte zunächst liegenden Knotenpunkte ein (nur eine praktisch nicht vorkommende Vertheilung der festen Last könnte Ausnahmen bedingen) und kann also wie jedes max M_x bei einem Knotenpunkte auch allein bestimmt werden. Dass die absolut grössten max V_x bei den Stützen eintreten, ist bereits bekannt. Mit den Grenzwerthen von $V_0 = V$ und $V_l = - V'$ haben wir auch diejenigen der Stützenreactionen.

Aufgabe 13. Gewöhnliche Balkenträger mit Zwischenträgern. Genaueste Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Für den in Aufgabe 7 behandelten Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern sind die Grenzwerthe von M_x und V_x bei verschiedenen möglichen Radlastsystemen unter der Voraussetzung abzuleiten, dass die Letzteren zunächst auf Zwischenträger kommen.

Nach A. 7, 5) 6) haben wir für jeden Schnitt x bei beliebiger Belastung

$$(1)\qquad M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l}\sum_0^c Pa + c\,\frac{v-x}{v-c}\sum_c^v P + \left(\frac{x-c}{v-c} - \frac{x}{l}\right)\sum_c^v Pa + \frac{x}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

$$(2)\qquad V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l}\sum_0^c Pa - \frac{c}{v-c}\sum_c^v P + \left(\frac{1}{v-c} - \frac{1}{l}\right)\sum_c^v Pa + \frac{1}{l}\sum_v^l P(l-a).$$

Hierin bedeuten c, v die Abscissen derjenigen Knotenpunkte, bei welchen der von Schnitt x getroffene Fahrbahnträger aufliegt. Die Beiträge $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{V}_x$ der festen Last sind in Aufgabe 7 für alle Fälle gegeben.

Bewegt sich nun ein beliebiges Radlastsystem auf dem Träger, so ändern sich mit jeder unendlich kleinen Verrückung die Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ aller Lasten $P_1, P_2, \ldots$ desselben um das gleiche da, wir erhalten nach der Anleitung in § 6

$$(3)\qquad \frac{dM_x}{da} = \sum_0^c P + \frac{x-c}{v-c}\sum_c^v P - \frac{x}{l}\sum_0^l P,$$

$$(4)\qquad \frac{dV_x}{da} = \frac{1}{v-c}\sum_c^v P - \frac{1}{l}\sum_0^l P$$

und hiernach die Bedingung für max M_x

$$(5)\qquad \sum_0^c P + \frac{x-c}{v-c}\sum_c^v P = \frac{x}{l}\sum_0^l P,$$

sowie die Bedingung für positive und negative max V_x

$$(6)\qquad \sum_c^v P = \frac{v-c}{l}\sum_0^l P.$$

Es treten also jetzt, abweichend vom Falle direct wirkender Verkehrslast, auch mathematische Maxima und Minima von V_x ein. Für die Knotenpunkte gehen mit $c = v = x$ alle Gleichungen in die entsprechenden, ohne Zwischenträger gültigen über.

Handelt es sich nun darum, die Grenzwerthe von M_x, V_x bei verschiedenen möglichen Lastsystemen festzustellen, so entnimmt man aus 1) 2) oder dem Verlaufe der Influenzlinien Fig. 14, 15, dass alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu M_x beitragen, während für V_x die Lasten von 0 bis z negative, diejenigen von z bis l positive Beiträge liefern, wobei z zwischen c und v liegt und nach A. 7, 6) berechnet werden könnte. Die Beiträge der einzelnen Lasten sind proportional den Letzteren und für bestimmte P am grössten: hinsichtlich M_x bei c oder v (bei v für $z < 0$, bei c für $z > l$), hinsichtlich V_x auf der negativen Beitragsstrecke bei c, auf der positiven Beitragsstrecke bei v. Wir gelangen so zu folgenden Verfahren zur Bestimmung der Grenzwerthe.

Momente. Ein Lastzug I, welcher möglichst grosse Lasten möglichst dicht um ein Rad O enthält, wird in solcher Richtung auf den Träger gebracht, dass mit O über x die ungünstigste Zugseite von O aus auf die längste Trägerstrecke von x aus käme. Dann finden sich die ungünstigsten Laststellungen und entsprechenden max M_x für die Knotenpunkte nach A. 9, 5) 1), für beliebige andre x nach obigen Formeln 5) 1). Der zweite Grenzwerth ist

$$\min M_x = \mathfrak{M}_x\,.$$

In dem gewöhnlichen Falle, dass die Anordnung des Trägers zur Mitte symmetrisch ist, braucht man wegen

$$\max M_x = \max M_{l-x}, \qquad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{l-x}$$

nur die Momente einer Trägerhälfte zu berechnen.

Verticalkräfte. Ein Lastsystem II, welches möglichst grosse Lasten möglichst dicht beim Vorderrad O enthält, fährt in der Richtung von l nach 0 auf den Träger. Für die Knotenpunkte x ergibt sich, wenn das Vorderrad O bei bei x steht, pos max V_x nach A. 9, 7); für zwischenliegende x bringt man Rad O vorläufig bis v, findet die genaue Stellung für pos max V_x nach 6) und diesen Werth selbst nach 2). — Fährt dasselbe Lastsystem in der Richtung von l nach 0 hin, so folgt neg max V_x für die Knotenpunkte, wenn das Vorderrad O bei x anlangt, aus A. 9, 8), und für zwischenliegende x, wenn man vorläufig Rad O bei c annimmt und die genaue Stellung mit-

telst 6) bestimmt, nach obiger Gleichung 2). — Ist die Anordnung des Trägers zur Mitte symmetrisch, so braucht man wegen

(8) $\text{neg max } V_x = -\text{pos max } V_{l-x}, \qquad \mathfrak{B}_x = -\mathfrak{B}_{l-x}$

nur die pos max V_x zu berechnen.

Beispiel 10. Gewöhnliche Balkenträger mit Zwischenträgern. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Grenzwerthe der M_x und V_x für die in Beispiel 4 betrachteten Brückenträger zu bestimmen, wenn das dort angenommene Lastsystem nicht direct auf die Hauptträger wirkt und die Querträger in Entfernungen von 2 m auf einander folgen. Eigengewicht der Hauptträger per Längeneinheit $h = 0,3$ tn, Eigengewicht der Zwischenträger per Knotenpunkt $G = 2 \,.\, 0,3 = 0,6$ tn.

Einfachstes Verfahren. Zu A. 12. Für die Knotenpunkte erhalten wir die Grenzwerthe M_x und V_x ganz wie in Beispiel 4. Man hat also

bei $x = 2$ $\quad M_x = 4,8$ mtn, $\quad$ max $M_x = 33,48$ mtn,
„ $x = 4$ $\quad M_x = 7,2$ „ $\quad$ „ $M_x = 49,20$ „

und ferner bei

$x =$	0	2	4	6	8	10 m:
$\mathfrak{B}_x =$	3,0	1,8	0,6	— 0,6	— 1,8	— 3,0 tn,
pos max $V_x =$	22,74	16,14	9,94	4,34	— 0,18	— 3,00 tn.

Hiernach können die Curven der max M_x und der positiven und negativen max V_x nach der Anleitung in Aufgabe 12 verzeichnet werden, wie dies in Fig. 26 und 27 geschehen ist. Wollte man die Grenzwerthe für beliebige Querschnitte berechnen, so würde beispielsweise für $x = 3$ m

$$\text{max } M_x = \frac{1}{2}(33,48 + 49,20) = 41,34 \text{ mtn},$$

$$\text{pos max } V_x = \frac{1}{2}(16,14 + \ \ 9,94) = 13,04 \text{ tn}.$$

Das beim Befahren entstehende absolute Maximalmoment tritt als max $M_m = 49,20$ bei $m = 4$ ein, die grösste vorkommende Verticalkraft und Stützenreaction ist max V_0 = max $V = 22,74$ tn.

Genauestes Verfahren. Zu A. 13. Für die Knotenpunkte bleiben die vorstehenden Resultate gültig. Es sollen nun die verlangten Grenzwerthe noch für je einen Schnitt in der Mitte zwischen zwei Querträgern berechnet werden.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Momente und Verticalkräfte für beliebige x sind nach A. 7, 9)

$$(1) \quad M_x = 0{,}15x(l-x) + \frac{l-x}{10}\sum_0^x Ge + \frac{x}{10}\sum_x^l G(l-e),$$

$$(2) \quad V_x = 0{,}3\,(5-x) - \frac{1}{10}\sum_0^x Ge + \frac{1}{l}\sum_x^l G(l-e).$$

Es folgen daraus

für $x = 1$

$$\mathfrak{M}_x = 0{,}15\,.\,1\,.\,9 + 0{,}06\,(8+6+4+2) = 2{,}55 \text{ mtn},$$

für $x = 3$

$$\mathfrak{M}_x = 0{,}15\,.\,3\,.\,7 + 0{,}06\,.\,7\,.\,2 + 0{,}06\,.\,3\,(6+4+2) = 6{,}15 \text{ mtn},$$

für $x = 5$

$$\mathfrak{M}_x = 0{,}15\,.\,5\,.\,5 + 0{,}06\,.\,5\,(2+4+4+2) = 7{,}35 \text{ mtn},$$

und ferner

für $x = 1$ $\quad \mathfrak{V}_x = 0{,}3\,.\,4 + 0{,}06\,(8+6+4+2) = 2{,}4$ tn,

„ $x = 3$ $\quad \mathfrak{V}_x = 0{,}3\,.\,2 + 0{,}06\,(6+4+2-2) = 1{,}2$ tn,

„ $x = 5$ $\quad \mathfrak{V}_x = 0{,}3\,.\,0 + 0{,}06\,(4+2-2-4) = 0$,

womit für $x = 7$ und 9 die $\mathfrak{V}_x = -1{,}2$ und $-2{,}4$ tn werden.

Für die Schnitte in der Mitte zwischen zwei Querträgern hat man nach A. 13, 1) 2) bei beliebiger Belastung

$$(3) \quad M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l}\sum_0^c Pa + \frac{c}{2}\sum_c^v P + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{10}\right)\sum_c^v Pa$$
$$+ \frac{x}{10}\sum_v^l P(l-a),$$

$$(4) \quad V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{10}\sum_0^c Pa - \frac{c}{2}\sum_c^v Pa + \frac{2}{5}\sum_c^v Pa$$
$$+ \frac{1}{10}\sum_v^l P(l-a).$$

Die Bedingung für Maxima dieser M_x ist nach A. 13, 5)

$$(5) \quad \sum_0^c P + \frac{1}{2}\sum_c^v P = \frac{x}{10}\sum_0^l P,$$

und die Bedingung für positive und negative max V_x nach A. 13, 6)

$$(6) \quad \sum_c^v P = \frac{1}{5}\sum_0^l P.$$

Zur Berechnung der max M_x lassen wir wie in Beispiel 4 eine vollständige Locomotive mit dem Schlote vorn von l nach 0 hin auf die Brücke fahren, womit $\sum_0^l P = 27$ tn, $\frac{x}{10}\sum_0^l P = 2{,}7x$. Für $x = 1$ ist $2{,}7x = 2{,}7$. Dieser Werth wird von dem Aggregat in 5) durchschritten, wenn P_1 bei $v = 2$ ankommt, indem dasselbe dann von 0 bis $\frac{1}{2}\,6 = 3$ anwächst; wir erhalten

$$\max M_x = 2{,}55 + \frac{1}{10}(6\,.\,8 + 6\,.\,6{,}7 + 6\,.\,5{,}4 + 4\,.\,4{,}2 + 5\,.\,1{,}2) = 16{,}89 \text{ mtn}.$$

Für $x = 3$ ist $2{,}7x = 8{,}1$, welchen Werth das Aggregat in 5) durchschreitet, wenn P_1 bei $c = 2$ eintrifft, womit dasselbe von $\frac{1}{2}(6 + 6) = 6$ bis $6 + \frac{1}{2}\,6$ wächst; es folgt

$$\max M_x = 6{,}15 + \frac{7}{10}\,6\,.\,2 + 1\,.\,6 + \frac{2}{5}\,6\,.\,3{,}33 + \frac{3}{10}(6\,.\,5{,}4 + 4\,.\,4{,}2 + 5\,.\,1{,}2) = 41{,}07 \text{ mtn}.$$

Für $x = 5$ ist $2{,}7x = 13{,}5$. Die Bedingung 5) wird erfüllt, wenn P_2 bei $c = 4$ anlangt, da der Werth des Aggregats dann von $6 + \frac{1}{2}(6 + 6) = 12$ auf $2\,.\,6 + \frac{1}{2}\,6 = 15$ steigt; man erhält

$$\max M_x = 7{,}35 + \frac{1}{2}\,6\,(2{,}7 + 4) + 2\,.\,6 + 0 + \frac{1}{2}(4\,.\,3{,}5 + 5\,.\,0{,}5) = 47{,}70 \text{ mtn}.$$

Die positiven max V_x bei $x = 1, 3, 5, 7, 9$ treten ein, wenn die angenommene Locomotive in gleicher Fahrrichtung wie oben mit dem Vorderrad P_1 den von x gegen l hin zunächst folgenden Querträger passirt, da der Werth von $\sum_c^v P$ dann von 0 auf 6 steigt und Bedingung 6) erfüllt wird. Wir erhalten für $x = 1$ mit P_1 bei $v = 2$

$$\text{pos}\max V_x = 2{,}4 + \frac{1}{10}[6(8 + 6{,}7 + 5{,}4) + 4\,.\,4{,}2 + 5\,.\,1{,}2] = 16{,}74 \text{ tn},$$

für $x = 3$ mit P_1 bei $v = 4$

$$\text{pos}\max V_x = 1{,}2 + \frac{1}{10}[6\,(6 + 4{,}7 + 3{,}4) + 4\,.\,2{,}2] = 10{,}54 \text{ tn},$$

für $x = 5$ mit P_1 bei $v = 6$

$$\text{pos}\max V_x = 0 + \frac{1}{10}[6\,(4 + 2{,}7 + 1{,}4) + 4\,.\,0{,}2] = 4{,}94 \text{ tn},$$

für $x = 7$ mit P_1 bei $v = 8$

$$\text{pos max } V_x = -1{,}2 + \frac{6}{10}(2 + 0{,}7) = 0{,}42 \text{ tn},$$

für $x = 9$ mit P_1 bei $v = 10$

$$\text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x = -2{,}4 \text{ tn}.$$

In analoger Weise wie hier geschehen könnten die Grenzwerthe der M_x und V_x für alle beliebigen Schnitte x berechnet werden. Auf Grund der erhaltenen Werthe wurden die in Fig. 26, 27 strichpunktirten Curven der max M_x und max V_x aufgetragen. Die punktirten Curven entsprechen dem Falle, dass gar keine Rücksicht auf das Vorhandensein der Zwischenträger genommen, also wie in Beispiel 4 gerechnet wird.

Aufgabe 14. Gewöhnliche Balkenträger mit Zwischenträgern. Genaueste Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für den in Aufgabe 4 behandelten Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern unter Voraussetzung gleichmässig vertheilter bewegter Last, welche durch Zwischenträger übertragen wird, die genauen Ausdrücke für die Grenzwerthe von M_x und V_x zu bestimmen.

a) Nach A. 7, 2) oder der Influenzlinie Fig. 14 wissen wir, dass die Grenzwerthe von M_x für Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein eintreten. Für ersteren Fall liefert die Verkehrslast nach § 10, 5), wenn p sich auf die Längeneinheit Träger bezieht,

$$S = cv\,\frac{p}{2}, \qquad S' = (l - c)\,(l - v)\,\frac{p}{2},$$

wir erhalten aus A. 7, 2)

$$(1) \quad \max M_x = \mathfrak{M}_x + [x(l - c - v) + cv]\,\frac{p}{2}, \quad \min M_x = \mathfrak{M}_x.$$

Die Grenzwerthe von V_x entstehen nach A. 7, 2) oder der Influenzlinie Fig. 15, wenn die Verkehrslast das einemal von z bis l, das anderemal von 0 bis z reicht, wobei z durch A. 7, 6) bestimmt ist. Sie ergeben sich entweder aus A. 7, 6), wenn auf den betreffenden Strecken $P = p\,da$ gesetzt und integrirt wird, oder mittelst der Influenzlinie Fig. 15. Schlagen wir den letzteren Weg ein, so folgen zunächst

$$\text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x + vv_1\,\frac{l - z}{2}\,p, \quad \text{neg max } V_x = \mathfrak{V}_x + cc_1\,\frac{z}{2}\,p,$$

und wegen $vv_1 = \frac{l - v}{l}$, $cc_1 = -\frac{c}{l}$

pos max $V_x = \mathfrak{V}_x + (l - v)(l - z)\frac{p}{2l}$, neg max $V_x = \mathfrak{V}_x - cz\frac{p}{2l}$,
oder nach Einsetzen von z aus A. 7, 6)

$$(2)\quad \begin{cases} \text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x + \dfrac{(l-v)^2}{l+c-v}\,\dfrac{p}{2}, \\ \text{neg max } V_x = \mathfrak{V}_x - \dfrac{c^2}{l+c-v}\,\dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

Für die Knotenpunkte gehen die Gleichungen 1) 2) mit $c = v = x$ in die ohne Vorhandensein von Zwischenträgern gültigen A. 11, 2) 3) über. Bei zur Mitte symmetrischer Anordnung des Trägers hat man

$$(3)\quad \max M_x = \max M_{l-x}, \qquad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{l-x},$$

$$(4)\quad \text{neg max } V_x = -\text{ pos max } V_{l-x}, \qquad \mathfrak{V}_x = -\mathfrak{V}_{l-x},$$

sodass dann nur die Grenzwerthe der M_x für eine Trägerhälfte und die positiven max V_x berechnet zu werden brauchen. Die Beiträge $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{V}_x$ der festen Last sind für alle Fälle in Aufgabe 7 bestimmt.

Als Näherungsformeln für die Grenzwerthe von V_x ergeben sich, wenn in den Ausdrücken über 2) an Stelle von z bezw. c und v gesetzt werden,

$$(5)\quad \begin{cases} \text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x + (l-c)(l-v)\dfrac{p}{2l}, \\ \text{neg max } V_x = \mathfrak{V}_x - cv\dfrac{p}{2l}. \end{cases}$$

Sie liefern die Grenzwerthe für die Knotenpunkte genau, für die Zwischenpunkte zu ungünstig, nämlich so, wie sie sich bei Berechnung mittelst vorausbestimmter Knotenpunktslasten $K = p\lambda$ ergeben. Das im Anschluss an 4) Gesagte bleibt gültig.

Beispiel 11. Gewöhnliche Balkenträger mit Zwischenträgern. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Für die in Beispiel 9 behandelten Brückenträger die Grenzwerthe der M_x und V_x unter der Voraussetzung zu berechnen, dass die bewegte Last nicht direct auf die Hauptträger wirkt und die Querträger in Abständen von 2 m liegen. Eigengewicht der Hauptträger per Längeneinheit $h = 0{,}4$ tn, Eigengewicht der Zwischenträger per Knotenpunkt $G = 2 \,.\, 0{,}3 = 0{,}6$ tn. Die Verkehrslast ist wie in Beispiel 9 anzunehmen.

Einfachstes Verfahren. Zu A. 12. Für die Knotenpunkte erhalten wir ganz wie in Beispiel 9

$$\text{bei } x = \quad 2 \qquad 4 \qquad 6 \text{ m:}$$

$$\frac{40}{7}\mathfrak{M}_x = \max M_x = \quad 40 \qquad 64 \qquad 72 \text{ mtn},$$

sowie ferner bei

$x =$	0	2	4	6	8	10	12	m:
$\mathfrak{V}_x =$	4,2	2,8	1,4	0	− 1,4	− 2,8	− 4,2	tn,
pos max $V_x =$	25,62	19,26	13,35	7,78	2,71	− 1,45	− 4,20	tn.

Hiernach können die Curve der max M_x und beide Curven der max V_x nach Anleitung von Aufgabe 12 verzeichnet werden. Auch lassen sich die entsprechenden Grenzwerthe für beliebige x durch Rechnung erhalten. Beispielsweise hat man

für $x = 2{,}5$ m $\qquad \max M_x = 40 + \frac{1}{4}(64 - 40) = 46$ mtn,

$$\text{pos}\max V_x = 19{,}26 - \frac{1}{4}(19{,}26 - 13{,}35) = 17{,}78 \text{ tn}.$$

Das absolute Maximalmoment tritt als $\max M_m = 72$ mtn bei der Trägermitte ein, die grösste vorkommende Verticalkraft und Stützenreaction sind $\max V_0 = \max V = 25{,}62$ tn.

Genauestes Verfahren. Zu A. 14. Für die Knotenpunkte bleiben obige Resultate gültig. Es sollen die Grenzwerthe noch für je einen Schnitt in der Mitte zwischen zwei Querträgern abgeleitet werden.

Für beliebige Querschnitte hat man nach A. 7, 9) als Beiträge der festen Last

$$(1) \qquad \mathfrak{M}_x = 0{,}2x(l - x) + \frac{l - x}{12}\sum_0^x Ge + \frac{x}{12}\sum_x^l G(l - e),$$

$$(2) \qquad \mathfrak{V}_x = 0{,}4\,(6 - x) - \frac{1}{12}\sum_0^x Ge + \frac{1}{12}\sum_x^l G(l - e),$$

woraus

für $x = 1 \quad \mathfrak{M}_x = 0{,}2 . 1 . 11 + \frac{1}{20}(10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 3{,}7$ mtn,

$x = 3 \quad \mathfrak{M}_x = 0{,}2 . 3 .\ 9 + \frac{9}{20}2 + \frac{3}{20}(8 + 6 + 4 + 2) = 9{,}3,$

$x = 5 \quad \mathfrak{M}_x = 0{,}2 . 5 .\ 7 + \frac{7}{20}(2 + 4) + \frac{5}{20}(6 + 4 + 2) = 12{,}1,$

und ferner

für $x = 1 \quad \mathfrak{V}_x = 0{,}4 . 5 + \frac{1}{20}(10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 3{,}5$ tn,

$x = 3 \quad \mathfrak{V}_x = 0{,}4 . 3 + \frac{1}{20}(\ 8 + 6 + 4 + 2 - 2) = 2{,}1,$

für $x = 5$ $\mathfrak{B}_x = 0{,}4 \,.\, 1 + \frac{1}{20}(6 + 4 + 2 - 2 - 4) = 0{,}7,$

womit für $x = 7, 9, 11$ die $\mathfrak{B}_x = -0{,}7, \ -2{,}1, \ -3{,}5$ werden.

Setzen wir zur Berechnung der max M_x für unsern Träger $p = 3{,}3$ wie in Beispiel 9, so folgt nach A. 14, 1) für beliebige x

$$\text{(3)} \qquad \max M_x = M_x + 1{,}65\,[x(l - c - v) + cv]$$

und speziell

für $x = 1$ max $M_x = 3{,}7 + 1{,}65\,(1 \,.\, 10 + 0 \,.\, 2) = 20{,}2$ mtn,
$x = 3$ $M_x = 9{,}3 + 1{,}65\,(3 \,.\, 6 + 2 \,.\, 4) = 48{,}9,$
$x = 5$ $M_x = 12{,}1 + 1{,}65\,(5 \,.\, 2 + 4 \,.\, 6) = 68{,}2.$

Zur Berechnung der max V_x nach A. 14, 2) sind geeignete p zu wählen. Da das vorgeführte Verfahren nur in Betracht käme, wenn das obige einfachere nicht genügend erachtet würde oder controlirt werden sollte, so muss man möglichst genau rechnen. In Beispiel 10 zeigte sich, dass die pos max V_x für Schnitte mitten zwischen zwei Querträgern gewöhnlich eintreten, wenn Zug II von l nach 0 fahrend mit Vorderrad O bei v anlangt. Daher folgt aus A. 13, 2) und A. 14, 2) als Bedingung für die entsprechenden p

$$\frac{1}{l}\sum_v^l P(l - a) = \frac{(l - v)^2}{l + c - v}\,\frac{p}{2},$$

woraus, wenn p_v den Werth von p zur Berechnung von pos max V_x bei $x = v$ bedeutet, nach A. 11, 9) 11) und A. 14, 2)

$$\text{(4)} \qquad p = \frac{l + c - v}{l}\,p_v, \quad \text{pos max } V_x = \mathfrak{B}_x + \frac{p_v}{2l}(l - v)^2.$$

Wir erhalten nun mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 7

für $x = 1$ mit $p_v = 3{,}95$ pos max $V_x = 3{,}5 + 3{,}95\,\frac{100}{24} = 19{,}96$ tn,
$x = 3$ $p_v = 4{,}48$ $V_x = 2{,}1 + 4{,}48\,\frac{64}{24} = 15{,}45,$
$x = 5$ $p_v = 5{,}19$ $V_x = 0{,}7 + 5{,}19\,\frac{36}{24} = 8{,}49,$
$x = 7$ $p_v = 6{,}17$ $V_x = -0{,}7 + 6{,}17\,\frac{16}{24} = 3{,}41,$
$x = 9$ $p_v = 8{,}10$ $V_x = -2{,}1 + 8{,}10\,\frac{4}{24} = -0{,}95,$
$x = 11$ $p_v = \infty$ $V_x = -3{,}5 + \infty\,\frac{0^2}{24} = -3{,}50.$

Bemerkungen. Die erste Formel A. 14, 2) lautet für unsern Fall

$$\text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{p}{20}(l-v)^2.$$

Hätten wir darin p wie ohne Zwischenträger bei x gesetzt (nach der Tabelle im Beispiel 7), so würden sich statt der vorstehenden Werthe der Reihe nach ergeben haben

$$22{,}00 \quad 15{,}57 \quad 9{,}25 \quad 3{,}87 \quad -0{,}74 \quad -3{,}5$$

und mit constantem $p = 3{,}3$ (wie für die max M_x),

$$20{,}00 \quad 12{,}66 \quad 6{,}64 \quad 1{,}94 \quad -1{,}44 \quad -3{,}5.$$

Bei dem oben angewandten Verfahren erhält man auch für die gewählten Zwischenpunkte genau dieselben max V_x wie mit den Radlastzügen. Beispielsweise liefert 4) für den in Beispiel 10 betrachteten Träger

bei $x = 1$	mit $p_v = 4{,}48$	pos max $V_x = 2{,}4 + 4{,}48\,\frac{64}{20} =$	16,74 tn,
$x = 3$	$p_v = 5{,}19$	$V_x = 1{,}2 + 5{,}19\,\frac{36}{20} =$	10,54,
$x = 5$	$p_v = 6{,}17$	$V_x = 0 + 6{,}17\,\frac{16}{20} =$	4,94,
$x = 7$	$p_v = 8{,}10$	$V_x = -1{,}2 + 8{,}1\,\frac{4}{20} =$	0,42,
$x = 9$	$p_v = \infty$	$V_x = -2{,}4 + \infty\,\frac{0^2}{20} =$	$-$ 2,40,

ganz wie in Beispiel 10 direct berechnet wurde.

Beispiel 12. Berechnung für vorausbestimmte Knotenpunktslasten.

Die Träger des Beispiels 11 für die dort angenommene Belastung durch Eigengewicht und Knotenpunktslasten durch Verkehrslast

$$K = p\lambda = 2p$$

zu berechnen.

Die vom Eigengewichte herrührenden Momente und Verticalkräfte $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{V}_x$ bleiben wie in Beispiel 11 bestimmt. Da nach A. 7, 4) allgemein

$$M_x = \mathfrak{M}_x + \frac{l-x}{l}\sum_0^x Kc + \frac{x}{l}\sum_x^l K(l-c), \tag{1}$$

$$V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l}\sum_0^x Kc + \frac{1}{l}\sum_x^l K(l-c), \tag{2}$$

so erhalten wir für Totalbelastung des ganzen Trägers max M_x nach 1), für Eigengewicht allein min $M_x = \mathfrak{M}_x$, dagegen

$$(3)\quad \begin{cases} \text{pos max } V_x = \mathfrak{V}_x + \frac{1}{l} \sum_x^l K(l-e), \\ \text{neg max } V_x = \mathfrak{V}_x - \frac{1}{l} \sum_0^x Ke. \end{cases}$$

Nach dem gewöhnlichen Verfahren würde man nun $K = 2p$ für alle Fälle constant setzen.

Für die Grenzwerthe der M_x und diejenigen der V_x in den Knotenpunkten ergeben sich mittelst vorstehender Gleichungen dieselben Resultate wie bei Berechnung mit denjenigen gleichmässig vertheilten Lasten p (constanten oder variabeln), auf Grund deren die K festgestellt wurden (§ 10, § 12d). Wir haben also, bei Beachtung von neg max $V_x = -$ pos max V_{l-x}, gegenüber den Ermittelungen in Beispiel 11 nur eine Neuberechnung der pos max V_x in den Zwischenpunkten vorzunehmen und erhalten bei Entnahme der p aus der Tabelle in Beispiel 7 für $x = 1$ mit $p = 3{,}70$

$$\text{pos max } V_x = 3{,}5 + \frac{3{,}70}{6}(10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 22{,}00 \text{ tn } (19{,}96),$$

für $x = 3$ mit $p = 4{,}21$

$$\text{pos max } V_x = 2{,}1 + \frac{4{,}21}{6}(8 + 6 + 4 + 2) = 16{,}13 \; (15{,}45),$$

für $x = 5$ mit $p = 4{,}75$

$$\text{pos max } V_x = 0{,}7 + \frac{4{,}75}{6}(6 + 4 + 2) = 10{,}20 \; (8{,}49),$$

für $x = 7$ mit $p = 5{,}71$

$$\text{pos max } V_x = -0{,}7 + \frac{5{,}71}{6}(4 + 2) = 5{,}01 \; (3{,}41),$$

für $x = 9$ mit $p = 6{,}80$

$$\text{pos max } V_x = -2{,}1 + \frac{6{,}80}{6}\,2 = 0{,}17 \; (-0{,}95),$$

für $x = 11$ mit $p = 12{,}00$

$$\text{pos max } V_x = -3{,}5 + \frac{12{,}00}{6}\,0 = -3{,}50 \; (-3{,}50).$$

Die Abweichungen dieser Resultate von den in Klammer beigesetzten genauern des Beispiels 11 rührt nur daher, dass die Berechnung mittelst vorausbestimmter Knotenpunktslasten einen plötzlichen Uebergang von total belasteten zu nur mit Eigengewicht belasteten Knotenpunkten annimmt.

Auf mindestens ebenso einfache Weise wie oben hätten wir dieselben Resultate aus der Näherungsformel A. 14, 5) für gleichmässig vertheilte bewegte Last

$$\text{(4)} \qquad \text{pos max } V_x = \mathfrak{B}_x + (l - c)(l - v)\frac{p}{2}$$

erhalten können. Sie liefert mit den obigen p

$$\text{für } x = 1 \text{ pos max } V_x = 3{,}5 + 12 \,.\, 10\,\frac{3{,}70}{24} = 22{,}00 \text{ tn},$$

$$x = 3 \qquad V_x = 2{,}1 + 10 \,.\, 8\,\frac{4{,}21}{24} = 16{,}13,$$

$$x = 5 \qquad V_x = 0{,}7 + 8 \,.\, 6\,\frac{4{,}75}{24} = 10{,}20,$$

$$x = 7 \qquad V_x = -0{,}7 + 6 \,.\, 4\,\frac{5{,}71}{24} = 5{,}01,$$

$$x = 9 \qquad V_x = -2{,}1 + 4 \,.\, 2\,\frac{6{,}80}{24} = -0{,}17,$$

$$x = 11 \qquad V_x = -3{,}5 + 2 \,.\, 0\,\frac{12{,}00}{24} = -3{,}50.$$

Dies letzte Verfahren ist umsomehr gerechtfertigt, als die verwendeten p auf Grund der Formeln für gleichmässig vertheilte bewegte Last erhalten wurden.

Aufgabe 15. Ueber Stützenreactionen von Trägern mit zwei Gelenkauflagern.

Für Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern und beliebige Träger mit ebensolchen in gleicher Höhe sind die Verticalreactionen der Stützen ausgedrückt

$$\text{(1)} \qquad V = \mathfrak{B} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l - a), \qquad V' = \mathfrak{B}' + \frac{1}{l}\sum_0^l Pa,$$

unter $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ die Beiträge des Eigengewichts allein verstanden, während P_1, P_2, ... Verkehrslasten bei a_1, a_2, ... bedeuten. Wenn nun die Verkehrslast durch Zwischenträger auf Knotenpunkte übertragen werden, zu welchen die Stützpunkte 0, l gehören und in

$$\text{(2)} \qquad V = A + K_0, \qquad V' = B + K_l$$

K_0, K_l die auf diese Stützpunkte direct wirkenden ganzen Knotenpunktslasten bezeichnen, zu bestimmen: a) die Ausdrücke der A, B für beliebige Belastung; b) die Influenzlinien von A, B, $A - B$ und $B - A$; c) die Grenzwerthe von A, B für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge.

Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Beiträge des Eigengewichts zu A, B und v, c die Abscissen der den Stützpunkten 0, l zunächst liegenden Knotenpunkte mit Verkehrslast, dann hat man nach 2)

$$A = \mathfrak{A} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) - \frac{1}{v}\sum_0^v P(v-a),$$

$$B = \mathfrak{B} + \frac{1}{l}\sum_0^l Pa - \frac{1}{l-c}\sum_c^l P(a-c),$$

oder auch

$$(3)\quad \begin{cases} A = \mathfrak{A} + \frac{1}{l}\left[\frac{l-v}{v}\sum_0^v Pa + \sum_v^l P(l-a)\right], \\ B = \mathfrak{B} + \frac{1}{l}\left[\sum_0^c Pa + \frac{c}{l-c}\sum_c^l P(l-a)\right]. \end{cases}$$

Die Abscissen v, c wie die Anzahl und Entfernung der belasteten Knotenpunkte können beliebig gross sein.

Nach 3) bestehen die Influenzlinien von A und B aus je zwei geraden Strecken, welche von den Stützpunkten ausgehend bei v und c zusammenstossen und daselbst die Ordinaten $\frac{l-v}{l}$ und $\frac{c}{l}$ erreichen; sie sind in Fig. 28 verzeichnet. Subtrahirt man die Ordinate der Influenzlinie für B von derjenigen für A bei gleicher Abscisse a, so entsteht die Influenzlinie für $A - B$ und in ganz analoger Weise diejenige von $B - A$. Beide Linien sind in Fig. 29 aufgetragen. — Uebrigens hätten wir die Influenzlinien von A, B auch ohne Rücksicht auf die Ausdrücke 3) erhalten können. Denn eine zunächst auf Zwischenträger kommende Last $P = 1$ erzeugt bei Stütze 0

$$\text{für } a = 0 \quad K_0 = 1, \qquad \text{für } a \gtreqless v \quad K_0 = 0.$$

Da nun die Influenzlinie zwischen zwei auf einander folgenden belasteten Knotenpunkten geradlinig verläuft und diejenige für V in Fig. 28 durch $l0_1$ dargestellt ist, so kommt man für $A = V - K_0$ auf $0v_1l$ und ganz analog für B auf $0c_1l$.

Um die Grenzwerthe von A, B für gleichmässig vertheilte bewegte Last zu erhalten, kann man entweder die Ausdrücke 2) oder die Formeln 3) oder die Influenzlinien verwenden. Sowohl letztere Gleichungen wie die Influenzlinien zeigen, dass die Grenzwerthe für Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein entstehen. Aus 2) erhalten wir für den ersteren Belastungsfall die Maximalwerthe

$$A = \mathfrak{A} + \frac{pl}{2} - \frac{pv}{2}, \qquad B = \mathfrak{B} + \frac{pl}{2} - \frac{p(l-c)}{2},$$

oder einfacher

(4) $$A = \mathfrak{A} + p\frac{l-v}{2}, \qquad B = \mathfrak{B} + p\frac{2l-c}{2},$$

während die Minimalwerthe $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$ sind. Die Letzteren bleiben auch für bewegte Radlastzüge gültig, dagegen berechnen sich für solche die oberen Grenzwerthe nach 3), wenn für A ein Lastzug I mit Rad O über v, für B der gleiche Lastzug mit Rad O über c steht. Da nach 3) für jede Verrückung eines bestimmten auf dem Träger befindlichen Lastsystems um da

(5) $$\begin{cases} dA = \frac{1}{l}\left[\frac{l}{v}\sum_0^v P - \sum_0^l P\right] da, \\ dB = \frac{1}{l}\left[\sum_0^l P - \frac{l}{l-c}\sum_c^l P\right] da, \end{cases}$$

so folgen die Bedingungen

(6) $$\begin{cases} \text{für Maxima von } A & \sum_0^v P = \frac{v}{l}\sum_0^l P, \\ \text{„ \quad „ \quad „ } B & \sum_c^l P = \frac{l-c}{l}\sum_0^l P, \end{cases}$$

welchen entsprechend die wie vorerwähnt angenommenen Laststellungen noch corrigirt werden könnten, was aber praktisch gewöhnlich überflüssig ist.

II. Abschnitt.

Ebene Fachwerke beliebiger Art.

Aufgabe 16. Statische Bestimmtheit und Stabilität räumlicher Fachwerke.

Es sollen entsprechend dem Vorgehen in § 14 Bedingungen für die statische Bestimmtheit und Stabilität *räumlicher* Fachwerke abgeleitet werden.

Ein Fachwerk wurde statisch bestimmt oder statisch unbestimmt genannt, jenachdem bei bekannten äussern Activkräften und Gleichgewichtslagen der Knotenpunkte die Stützenreactionen und Stabkräfte durch die Gesetze der Statik allein bestimmt sind oder nicht; es wurde als stabil oder labil bezeichnet, jenachdem abgesehen von verschwindend kleinen elastischen Formänderungen die relative Lage der Knotenpunkte zu einander und zu den Stützen eine feste oder mit den äussern Kräften veränderliche ist.

Wir nehmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem in fester Lage gegen irgend eine anfängliche Gruppirung der Knotenpunkte an. Die durch einen Stab der anfänglichen Länge l verbundenen Knotenpunkte m und n sind von x_m, y_m, z_m und x_n, y_n, z_n nach $x_m + \xi_m, y_m + \eta_m, z_m + \zeta_m$ und $x_n + \xi_n, y_n + \eta_n, z_n + \zeta_n$ gelangt. Bezeichnen X_m, Y_m, Z_m die resultirenden Componenten der an m wirkenden äussern Kräfte in den Richtungen x, y, z und S, λ die Beanspruchung und Längenänderung des Stabes $m\,n$, dann lauten die Bedingungen fürs Gleichgewicht an Punkt m nach den eingetretenen Verrückungen

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X_m + \sum_m S\,\frac{x_n + \xi_n - x_m - \xi_m}{l+\lambda} &= 0,\\ Y_m + \sum_m S\,\frac{y_n + \eta_n - y_m - \eta_m}{l+\lambda} &= 0,\\ Z_m + \sum_m S\,\frac{z_n + \zeta_n - z_m - \zeta_m}{l+\lambda} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Die $\sum$ beziehen sich auf alle in m eintreffenden Stäbe und für λ hat man

$$(2)\qquad (l+\lambda)^2 = (x_n+\xi_n-x_m-\xi_m)^2+(y_n+\eta_n-y_m-\eta_m)^2 + (z_n+\zeta_n-z_m-\zeta_m)^2.$$

Bei k Knotenpunkten liefert uns die Statik $3k$ Gleichungen 1), welche zur Bestimmung von Unbekannten dienen können. Von den Stützenreactionen mögen r_1 durch je eine Componente, r_2 durch zwei und r_3 durch drei Componenten bestimmt sein, dann ist die Anzahl der unabhängigen Reactionscomponenten überhaupt

$$r = r_1 + 2r_2 + 3r_3.$$

Da nun bei gegebenen äussern Activkräften und Gleichgewichtslagen der Knotenpunkte die $3k$ Gleichungen 1) von Unbekannten nur r Reactionscomponenten und s Stabkräfte enthalten, so muss für statisch bestimmte Fachwerke sein

$$(3)\qquad 3k \geqq r + s.$$

Werden die Knotenpunktscoordinaten nicht als bekannt vorausgesetzt, so bestehen die Gleichungen 1) zwischen Stützenreactionen, Stabkräften und Verrückungen ξ, η, ζ. Soll jedoch der Träger stabil sein, so verschwinden die ξ, η, ζ, λ gegen die x, y, z, l, die Gleichungen 1) gehen in folgende über

$$(4)\qquad \begin{cases} X_m + \sum_m S\frac{x_n - x_m}{l} = 0, \\ Y_m + \sum_m S\frac{y_n - y_m}{l} = 0, \\ Z_m + \sum_m S\frac{z_n - z_m}{l} = 0, \end{cases}$$

und aus 2) wird durch Subtraction von

$$l^2 = (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^3 + (z_n - z_m)^2$$

bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung gegen solche erster Ordnung

$$(5)\qquad l\lambda = (x_n - x_m)(\xi_n - \xi_m) + (y_n - y_m)(\eta_n - \eta_m) + (z_n - z_m)(\zeta_n - \zeta_m).$$

Da nun aber den $3k$ Gleichungen 4) mit den allein als Unbekannte darin verbliebenen r Reactionscomponenten und s Stabkräften genügt werden muss, so folgt für stabile Fachwerke die Bedingung

$$(6)\qquad 3k \leqq r + s.$$

Trifft dieselbe nicht zu, dann ist Gleichgewicht nur unter den allgemeineren Bedingungen 1) möglich, in welchen neben den $r + s$ unbekannten Kräften auch unbekannte ξ, η, ζ vorkommen, durch welche die Lagen der Knotenpunkte bestimmt sind.

Die Erfüllung der Bedingung 1) oder 2) reicht indessen nicht hin, ein Fachwerk statisch bestimmt oder stabil zu machen, es kommt nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Anordnung der Stäbe und Reactionen an. Zur statischen Bestimmtheit ist nöthig, dass sich mindestens die $r + s$ Reactionscomponenten und Stabkräfte aus den $3k$ statischen Bedingungsgleichungen bestimmen lassen, die Stabilität verlangt, dass mindestens diesen Gleichungen mit den verfügbaren $r + s$ Kräften genügt werden kann. Nun lässt sich jede unbekannte Kraft nur aus einer Gleichung bestimmen, in welcher sie vorkommt und mit einer verfügbaren Kraft nur einer Gleichung genügen helfen, welche diese Kraft enthält. Daher können wir aussprechen:

a) Ein Fachwerk kann nur statisch bestimmt sein, wenn es bei k Knotenpunkten $s + r \leq 3k$ wirksame Stäbe und unabhängige Reactionscomponenten enthält, welche sich den anliegenden Knotenpunkten so zuweisen lassen, dass auf jeden Knotenpunkt höchstens drei Stäbe und Reactionscomponenten verschiedener Richtung kommen. Im Grenzfalle $s + r = 3k$ ist statisch bestimmte Stabilität möglich, in allen andern Fällen haben wir labile Fachwerke.

b) Ein Fachwerk kann nur stabil sein, wenn es bei k Knotenpunkten $s + r \geq 3k$ wirksame Stäbe und unabhängige Reactionscomponenten enthält, welche sich den anliegenden Knotenpunkten so zuweisen lassen, dass auf jeden Knotenpunkt mindestens drei Stäbe und Reactionscomponenten verschiedener Richtung kommen. Im Grenzfalle $s + r = 3k$ ist statisch bestimmte Stabilität möglich, in allen anderen Fällen haben wir statisch unbestimmte Fachwerke.

Nach a) lassen sich statisch bestimmte Fachwerke durch Zufügen von $3k - s - r$ geeigneten Stäben oder Reactionscomponenten stabil machen, es müssen fürs Gleichgewicht ebensoviel von einander unabhängige Lagebedingungen erfüllt sein. Nach b) lassen sich stabile Fachwerke durch Wegnehmen von $s + r - 3k$ geeigneten Stäben und Reactionscomponenten statisch bestimmt machen, es müssen zur Berechnung ebensoviel von einander unabhängige Gleichungen ausserhalb der Statik gesucht werden. Da durch $s + r$ Stabkräfte und Reactionscomponenten, welche durch eine gleiche Anzahl Gleichungen bestimmt sind, diesen auch genügt wird, so folgt:

c) Ein Fachwerk, welches bei k Knotenpunkten $s + r = 3k$ Stabkräfte und unabhängige Reactionscomponenten enthält, die sich aus statischen Bedingungsgleichungen bestimmen lassen, ist statisch bestimmt und stabil.

Um zu entscheiden, wieviel unabhängige Reactionscomponenten ein stabiles Fachwerk mindestens haben muss, denken wir uns für alle am Fachwerk wirkenden äussern und innern Kräfte die sechs statischen Bedingungsgleichungen angeschrieben. Die innern Kräfte fallen wegen doppelten Auftretens in entgegengesetzten Richtungen aus, wir müssen jenen Gleichungen mit den allein als Unbekannte darin vorkommenden Stützenreactionen genügen können, was nur möglich ist, wenn diese von wenigstens sechs unabhängigen Componenten abhängen. Im Falle der Minimalzahl $r = 6$ muss für statisch-bestimmt-stabile Fachwerke sein

$$s = 3k - 6$$

und soviel Stäbe sind nöthig, um k Knotenpunkte ohne Hülfe von Reactionen in feste Verbindung zu einander zu bringen, während die Anzahl der zwischen k Knotenpunkten möglichen Stäbe wie in der Ebene $k\frac{k-1}{2}$ ist. Für jede über $r = 6$ hinaus vorhandene Reactionscomponente muss ein Stab wegbleiben, wenn das Fachwerk nicht statisch unbestimmt werden soll und für jeden an $s = 3k - 6$ fehlenden Stab muss eine Reactionscomponente hinzutreten, wenn das Fachwerk nicht labil werden soll.

Fassen wir einige Beispiele ins Auge. Ein abgestumpftes n-Kant des in Fig. 30, 31 angedeuteten Systems mit geraden oder gebrochenen Kanten (Pfeiler, Kuppeln) hat bei m Ringen $k = nm$ Knotenpunkte und

	nm	Ringstäbe,
	$n(m-1)$	Kantenstäbe,
	$n(m-1)$	Diagonalstäbe,
im Ganzen	$s = n(3m-2)$	Stäbe.

Es sind also zur statisch bestimmten Stabilität

$$3k - s = 3nm - n(3m-2) = 2n$$

von einander unabhängige Reactionscomponenten nöthig und soviel haben wir beispielsweise, wenn jede Stützenreaction von 2 Componenten abhängt, wie bei der den Sätzen a) b) entsprechenden Zuweisung in Fig. 30 angenommen wurde. Bei dem Dreikant Fig. 31 soll der Knotenpunkt XII festliegen, während X auf einer Linie und

XI auf einer Fläche reibungslos gleitet. Beide angedeuteten Fachwerke (das erste bei n Kanten) sind statisch-bestimmt-stabil und es gilt dies auch noch, wenn beliebige Diagonalstäbe ihre Stellung im Viereck wechseln. Läuft das n-Kant in einen Knotenpuukt aus (Thurmdächer, Kuppeln), dann haben wir bei m Ringen $k = nm + 1$ Knotenpunkte, sowie

	nm	Ringstäbe,
	nm	Kantenstäbe,
	$n(m-1)$	Diagonalstäbe,
zusammen	$s = n(3m-1)$	Stäbe.

Das Stabsystem lässt sich durch

$$3k - s = 3(nm + 1) - n(3m - 1) = n + 3$$

unabhängige Reactionscomponenten statisch bestimmt stabil machen. In Fig. 31 dürfen alle Stäbe und Reactionscomponenten bleiben, da für $n + 3 = 6$ ist und die hinzukommenden drei Stabkräfte aus den drei Gleichungen für den neuen Knotenpunkt berechnet werden können, in Fig. 30 verlangt die statisch-bestimmte Stabilität den Wegfall von drei (bei n Kanten von $2n - n - 3 = n - 3$) Stäben oder Reactionscomponenten.

Beispiel 13. Statisch-bestimmtes Balkenfachwerk doppelten Systems. Berechnung von Stabkräften aus Knotenpunktsgleichungen.

Für das in Fig. 32 angedeutete Fachwerk die von der Kraft $P = 40$ tn erzeugten Stabkräfte zu berechnen, wenn sämmtliche Stäbe auf Zug und Druck genügend widerstandsfähig sind. Die in Figur eingeschriebenen arabischen Ziffern geben die Stablängen an.

Als Stützenreactionen hat man

$$V = \frac{5}{8} 40 = 25 \text{ tn}, \qquad V' = \frac{3}{8} 40 = 15 \text{ tn}.$$

Die Gesammtheit der in einem Knotenpunkt angreifenden äussern und innern Kräfte muss den durch § 14, 4) ausgedrückten Bedingungen genügen:

Summe aller Horizontalkräfte gleich Null,
„ „ Verticalkräfte „ „

Demzufolge lassen sich die Stabkräfte in nachstehender Reihenfolge aus den angesetzten Bedingungsgleichungen für die durch lateinische Zahlen bezeichneten Knotenpunkte berechnen.

	Gleichung	Ergebnis
I	$U_1 + O_1 \frac{3}{3,47} = 0$	$O_1 = -49,57$ tn
	$25 + O_1 \frac{1,75}{3,47} = 0$	$U_1 = -42,86$
II	$U_2 - U_1 = 0$	$U_2 = U_1$
	$V_1 + 0 = 0$	$V_1 = 0$
III	$U_3 - U_2 = 0$	$U_3 = U_1$
	$V_2 + 0 = 0$	$V_2 = 0$
IV	$O_2 \frac{3}{3,25} + D_1 \frac{6}{6,25} - O_1 \frac{3}{3,47} = 0$	$O_2 = -57,36$
	$O_2 \frac{1,25}{3,25} - D_1 \frac{1,75}{6,25} - O_1 \frac{1,75}{3,47} - V_1 = 0$	$D_1 = 10,51$
V	$O_3 \frac{3}{3,09} + D_2 \frac{6}{6,71} - O_2 \frac{3}{3,25} = 0$	$O_3 = -66,65$
	$O_3 \frac{0,75}{3,09} - D_2 \frac{3}{6,71} - O_2 \frac{1,25}{3,25} - V_2 = 0$	$D_3 = 13,16$
VI	$U_8 + O_8 \frac{3}{3,47} = 0$	$O_8 = -29,74$
	$15 + O_8 \frac{1,75}{3,47} = 0$	$U_8 = 25,71$
VII	$U_7 - U_8 = 0$	$U_7 = U_8$
	$V_7 + 0 = 0$	$V_7 = 0$
VIII	$U_6 - U_7 = 0$	$U_6 = U_8$
	$V_6 + 0 = 0$	$V_6 = 0$
IX	$O_7 \frac{3}{3,25} + D_6 \frac{6}{6,25} - O_8 \frac{3}{3,47} = 0$	$O_7 = -34,41$
	$O_7 \frac{1,25}{3,25} - D_6 \frac{1,75}{6,25} - O_8 \frac{1,75}{3,47} - V_7 = 0$	$D_6 = 6,30$
X	$O_6 \frac{3}{3,09} + D_5 \frac{6}{6,71} - O_7 \frac{3}{3,25} = 0$	$O_6 = -39,99$
	$O_6 \frac{0,75}{3,09} - D_5 \frac{3}{6,71} - O_7 \frac{1,25}{3,25} - V_6 = 0$	$D_5 = 7,89$
XI	$V_4 + D_2 \frac{3}{6,71} + D_5 \frac{3}{6,71} = 0$	$V_4 = -9,41$
XII	$O_5 \frac{3}{3,01} - O_4 \frac{3}{3,01} = 0$	$O_4 = 56,65$
	$O_5 \frac{0,25}{3,01} + O_4 \frac{0,25}{3,01} + V_4 = 0$	$O_5 = O_4$
XIII	$O_4 \frac{3}{3,01} + D_3 \frac{6}{7,08} - O_3 \frac{3}{3,09} = 0$	$D_3 = -142,98$

$$\text{XIV} \quad O_5 \frac{3}{3{,}01} + D_4 \frac{6}{7{,}08} - O_6 \frac{3}{3{,}09} = 0 \qquad D_4 = -112{,}41$$

$$\text{XV} \left\{ \begin{aligned} & U_4 - U_3 - D_1 \frac{6}{6{,}25} + D_4 \frac{6}{7{,}08} = 0 && U_4 = 148{,}24 \\ & V_3 - 40 + D_1 \frac{1{,}75}{6{,}25} + D_4 \frac{3{,}75}{7{,}08} = 0 && V_3 = 96{,}61 \end{aligned} \right.$$

$$\text{XVI} \left\{ \begin{aligned} & U_5 - U_6 - D_6 \frac{6}{6{,}25} + D_3 \frac{6}{7{,}08} = 0 && U_5 = 152{,}93 \\ & V_5 + D_6 \frac{1{,}75}{6{,}25} + D_3 \frac{3{,}75}{7{,}08} = 0 && V_5 = 73{,}97. \end{aligned} \right.$$

Damit sind alle Stabkräfte und Stützenreactionen bestimmt. Als Proben können dienen

$$\text{bei XI} \quad U_5 - U_4 - D_2 \frac{6}{6{,}71} + D_5 \frac{6}{6{,}71} = 0,$$

$$\text{„ XIII} \quad O_4 \frac{0{,}25}{3{,}01} - O_3 \frac{0{,}75}{3{,}09} - D_3 \frac{3{,}75}{7{,}08} - V_3 = 0,$$

$$\text{„ XIV} \quad O_5 \frac{0{,}25}{3{,}01} - O_6 \frac{0{,}75}{3{,}09} - D_4 \frac{3{,}75}{7{,}08} - V_5 = 0.$$

Bemerkungen. Anstatt wie vorstehend hätten sich die Stabkräfte auch in anderer Reihenfolge oder nach einer der Methoden des § 15 berechnen lassen. Ferner konnte man direct angeben U_8, O_8, U_7, O_7, D_6, D_5, O_6 gleich $\frac{3}{5}$ U_1, O_1, U_2, O_2, D_1, D_2, O_3.

Angenommen, die beiden mittleren Obergurtstäbe wären horizontal. Dann würden an Stelle von XII bis XIV treten

$$\text{XII} \left\{ \begin{aligned} & O_5 - O_4 = 0 \\ & O_5 \frac{0}{3} + O_4 \frac{0}{3} + V_4 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{XIII} \quad O_4 + D_3 \frac{6}{7{,}08} - O_3 \frac{3}{3{,}09} = 0$$

$$\text{XIV} \quad O_5 + D_4 \frac{6}{7{,}08} - O_6 \frac{3}{3{,}09} = 0,$$

und damit folgende Abweichungen gegen oben erhalten werden

$$O_4 = O_5 = \infty \qquad D_3 = D_4 = -\infty$$

$$U_4 = U_5 = \infty \qquad V_3 = V_5 = \infty.$$

Es ist dies ein Grenzfall, wie er in zahlreichen mathematischen und mechanischen Problemen vorkommt, ohne immer besonders erwähnt zu werden. Für Bogen vom Pfeile $f = 0$ beispielsweise wird der Horizontalschub $H = \infty$. Der obige Träger ist nur dann stabil, wenn jene 8 Stäbe unendlich grosse Widerstandsfähigkeit besitzen,

d. h. bei starren Stäben (ähnlich wie die Dreigelenkbogen Fig. 255—266 der Theorie für $f = 0$). In andern Fällen ist er nicht stabil, aber dasselbe gilt bei nicht horizontalen Stäben, wenn irgendwelche Stäbe nicht genügende Widerstandsfähigkeit besitzen. Praktisch ist der Träger ohne Bedeutung, weil auch bei nur annähernd horizontalen Stäben die Beanspruchungen der Stäbe, welche oben ∞ wurden, durch kleine Neigungsdifferenzen zu stark beeinflusst werden.

Beispiel 14. Statisch bestimmtes Fachwerk doppelten Systems mit schiefem Auflager. Berechnung von Stabkräften aus Knotenpunktsgleichungen.

Für das in Fig. 33 skizzirte Fachwerk sind sämmtliche von der angedeuteten Locomotivbelastung herrührenden Stabkräfte und Stützenreactionen unter der Voraussetzung zu berechnen, dass die Stäbe dem auf sie entfallenden Zug oder Druck widerstehen können. Sodann ist anzugeben, welche Aenderungen der Stabkräfte und Stützenreactionen entstünden, wenn anstatt der schiefen Auflagerbahn eine horizontale gewählt würde.

Durch die angedeuteten Radlasten entstehen folgende Knotenpunktslasten

$$\begin{aligned}
K_0 &= && 0,\\
K_1 &= 6 + 6\,\frac{2,2 + 0,9}{3,5} &&= 11,32 \text{ tn},\\
K_2 &= 6\,\frac{1,3 + 2,6}{3,5} + 4\,\frac{3,2}{3,5} + 5\,\frac{0,2}{3,5} &&= 10,63,\\
K_3 &= 4\,\frac{0,3}{3,5} + 5\,\frac{3,3}{3,5} &&= 5,06,\\
K_4 &= 6\,\frac{3 + 1,7 + 0,4}{3,5} &&= 8,74,\\
K_5 &= 6\,\frac{0,5 + 1,8 + 3,1}{3,5} + 4\,\frac{2,7}{3,5} &&= 12,34,\\
K_6 &= 4\,\frac{0,8}{3,5} &&= 0,91.
\end{aligned}$$

$$\text{Probe } 6 \,.\, 6 + 2 \,.\, 4 + 5 = 49 \text{ tn}.$$

Schreiben wir nun die Momentengleichung für alle am Träger wirkenden äusseren Kräfte hinsichtlich des Auflagers V an, so folgt aus

$$V\,6 - 11,32 \,.\, 5 - 10,63 \,.\, 4 - 5,06 \,.\, 3 - 8,74 \,.\, 2 - 12,34 = 0$$

die Verticalreaction bei I

$$V = 24{,}02 \text{ tn},$$

wonach die Verticalreaction bei V

$$V' = 49 - 24{,}02 = 24{,}98 \text{ tn},$$

die Totalreaction daselbst

$$R = \frac{V'}{\cos 30} = \frac{2 \,.\, 24{,}98}{\sqrt{3}} = 28{,}85 \text{ tn},$$

und der Horizontalschub

$$H = R \sin 30 = \frac{R}{2} = 14{,}42 \text{ tn}.$$

Aus den für die äussern und innern Kräfte an jedem Knotenpunkte bestehenden Bedingungen

Summe aller Horizontalkräfte gleich Null,
" " Verticalkräfte " "

lassen sich nun die Stabkräfte in nachstehender Reihenfolge berechnen. Die lateinischen Zahlen deuten an, welchen Knotenpunkten die beigesetzten Gleichungen entsprechen.

$$\text{I} \begin{cases} H + U_1 = 0 \\ V + V_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} U_1 &= -14{,}42 \text{ tn} \\ V_0 &= -24{,}02 \end{aligned}$$

$$\text{II} \begin{cases} O_1 \frac{3{,}5}{3{,}81} + D_1 \frac{7}{7{,}28} = 0 \\ O_1 \frac{1{,}5}{3{,}81} - D_2 \frac{2}{7{,}28} - V_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} O_1 &= -36{,}51 \\ D_1 &= 34{,}97 \end{aligned}$$

$$\text{III} \begin{cases} U_2 - U_1 = 0 \\ V_1 - K_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} U_2 &= U_1 \\ V_1 &= 11{,}32 \end{aligned}$$

$$\text{IV} \begin{cases} O_2 \frac{3{,}5}{3{,}64} + D_2 \frac{7}{7{,}83} - O_1 \frac{3{,}5}{3{,}81} = 0 \\ O_2 \frac{1}{3{,}64} - D_2 \frac{3{,}5}{7{,}83} - O_1 \frac{1{,}5}{3{,}81} - V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} O_2 &= -26{,}34 \\ D_2 &= -9{,}28 \end{aligned}$$

$$\text{V} \begin{cases} H + U_6 = 0 \\ V' + V_6 - K_6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} U_6 &= U_1 \\ V_6 &= -24{,}07 \end{aligned}$$

$$\text{VI} \begin{cases} O_6 \frac{3{,}5}{3{,}81} + D_6 \frac{7}{7{,}28} = 0 \\ O_6 \frac{1{,}5}{3{,}81} - D_5 \frac{2}{7{,}28} - V_6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} O_6 &= -36{,}67 \\ D_6 &= 35{,}05 \end{aligned}$$

$$\text{VII} \begin{cases} U_5 - U_6 = 0 \\ V_5 - K_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} U_5 &= U_1 \\ V_5 &= 12{,}34 \end{aligned}$$

$$\text{VIII}\begin{cases} O_5 \frac{3,5}{3,64} + D_5 \frac{7}{7,83} - O_6 \frac{3,5}{3,81} = 0 & O_5 = -\ 25,08 \text{ tn} \\ O_5 \frac{1}{3,64} - D_5 \frac{3,5}{7,83} - O_6 \frac{1,5}{3,81} - V_5 = 0 & D_5 = -\ 10,72 \end{cases}$$

$$\text{IX} \quad V_3 + (D_2 + D_5) \frac{3,5}{7,83} - K_3 = 0 \qquad V_2 = \ 14,00$$

$$\text{X}\begin{cases} (O_4 - O_3) \frac{3,5}{3,54} = 0 & O_3 = -\ 49,56 \\ V_3 + 2 O_3 \frac{0,5}{3,54} = 0 & O_4 = \ O_3 \end{cases}$$

$$\text{XI}\begin{cases} O_3 \frac{3,5}{3,54} + D_3 \frac{7}{8,32} - O_2 \frac{3,5}{3,64} = 0 & D_3 = \ 28,13 \\ O_3 \frac{0,5}{3,54} - D_3 \frac{4,5}{8,32} - O_2 \frac{1}{3,64} - V_2 = 0 & V_2 = -\ 14,97 \end{cases}$$

$$\text{XII}\begin{cases} O_4 \frac{3,5}{3,54} + D_4 \frac{7}{8,32} - O_5 \frac{3,5}{3,64} = 0 & D_4 = \ 29,57 \\ O_4 \frac{0,5}{3,54} - D_4 \frac{4,5}{8,32} - O_5 \frac{1}{3,64} - V_4 = 0 & V_4 = -\ 16,10 \end{cases}$$

$$\text{XIII} \quad U_3 + D_4 \frac{7}{8,32} - D_1 \frac{7}{7,28} - U_2 = 0 \qquad U_3 = -\ 5,67$$

$$\text{XIV} \quad U_4 + D_3 \frac{7}{8,32} - D_6 \frac{7}{7,28} - U_5 = 0 \qquad U_4 = -\ 4,39.$$

Probe bei IX $\quad U_4 + (D_5 + D_2) \frac{7}{7,83} - U_3 = 0,$

" " XIII $\quad V_2 - K_2 + D_4 \frac{4,5}{8,32} + D_1 \frac{2}{7,28} = 0,$

" " XIV $\quad V_4 - K_4 + D_3 \frac{4,5}{8,32} + D_6 \frac{2}{7,28} = 0.$

Wollte man anstatt der schiefen Auflagerbahn eine horizontale anwenden, so würden die Horizontalcomponenten der Auflagerreactionen wegfallen, V, V' dagegen wie oben bleiben. Sämmtliche Stabkräfte des Untergurts würden in positivem Sinne 14,42 tn zunehmen (Werth von H bei schiefem Auflager) und alle übrigen Stabkräfte ungeändert bleiben. Bezüglich des Falles horizontaler Obergurtstäbe ist auf das am Schluss des vorigen Beispiels Gesagte zu verweisen.

Aufgabe 17. Ableitung von Stabkräften aus Knotenpunktsgleichungen.

Die Ausdrücke sämmtlicher Stabkräfte des in Fig. 34 angedeuteten Balkenfachwerks für beliebige Belastung aus den Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Knotenpunkte abzuleiten.

Es mögen λ, h, d die Feldlänge, Trägerhöhe und Länge der Diagonalen bedeuten. Ferner setzen wir

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l K(l-e) = A + K_0,$$

$$V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Ke \qquad = B + K_l,$$

sodass A, B die Stützenreactionen abzüglich der (direct übertragenen) Knotenpunktslasten bei 0 und l bezeichnen. In unserem speziellen Falle sind

$$A = \frac{1}{5}(4K_1 + 3K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$B = \frac{1}{5}(4K_4 + 3K_3 + 2K_2 + K_1).$$

Die Stabkräfte ergeben sich damit aus den Gleichgewichtsbedingungen für die durch lateinische Zahlen benannten Knotenpunkte in nachstehender Reihenfolge.

$$\text{I}\ \begin{cases} X_1 + Y_1\frac{\lambda}{d} = 0 \\ A - Y_1\frac{h}{d} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} Y_1 &= \frac{d}{h}A \\ X_1 &= -\frac{\lambda}{h}A \end{aligned}$$

$$\text{II}\ \begin{cases} Z_2\frac{\lambda}{d} - Y_1\frac{\lambda}{d} = 0 \\ Z_2\frac{h}{d} + Y_1\frac{h}{d} + V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} Z_2 &= Y_1 \\ V_1 &= -2A \end{aligned}$$

$$\text{III}\ \begin{cases} X_2 - X_1 + Y_2\frac{\lambda}{d} = 0 \\ V_1 + K_1 + Y_2\frac{h}{d} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} Y_2 &= (2A - K_1)\frac{d}{h} \\ X_2 &= -(3A - K_1)\frac{\lambda}{h} \end{aligned}$$

$$\text{IV}\ \begin{cases} Z_3\frac{\lambda}{d} - Y_2\frac{\lambda}{d} = 0 \\ Z_3\frac{h}{d} + Y_2\frac{h}{d} + V_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} Z_3 &= Y_2 \\ V_2 &= -(2A - K_1)2 \end{aligned}$$

$$\text{V}\ \begin{cases} X_3 - X_2 + Y_3\frac{\lambda}{d} - Z_2\frac{\lambda}{d} = 0 \\ V_2 + K_2 + Y_3\frac{h}{d} + Z_2\frac{h}{d} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} Y_3 &= (3A - 2K_1 - K_2)\frac{d}{h} \\ X_3 &= -(5A - 3K_1 - K_2)\frac{\lambda}{h} \end{aligned}$$

$$\text{VI}\ \begin{cases} Z_4\frac{\lambda}{d} - Y_3\frac{\lambda}{d} = 0 \\ Z_4\frac{h}{d} + Y_3\frac{h}{d} + V_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} Z_4 &= Y_3 \\ V_3 &= -(3A - 2K_1 - K_2)2 \end{aligned}$$

$$\text{VII}\begin{cases} X_4 - X_3 + Y_4\frac{\lambda}{d} - Z_3\frac{\lambda}{d} = 0 & Y_4 = \quad (4A - 3K_1 - 2K_2 - K_3)\frac{d}{h} \\ V_3 + K_3 + Y_4\frac{h}{d} + Z_3\frac{h}{d} = 0 & X_4 = -(7A - 5K_1 - 3K_1 - K_3)\frac{\lambda}{h} \end{cases}$$

$$\text{VIII}\begin{cases} Z_5\frac{\lambda}{d} - Y_4\frac{\lambda}{d} = 0 & Z_5 = \quad Y_4 \\ Z_5\frac{h}{d} + Y_4\frac{h}{d} + V_4 = 0 & V_4 = -(4A - 3K_1 - 2K_2 - K_3)2 \end{cases}$$

$$\text{IX} \quad X_5 - X_4 - Z_4\frac{\lambda}{d} = 0 \qquad X_5 = -(4A - 3K_1 - 2K_2 - K_3)\frac{\lambda}{h}.$$

Probe bei IX $\quad V_4 + K_4 + Z_4\frac{h}{d} = 0,$

„ „ X $\quad X_5 + Z_5\frac{\lambda}{d} = 0,$

„ „ X $\quad B - Z_5\frac{h}{d} = 0.$

Bemerkungen. Wir hätten mit Rücksicht auf die symmetrische Anordnung der Stäbe nach Erledigung des Knotenpunkts V aus I—IV sofort auf die folgenden Ausdrücke schliessen können.

$$Z_5 = B\frac{d}{h} \qquad X_5 = -B\frac{\lambda}{h},$$
$$Y_4 = Z_5 \qquad U_4 = -2B,$$
$$Z_4 = (2B - K_4)\frac{d}{h}, \quad X_4 = -(3B - K_4)\frac{\lambda}{h},$$
$$Y_3 = Z_4 \qquad V_3 = -(2B - K_4)2.$$

Auch alle übrigen Stabkräfte lassen sich, so fortfahrend, noch anders als oben ausdrücken. Nachdem alle Stabkräfte für beliebige Belastung abgeleitet sind, könnte man die Grenzwerthe derselben für bewegte Lasten mittelst der gefundenen Ausdrücke entweder allgemein feststellen, oder in gegebenen Fällen nach einer der Methoden § 12, e) f) numerisch berechnen. Weitere Ableitungen von Stabkräften aus Knotenpunktsgleichungen sind in den beiden letzten Beispielen und der folgenden Aufgabe enthalten.

Aufgabe 18. Verschiedene Fachwerke. Ableitung von Grenzbeanspruchungen aus Knotenpunktsgleichungen.

Für die in Fig. 35—40 angedeuteten Fachwerke die Grenzwerthe der Stabkräfte bei bewegter Verkehrslast aus den Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte abzuleiten.

Erster Fall. Fig. 35 und 36. Die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die zwei mittleren Knotenpunkte ergibt, dass die Beanspruchungen der oberen Gurtungsstäbe sowohl wie diejenigen der unteren Gurtungsstäbe gleich gross sind. Es mögen nun λ, h, d die Längen der durch X, Y, Z beanspruchten Stäbe bezeichnen und im Folgenden die oberen und unteren Vorzeichen bezw. bei oben liegender und unten liegender X-Gurtung gelten, dann hat man

$$X + Z\frac{\lambda}{d} = 0, \qquad K \pm Y = 0, \qquad Y + 2Z\frac{h}{d} = 0,$$

woraus für beliebige Belastung

(1) $$X = \mp K\frac{\lambda}{2h}, \qquad Y = \mp K, \qquad Z = \pm K\frac{d}{2h}.$$

Die Grenzwerthe sämmtlicher Stabkräfte entstehen hiernach gleichzeitig mit den Grenzwerthen der Knotenpunktslast K. Für ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht von g per Längeneinheit und eine ebensolche Verkehrslast von p per Längeneinheit sind die Grenzwerthe durch 1) mit

(2) $$K = \mathfrak{K} = g\lambda, \qquad K = (g + p)\lambda = q\lambda$$

bestimmt. Für beliebige feste Last und bewegte Radlastzüge ergeben sie sich aus 1) mit

(3) $$K = \mathfrak{K}, \qquad K = \mathfrak{K} + \frac{1}{\lambda}\sum_0^\lambda Pa + \frac{1}{\lambda}\sum_\lambda^l P(l - a),$$

wenn $\mathfrak{K}$ der festen Last allein entspricht und bei Berechnung des letzten K ein Zug I mit Rad O über der Trägermitte angenommen wird. Aus 3) folgt durch Differentiation nach a als Bedingung für Maxima von K und der Stabkräfte

(4) $$\sum_0^\lambda P = \frac{1}{2}\sum_0^l P.$$

Mittelst dieser Gleichung könnte die erwähnte Stellung des Lastzugs noch corrigirt werden, was jedoch praktisch selten nöthig sein wird.

Zweiter Fall. Fig. 37 und 38. Der Träger sei durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt. Längen der durch V_m, Y_m, Z_m beanspruchten Stäbe h, d_m, d_{n-m}. Die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die Knotenpunkte des Obergurts ergibt, dass alle Stäbe des Letzteren gleich

stark beansprucht sind. Zur Berechnung der Stäbe vom Index m hat man

$$V_m + K_m = 0,$$
$$Z_m \frac{(n-m)\lambda}{d_{n-m}} - Y_m \frac{m\lambda}{d_m} = 0,$$
$$V_m + Z_m \frac{h}{d_{n-m}} + Y_m \frac{h}{d_m} = 0$$

und für die Gurtungskräfte X

$$X + Y_1 \frac{\lambda}{d_1} + Y_2 \frac{2\lambda}{d_2} + \cdots + Y_{n-1} \frac{(n-1)\lambda}{d_{n-1}} = 0.$$

Es folgen daraus für beliebige Belastung

(5) $$V_m = -K_m, \quad Y_m = \frac{n-m}{nh} d_m K_m, \quad Z_m = \frac{m}{nh} d_{n-m} K_m,$$

(6) $$X = -\frac{\lambda}{nh}[(n-1)\,1K_1 + (n-2)\,2K_2 + \cdots + 1\,(n-1)K_{n-1}].$$

Diese Gleichungen führen mit $n = 2$ auf 1), und 6) liefert beispielsweise

für $n = 3$ $\quad X = -\frac{2\lambda}{3h}(K_1 + K_2),$

„ $n = 4$ $\quad X = -\frac{\lambda}{4h}(3K_1 + 4K_2 + 3K_3),$

„ $n = 5$ $\quad X = -\frac{2\lambda}{5h}(2K_1 + 3K_2 + 3K_3 + 2K_4).$

Während die Stabkräfte V_m, Y_m, Z_m nur von der Knotenpunktslast K_m abhängen, tragen sämmtliche Lasten auf dem Träger zu X bei.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte entstehen, wenn die beitragenden Knotenpunktslasten einmal möglichst gross und einmal möglichst klein sind. Für gleichmässig vertheilte feste Last und ebensolche Verkehrslast von g und p per Längeneinheit Träger erhält man die Grenzwerthe mit $K_m = K$ entsprechend 2), also insbesondere die Grenzwerthe von X

(7) $$\mathfrak{X} = -(n^2 - 1)\frac{g\lambda^2}{6h}, \qquad X = \frac{q}{g}\mathfrak{X},$$

worin $q = g + p$ ist. Für beliebige feste Last und bewegte Radlastzüge hat man allgemein, wenn $\mathfrak{K}_m$ der festen Last allein entspricht,

(8) $$K_m = \mathfrak{K}_m + \frac{1}{\lambda}\Big[\sum_{m-1}^{m} P(a - m\lambda + \lambda) + \sum_{m}^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a)\Big].$$

Die Grenzwerthe von V_m, Y_m, Z_m ergeben sich nun mit $K_m = \mathfrak{K}_m$ und K_m nach 8), wenn im letzteren Fall ein Zug I mit Rad O über

Verticale m steht. Die Grenzwerthe von X folgen ebenfalls mit $K_m = \mathfrak{K}_m$ und K_m nach 8), wobei jedoch für letzteren Fall Zug I mit Rad O über der Trägermitte anzunehmen ist. Während bei gleichen $\mathfrak{K}_m$ auch die K_m zur Berechnung aller Grenzwerthe V_m, Y_m, Z_m gleich gross werden, ist dies für die K_m zur Berechnung des oberen Grenzwerths von X nicht der Fall. — Ist die feste Last wie gewöhnlich symmetrisch zur Trägermitte angeordnet, so hat man neben X nur die V der ersten Trägerhälfte und die Y zu berechnen.

Dritter Fall. Fig. 39 und 40. Es seien die ganzen Stützenreactionen bei 0 und l

$$(9) \qquad V = A + K_0, \qquad V' = B + K_3,$$

dann hat man die Stützenreactionen abzüglich der direct auf die Stützen kommenden Knotenpunktslasten K_0, K_3

$$(10) \qquad A = \frac{2}{3} K_1 + \frac{1}{3} K_2, \qquad B = \frac{1}{3} K_1 + \frac{2}{3} K_2.$$

Bezeichnen λ, h, d die Feldlänge, Trägerhöhe und Länge der schiefen Stäbe, so gelten folgende Knotenpunktsgleichungen, in welchen sich die oberen und unteren Vorzeichen bezw. auf oben liegende und unten liegende X-Gurtung beziehen.

$$\begin{array}{ll} X_1 + Z_1 \frac{\lambda}{d} = 0 & A \mp Z_1 \frac{h}{d} = 0 \\ Z_2 - Z_1 \frac{\lambda}{d} = 0 & V_1 + Z_1 \frac{h}{d} = 0 \\ X_3 + Z_3 \frac{\lambda}{d} = 0 & B \mp Z_3 \frac{h}{d} = 0 \\ X_3 - X_2 \quad = 0 & V_2 \pm K_2 \quad = 0 \end{array}$$

$$Z_3 \frac{\lambda}{d} - Z_2 - D \frac{\lambda}{d} = 0.$$

Hieraus folgen die Stabkräfte für beliebige Belastung

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} Z_1 = \pm A \frac{d}{h} & Z_3 = \pm B \frac{d}{h} \\ X_1 = \mp A \frac{\lambda}{h} & X_3 = \mp B \frac{\lambda}{h} \\ Z_2 = - X_1 & X_2 = \quad X_3 \\ V_1 = \mp A & V_2 = \mp K_2 \\ \multicolumn{2}{c}{D = \mp (B - A) \frac{d}{h} = \pm (K_2 - K_1) \frac{d}{3h}.} \end{array} \right.$$

Nach 10) 11) tragen die Knotenpunktslasten K_1, K_2 in gleichem Sinne zu den Stabkräften X, Z, V bei, zu D dagegen in verschie-

denem Sinne. Für gleichmässig vertheilte feste Last und ebensolche Verkehrslast von g und p per Längeneinheit ergeben sich die Grenzwerthe der X, Z, V aus 11) mit den durch 2) bestimmten Werthen von $K_1 = K_2 = K$, während die Grenzwerthe von D sind

$$(12) \qquad D = \pm \frac{p\lambda d}{3h}, \qquad D = \mp \frac{p\lambda d}{3h}.$$

Für beliebige feste Last und bewegte Radlastzüge hat man nach A. 15, 3) allgemein

$$(13) \qquad \begin{cases} A = \mathfrak{A} + \frac{2}{l} \sum_0^\lambda Pa + \frac{1}{l} \sum_\lambda^l P(l-a), \\ B = \mathfrak{B} + \frac{1}{l} \sum_0^{2\lambda} Pa + \frac{2}{l} \sum_{2\lambda}^l P(l-a), \\ K_2 = \mathfrak{K}_2 + \frac{1}{l} \sum_\lambda^{2\lambda} P(a-\lambda) + \frac{1}{\lambda} \sum_{2\lambda}^l P(l-a), \end{cases}$$

worin sich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}_2$ auf die feste Last allein beziehen. Die unteren Grenzwerthe aller X, Z, V treten hiernach für Eigengewicht allein ein, die oberen von X_1, Z_1, Z_2, V_1, wenn Zug I mit Rad O bei λ steht und die oberen von X_2, X_3, Z_3, V_2, wenn Zug I mit Rad O bei 2λ steht. Bei symmetrisch zur Trägermitte liegender fester Last, wie also insbesondere für $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 = g\lambda$, sind die Grenzwerthe von X_2, X_3, Z_3 gleich denjenigen von X_1, X_1, Z_1. Die Grenzwerthe von D ergeben sich nach 11) oder Aufgabe 15, wenn Zug I einmal mit Rad O bei λ stehend möglichst nur die erste Trägerhälfte belastet und dann mit Rad O bei 2λ stehend möglichst nur die zweite Trägerhälfte belastet. Bei symmetrisch zur Trägermitte liegender fester Last erzeugt diese keine Beanspruchung D, womit die beiden Grenzwerthe von D gleich gross werden. Mittelst der aus 13) folgenden oder schon durch A. 15, 6) bestimmten Maximalbedingungen könnten die Zugstellungen noch corrigirt werden.

Bemerkungen. Träger der Anordnung Fig. 35 und 39 mit obenliegender X-Gurtung hat man u. A. als Schienenträger und Querträger angewandt. Um im Falle von Schienenträgern die Uebertragung der Lasten bei den Knotenpunkten allein zu bewirken, kann man die Schienen daselbst auf Unterlagsplatten legen, wie dies bei der Brücke über den Spandauer Kanal im Zuge der Berliner Verbindungsbahn geschehen ist. Der Träger Fig. 37, 38 kommt in Amerika mit verschiedener Felderzahl n häufig vor.

Da bei den Fachwerken der Beispiele 13, 14 und Aufgaben 17, 18 die Anzahl der wirksamen Stäbe und unabhängigen Reactionscomponenten $s + r = 2k$ ist und deren Berechnung aus statischen Bedingungsgleichungen allein möglich war, so sind dieselben nach § 14 statisch bestimmt und stabil. Zu beachten ist, dass in Fig. 34—40 zwar nur zwei Componenten der Stützenreactionen angedeutet sind, die letzteren aber doch von drei Componenten abhängen, deren eine aber nach § 8 für Balkenträger mit nur verticalen Activkräften (Lasten) den Werth $H = 0$ hat. Der in Fig. 41 skizzirte, neuerdings mehrfach hervorgehobene Träger ist schon deshalb statisch bestimmt und stabil, weil er dem Träger Fig. 37 gegenüber nach Art und System nichts Neues bietet.

Beispiel 15. Zur vorigen Aufgabe. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für das in Fig. 37 angedeutete Balkenfachwerk betrage per laufenden Meter das Eigengewicht $g = 0{,}6$ tn, die bewegte Last $p = 3$ tn. Das Eigengewicht soll wie die Verkehrslast nur auf die oberen Knotenpunkte vertheilt gelten. Es sind die Grenzbeanspruchungen der Stäbe festzustellen.

Die Längen der durch Y_1, Y_2, Y_3 beanspruchten Stäbe sind

$$d_1 = 4\sqrt{2} = 5{,}66, \quad d_2 = 4\sqrt{5} = 8{,}94, \quad d_3 = 4\sqrt{10} = 12{,}65\ \text{m}.$$

Nach A. 18, 5) 7) mit $n = 4$, $\lambda = 4$, $h = 4$, $q = 3{,}6$, $K_m = q\lambda = 14{,}4$ erhält man die oberen Grenzwerthe der Stabkräfte in Tonnen

$$V_1 = V_2 = V_3 = -q\lambda = -14{,}4$$
$$Y_1 = Z_3 = \frac{q\lambda}{4h} 3d_1 = 15{,}28$$
$$Y_2 = Z_2 = \frac{q\lambda}{2h} d_2 = 16{,}09$$
$$Y_3 = Z_1 = \frac{q\lambda}{4h} d_3 = 11{,}39$$
$$X = -\frac{5q}{2h}\lambda^2 = -36.$$

Die unteren Grenzwerthe, welche für Eigengewicht allein eintreten, sind wegen

$$\frac{g}{q} = \frac{0{,}6}{3{,}6} = \frac{1}{6}$$

ein Sechstel so gross wie die oberen.

Beispiel 16. Zur vorigen Aufgabe. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte für den Träger des vorigen Beispiels unter der Voraussetzung zu berechnen, dass der Träger einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehört, welche von Locomotiven der Radanordnung Fig. 18 befahren wird.

Nach A. 18, 5) 6) hat man bei beliebiger Belastung

(1) $$V_1 = -K_1, \qquad V_2 = -K_2,$$

(2) $$Y_1 = K_1 \frac{3d_1}{4h}, \qquad Y_2 = K_2 \frac{d_2}{2h}, \qquad Y_3 = K_3 \frac{d_3}{4h},$$

(3) $$X = -(3K_1 + 4K_2 + 3K_3)\frac{\lambda}{4h}.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen ergeben sich hieraus für Eigengewicht allein mit

$$K_1 = K_2 = K_3 = g\lambda = 2{,}4 \text{ tn}$$

wie im vorigen Beispiel

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_3 = -2{,}4$$

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Z}_3 = 2{,}55, \quad \mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{Z}_2 = 2{,}68, \quad \mathfrak{Y}_3 = \mathfrak{Z}_1 = 1{,}90,$$

$$\mathfrak{X} = -6 \text{ tn}.$$

Die grösste durch die Verkehrslast erreichbare Knotenpunktslast entsteht, wenn die Locomotive mit dem zweiten Rad über dem betreffenden Knotenpunkte steht,

$$K = 6 + 2 \,.\, 6 \frac{2{,}7}{4} + 4 \frac{1{,}5}{4} = 15{,}6 \text{ tn}.$$

Damit folgen die oberen Grenzbeanspruchungen

$$V_1 = V_2 = V_3 = -2{,}4 - 15{,}6 = -18$$

$$Y_1 = Z_3 = 2{,}55 + \frac{3 \,.\, 5{,}66}{16} 15{,}6 = 19{,}11$$

$$Y_2 = Z_2 = 2{,}68 + \frac{8{,}94}{8} \cdot 15{,}6 = 20{,}11$$

$$Y_3 = Z_1 = 1{,}90 + \frac{12{,}65}{16} 15{,}6 = 14{,}23 \text{ tn}.$$

Den oberen Grenzwerth von X erhalten wir, wenn Zug I (Fig. 24) mit Rad O über der Trägermitte steht. Es sind dann

$$K_1 = 6 \frac{0{,}1 + 1{,}4 + 2{,}7}{4} = 6{,}3 \quad K_2 = 15{,}6 \quad K_3 = 6 \frac{2{,}5}{4} = 3{,}75 \text{ tn},$$

womit

$$X = -6 - (3 \,.\, 6{,}3 + 4 \,.\, 15{,}6 + 3 \,.\, 3{,}75) \frac{1}{4} = -29{,}14 \text{ tn}.$$

Hätten wir den Zug nach l hin verschoben bis das nächste Rad über die Trägermitte gelangt wäre, so würde sich nur $X = -27{,}81$ ergeben haben und bei Verschiebung um ein Rad nach 0 hin nur $X = -26{,}2$ tn.

Bemerkung. Da wir im vorigen Beispiele X wesentlich grösser und alle übrigen Stabkräfte wesentlich kleiner als oben erhalten haben, so erkennt man wieder, wie wenig berechtigt es ist, anstatt bewegter Radlastzüge für beliebige Träger und Beanspruchungen dieselbe gleichmässig vertheilte Last p zu verwenden. Für die max M_x eines vollwandigen Trägers der Spannweite 16 m wäre nach Beispiel 8 das im vorigen Beispiel eingeführte $p = 3$ tn ein geeigneter Werth gewesen, während im vorliegenden Falle die genauen Lastäquivalente betragen

für X $$p = \frac{3K_1 + 4K_2 + 3K_3}{10\lambda} = 2{,}31 \text{ tn},$$

für alle übrigen Stäbe

$$p = \frac{K}{\lambda} = 3{,}90 \text{ tn}.$$

Aufgabe 19. Formeln für Endstäbe von einfachen Fachwerken. Für einfache Balkenfachwerke mit Auflagern am Untergurt die Grenzwerthe der Stabkräfte V_0, G_0 Fig. 42 und 43 bei Belastung durch beliebige feste Last und gleichmässig vertheilte bewegte Last oder bewegte Radlastzüge anzugeben.

Bezeichnen K_o, K_u die obere und untere Knotenpunktslast bei 0, so verlangt das Gleichgewicht gegen horizontale und verticale Verschiebung des Knotenpunkts 0 im Untergurt bezw. Obergurt

(1) für Fig. 42 $\quad G_0 = 0, \quad V_0 = K_u - V,$

(2) für Fig. 43 $\quad G_0 = 0, \quad V_0 = -K_o.$

Diese Formeln mit Ausnahme derjenigen für G_0 im Falle Fig. 42 und ebenso alle folgenden Beziehungen gelten übrigens auch für einfache Bogenfachwerke mit gleichen Stützhöhen, da für solche der Horizontalschub H ohne Einfluss auf V ist. Für Bogenfachwerke nach Anordnung von Fig. 42 wäre $G_0 = Hv : s$ (s Stablänge). Im Folgenden haben wir es nur noch mit V_0 zu thun.

Werden die Beiträge der festen Last zu den mit lateinischen Buchstaben bezeichneten Grössen durch entsprechende deutsche Buchstaben bezeichnet, so sind die Beanspruchungen durch die feste Last allein

(3) für Fig. 42 $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{K}_u - \mathfrak{V}$,

(4) für Fig. 43 $\mathfrak{V}_0 = - \mathfrak{K}_o$.

Wenn die feste Last beispielsweise mit g per Längeneinheit gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge ist und von g auf die Knotenpunkte des Obergurts und Untergurts bezw. g_o und g_u zu rechnen sind, dann liefern 3) 4)

(5) für Fig. 42 $\mathfrak{V}_0 = \frac{g_u v}{2} = \frac{gl}{2}$,

(6) für Fig. 43 $\mathfrak{V}_0 = - \frac{g_o v}{2}$.

Die von beliebigen Verkehrslasten $P_1, P_2, \ldots$ bei $a_1, a_2 \ldots$ herrührende Verticalreaction der Stütze 0 ist

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a)$$

und die von denselben erzeugte Knotenpunktslast bei 0, wenn die Verkehrslast in den Knotenpunkten der Gurtung von v auf den Träger kommt,

$$K = \frac{1}{v} \sum_0^v P(v-a).$$

Im Weiteren ist die Lagerung der Fahrbahn zu berücksichtigen.

a) **Die Fahrbahnlast greift in den Knotenpunkten des Obergurts an.** Dann liefert die Verkehrslast kein K_u, aber für Fig. 43 $K_o = K$, wir erhalten bei beliebiger Belastung

(7) für Fig. 42 $V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a)$,

(8) für Fig. 43 $V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{1}{v} \sum_0^v P(v-a)$.

Hiernach tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne oder gar nicht zu V_0 bei. Der Beitrag einer bestimmten Last P ist um so grösser, jemehr sich P der Stütze 0 nähert. Für bewegte Radlastzüge ergeben sich die oberen Grenzwerthe von V_0 aus 7) 8), wenn ein Zug II in der Richtung von l nach 0 mit dem Vorderrade O bei 0 steht. Die unteren Grenzwerthe treten für die feste Last allein ein. Bei gleichmässig vertheilter bewegter Last von p per Längeneinheit der ergriffenen Strecke sind die unteren Grenzwerthe ebenfalls $V_0 = \mathfrak{V}_0$, die oberen ergeben sich aus 7) 8) mit $P = pda$ oder direct aus 1) 2)

(9) für Fig. 42 $V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{pl}{2}$,

(10) für Fig. 43 $V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{pv}{2}$.

Wenn $\mathfrak{K}_o = 0$ gesetzt wird, also die feste Last wie die Verkehrslast nur in den Knotenpunkten des Obergurts angreifend gilt, dann hat man im Falle der Fig. 42 bei jeder Belastung $V_0 = -V$.

b) **Die Fahrbahnlast greift in den Knotenpunkten des Untergurts an.** In diesem Falle liefert die Verkehrslast kein K_o, aber für Fig. 42 $K_u = K$, womit bei jeder Belastung

(11) für Fig. 42 $V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{l-v}{lv} \sum_0^v Pa - \frac{1}{l} \sum_v^l P(l-a)$,

(12) für Fig. 43 $V_0 = \mathfrak{V}_0$.

Die Beanspruchung der Verticale Fig. 43 rührt nur von der durch Eigengewicht erzeugten Knotenpunktslast $\mathfrak{K}_o$ her, und deshalb kann diese Verticale nebst dem anstossenden Stabe des Obergurts bei unten liegender Fahrbahn ganz wegbleiben. Zur Beanspruchung der Verticale Fig. 42 tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne bei und zwar umsomehr, jemehr sie sich dem Punkte v nähern. Für bewegte Radlastzüge ergibt sich der obere Grenzwerth von V_0 aus 11), wenn ein Zug I mit Rad O über v steht, oder, wegen

(13) $$d V_0 = \left(\frac{1}{l} \sum_0^l P - \frac{1}{v} \sum_0^v P\right) da,$$

genau genommen, wenn die Maximalbedingung

(14) $$\sum_0^v P = \frac{v}{l} \sum_0^l P$$

erfüllt ist. Der untere Grenzwerth tritt für Eigengewicht allein ein. Bei gleichmässig vertheilter bewegter Last ist ebenfalls der untere Grenzwerth $V_0 = \mathfrak{V}_0$, der obere folgt aus 11) mit $P = pda$ oder direct aus 1)

(15) für Fig. 42 $V_0 = \mathfrak{V}_0 - p\frac{l-v}{2}$.

Auf die Beanspruchungen für Fig. 42 hätten wir auch aus Aufgabe 15 schliessen können, da mit dem dort eingeführten A einfach $V_0 = -A$ ist. Im Falle bewegter Radlastzüge kann der obere Grenzwerth dieses V_0 unter Umständen noch grösser als mit Zug I

möglich ausfallen, wenn ein Zug II von l nach 0 fahrend mit dem Vorderrade O bei v anlangt, womit nach 11)

$$(16) \qquad \text{für Fig. 42} \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{1}{l} \sum_v^l P(l-a).$$

Jedenfalls genügt es vielfach, die Berechnung demgemäss vorzunehmen.

c) **Die Fahrbahn greift zwischen beiden Gurten in der Endverticale an.** Es gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Beziehungen a) unter Berücksichtigung des Eigengewichts der Fahrbahn in $\mathfrak{K}_o$, g_o, für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Beziehungen b) mit Berücksichtigung des Eigengewichts der Fahrbahn in $\mathfrak{K}_u$, g_u. Dies ergiebt sich ohne Weiteres, wenn man wie oben die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ bei Fig. 42 für die unteren, bei Fig. 43 für die oberen Endpunkte der betreffenden Verticalenstücke ansetzt.

Beispiel 17. Dachbinder. Berechnung von Stabkräften aus Schnittgleichungen.

Für den in Fig. 44 angedeuteten Dachbinder beträgt die Belastung per Knotenpunkt der oberen Gurtung mit Ausnahme der beiden äussersten (welche halb so stark belastet sind) 5 tn. Die unteren Knotenpunkte gelten für unbelastet. Es sind sämmtliche Stabkräfte mittelst der Schnittgleichungen § 15, 1)—3) abzuleiten.

Da die beiden äussersten Knotenpunktslasten direct auf die Stützen übertragen werden, so kommen sie für die Berechnung der Stabkräfte nicht in Betracht. Die übrigen Knotenpunktslasten erzeugen bei 0 die Reaction

$$A = \frac{7 \,.\, 5}{2} = 17{,}5 \text{ tn}.$$

Im Folgenden sind die Gleichungen § 15, 1)—3) auf die in Fig. 44 ersichtlichen Schnitte I—IV angewandt und dabei die Drehpunkte der Momente in die den Schnitten vorhergehenden Knotenpunkte der oberen Gurtung gelegt.

$$\text{I} \begin{cases} Z_1 + X_1 \frac{4}{4{,}47} = 0 \\ 17{,}5 + X_1 \frac{2}{4{,}47} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} X_1 &= -\ 39{,}11 \text{ tn}, \\ Z_1 &= \quad 35 \end{aligned}$$

$$\text{II}\begin{cases} Z_2 + X_2 \frac{4}{4{,}47} + D_2 \frac{4}{4{,}47} = 0 & Z_2 = \quad 35 \\ 12{,}5 + X_2 \frac{2}{4{,}47} - D_2 \frac{2}{4{,}47} = 0 & X_2 = -33{,}52 \\ 17{,}5 \,.\, 4 - Z_2 \,.\, 2 = 0 & D_2 = -\ \ 5{,}59 \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} Z_3 + X_3 \frac{4}{4{,}47} + D_3 \frac{4}{5{,}66} = 0 & Z_3 = \quad 30 \\ 7{,}5 + X_3 \frac{2}{4{,}47} - D_3 \frac{2}{5{,}66} = 0 & X_3 = -27{,}94 \\ 17{,}5 \,.\, 8 - 5 \,.\, 4 - Z_3 \,.\, 4 = 0 & D_3 = -\ \ 7{,}07 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} Z_4 + X_4 \frac{4}{4{,}47} + D_4 \frac{4}{7{,}21} = 0 & Z_4 = \quad 25 \\ 2{,}5 + X_4 \frac{2}{4{,}47} - D_4 \frac{6}{7{,}21} = 0 & X_4 = -22{,}35 \\ 17{,}5 \,.\, 12 - 5 \,.\, 8 - 5 \,.\, 4 - Z_4 \,.\, 6 = 0 & D_4 = -\ \ 9{,}01. \end{cases}$$

Um die Beanspruchungen der Verticalen zu bestimmen, wenden wir die Gleichung § 15, 2) auf die Schnitte V—VIII an, wobei $V_5 = 0$ ist.

$$\begin{array}{lll} \text{V} & V_1 = 0 & V_1 = 0 \text{ tn} \\ \text{VI} & V_2 + D_2 \frac{2}{4{,}47} = 0 & V_2 = 2{,}5 \\ \text{VII} & V_3 + D_3 \frac{4}{5{,}66} = 0 & V_3 = 5 \\ \text{VIII} & V_4 + 2 D_4 \frac{6}{7{,}21} = 0 & V_5 = 15. \end{array}$$

Damit sind mit Rücksicht auf die symmetrische Anordnung der Stäbe und Belastung sämmtliche Stabkräfte bestimmt. Dieselben hätten sich zum Theil auch mit Hülfe andrer Schnitte und Drehpunkte als oben berechnen lassen. Da die beiden äussersten Verticalen abgesehen vom daran hängenden Eigengewicht keine Beanspruchung erleiden, so werden sie gewöhnlich weggelassen. Eine andre Berechnung dieses Trägers bringt Beispiel 18, direct verwendbare Formeln für die Stabkräfte enthalten §§ 38—40 (vgl. Beispiele 49 und 50), über den Einfluss schiefen Winddrucks siehe Beispiel 22.

Aufgabe 20. Freitragender Perrondachbinder. Berechnung von Grenzbeanspruchungen aus Schnittgleichungen.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen des Fachwerks Fig. 45 mittelst der Schnittgleichungen § 15, 1)—3) festzustellen.

Der Träger habe n Felder von gleichen Längen λ, die Längen der durch X_m, V_m, D_m beanspruchten Stäbe seien x, h_m, d_m und also

(1) $$x = \frac{1}{n}\sqrt{l^2 + h^2}, \quad h_m = \frac{m}{n}\,h, \quad d_m = \sqrt{\lambda^2 + h_{m-1}^2}.$$

Wir legen einen Schnitt s durch das m-te Feld und erhalten aus § 15, 1)—3)

$$Z_m + D_m \frac{\lambda}{d_m} + X_m \frac{\lambda}{x} = 0,$$

$$-\sum_0^{m-1} K - D_m \frac{h_{m-1}}{d_m} + X_m \frac{h}{nx} = 0,$$

$$-K_0 m\lambda - K_1 (m-1)\lambda - \cdots - K_{m-1}\lambda + X_m \frac{\lambda h_m}{x} = 0.$$

Wie aus dem Ansatze der letzten Gleichung hervorgeht, wurde der Drehpunkt für die Momente im untern Knotenpunkte der Verticale h_m angenommen. Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ für diesen Knotenpunkt lautet

$$V_m + D_m \frac{h_{m-1}}{d_m} = 0.$$

Aus vorstehenden vier Gleichungen und mit Rücksicht auf den Ausdruck für h_m ergeben sich die Stabkräfte bei beliebigen Knotenpunktslasten

(2) $$\begin{cases} X_m = \quad [mK_0 + (m-1)K_1 + \cdots + K_{m-1}]\,\dfrac{x}{h_m}, \\ Z_m = -\,[(m-1)K_0 + (m-2)K_1 + \cdots + K_{m-2}]\,\dfrac{\lambda}{h_{m-1}}, \\ D_m = -\,[K_1 + 2K_2 + \cdots + (m-1)K_{m-1}]\,\dfrac{d_m}{m h_{m-1}}, \\ V_m = \quad [K_1 + 2K_2 + \cdots + (m-1)K_{m-1}]\,\dfrac{1}{m}. \end{cases}$$

Der obere Stützpunkt hat, abgesehen von der direct auf ihn übertragenen Last K_n, einfach die Zugkraft X_n aufzunehmen. Die Reactionscomponenten des untern Stützpunktes folgen aus

$$A + D_n \frac{h_{n-1}}{d_n} = 0, \qquad B + Z_n + D_n \frac{\lambda}{d_n} = 0$$

mit Rücksicht auf 2)

(3) $$\begin{cases} A = [K_1 + 2K_2 + \cdots + (n-1)K_{n-1}]\,\dfrac{1}{n}, \\ B = [nK_0 + (n-1)K_1 + \cdots + K_{n-1}]\,\dfrac{\lambda}{h}. \end{cases}$$

Etwas bequemer als aus den angeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen für den unteren Stützpunkt, hätte sich B ergeben aus der Bedingung für die äusseren Horizontalkräfte am Träger

$$B - X_n \frac{\lambda}{x} = 0.$$

Die Gleichungen 2) 3) zeigen, dass die Grenzwerthe sämmtlicher Stabkräfte und Stützenreactionen bei Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein eintreten, dass indessen für X_m, D_m, V_m die Lasten von K_m bis K_n, für Z_m diejenigen von K_{m-1} bis K_n überhaupt ohne Einfluss sind.

Gewöhnlich wird die Belastung als gleichmässig vertheilt auf den Träger angenommen. Bezeichnet dann q die Belastung per Längeneinheit, so gehen mit

$$K_1 = K_2 = \cdots = K_{m-1} = q\lambda, \qquad K_0 = \frac{q\lambda}{2}$$

die Gleichungen 2) 3) in die folgenden über

$$(4) \qquad \begin{cases} X_m = m \dfrac{qlx}{2h}, & Z_m = -(m-1)\dfrac{ql\lambda}{2h}, \\ D_m = -\dfrac{ql}{2h} d_m, & V_m = \quad (m-1)\dfrac{q\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$(5) \qquad A = \frac{n-1}{2} q\lambda, \qquad B = \frac{ql^2}{2h}.$$

Ist g das Eigengewicht und p die Verkehrslast (Schnee- und Winddruck) per Längeneinheit, dann ergeben 4) 5) die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen mit $q = g + p$ und $q = g$, sie stehen im Verhältniss $g + p : g$.

Man könnte annehmen, dass die Beanspruchung des unteren Gurtungsstabes im Felde $m = 1$ nach 2) 3) allgemein $Z_1 = 0$ sei. Es ist jedoch zu beachten, dass in jenem Felde die Diagonale mit dem unteren Gurtungsstabe zusammenfällt, sodass die Beanspruchung des Letzteren $Z_1 + D_1 = D_1$ ist, oder, wie die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den unteren Knotenpunkt der Verticale h_1 ergibt, $Z_1 = Z_2$. Da die Verticale h_1 keine rechnungsmässige Beanspruchung erleidet, so wird sie gewöhnlich weggelassen (siehe auch Aufgabe 26).

Aufgabe 21. Füllungsglieder von Parallelträgern beliebigen einfachen Systems.

Für Balkenfachwerke einfachen Systems mit zwei Gelenkauflagern und horizontalen Gurtungen sind die Beanspruchungen der Füllungs-

glieder bei beliebiger Belastung und deren Grenzwerthe bei bewegter Verkehrslast auszudrücken.

Wir legen einen Schnitt s so durch den Träger, dass ausser dem fraglichen Füllungsgliede nur beide Gurtungen getroffen werden. Es sind dann zwei Fälle möglich: entweder das Füllungsglied steigt von s aus nach dem Trägertheil vor diesem Schnitte hin an (Fig. 46), oder es fällt nach ihm ab (Fig. 47). In den folgenden Gleichungen gelten im ersten Falle die oberen, im zweiten die unteren Vorzeichen. Dabei sind jedoch solche Glieder ausgeschlossen, welche nicht in beiden begrenzenden Knotenpunkten mit andern gleichzeitig wirksamen zusammenhängen. Die Beanspruchung dieser ergibt sich immer aus der Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ für den freien Knotenpunkt.

Nach § 15, 2) hat man bei Parallelträgern einfachen Systems allgemein

(1) $$V_s \mp Y \frac{h}{y} = 0, \qquad Y = \mp V_s \frac{y}{h}$$

und speziell für beliebig belastete Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern wegen § 8, 7)

(2) $$Y = \pm (S' - S) \frac{y}{lh},$$

worin

(3) $$S = \sum_0^s Ke, \qquad S' = \sum_s^l K(l - e)$$

die Momente der Knotenpunktslasten zwischen den Schnitten 0 und s hinsichtlich des Punktes 0, und zwischen den Schnitten s und l hinsichtlich des Punktes l bedeuten. Es bezeichne $\mathfrak{Y}$ den Beitrag des Eigengewichts allein zu Y, während ausserdem beliebige Verkehrslasten $P_1, P_2, \ldots$ bei $a_1, a_2, \ldots$ auf die Fahrbahn wirken und der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger bei den Punkten c, v aufliegt. Dann liefert 2) mit § 10, 2) für beliebige Belastung

(4) $$\begin{cases} Y = \mathfrak{Y} \mp \left[\sum_0^c Pa + \frac{l-v+c}{v-c} \sum_c^v P(z-a) - \sum_v^l P(l-a)\right] \frac{y}{lh} \\ \text{mit} \quad z = \frac{lc}{l-v+c}. \end{cases}$$

Für den häufig vorkommenden Fall, dass das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Fahrbahn ge-

rechnet wird (auf die Knotenpunkte, in welchen die Fahrbahnlast angreift) folgt aus 2) mit § 10, 5)

$$(5) \qquad \mathfrak{Y} = \pm (l - c - v) \frac{gy}{2h},$$

für alle andern Fälle kann $\mathfrak{Y}$ aus 2) erhalten werden.

Die erste Formel 4) zeigt, dass die Lasten zwischen 0 und z in einem Sinne, diejenigen zwischen z und l im andern Sinne zu Y beitragen. Für verticale Füllungsglieder vereinfachen sich wegen $y = h$ die vorstehenden wie die folgenden Ausdrücke von Y.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Da nach 4) die Influenzlinie von Y zwischen 0 und c, c und v, v und l geradlinig verläuft und ihre Ordinaten (oder Beiträge einer Last $P = 1$ zu Y)

$$\text{bei } a = v \qquad b = \pm (l - v) \frac{y}{lh},$$

$$\text{bei } a = c \qquad b = \mp c \frac{y}{lh}$$

sind, so liefert das Verfahren § 12, c als Grenzwerthe von Y

$$(6) \qquad \begin{cases} Y = \mathfrak{Y} \pm p \dfrac{(l-v)y}{lh} \dfrac{l-z}{2}, \\ Y = \mathfrak{Y} \mp p \dfrac{cy}{lh} \dfrac{z}{2}, \end{cases}$$

oder nach Einsetzen des Ausdrucks 4) von z

$$(7) \qquad \begin{cases} Y = \mathfrak{Y} \pm \dfrac{(l-v)^2}{l-v+c} \dfrac{py}{2h}, \\ Y = \mathfrak{Y} \mp \dfrac{c^2}{l-v+c} \dfrac{py}{2h}. \end{cases}$$

Die gleichen Werthe ergeben sich selbstverständlich, wenn in 4) einmal $P = 0$ von 0 bis z und $P = pda$ von z bis l, das andre Mal $P = Pda$ von 0 bis z und $P = 0$ von z bis l gesetzt wird.

Nach § 12, c erhält man etwas zu ungünstige Näherungsausdrücke für die Grenzwerthe, wenn in 6) v und c an Stelle von z gesetzt werden, womit wir erhalten

$$(8) \qquad \begin{cases} Y = \mathfrak{Y} \pm (l - c)(l - v) \dfrac{py}{2lh}, \\ Y = \mathfrak{Y} \mp cv \dfrac{py}{2lh}. \end{cases}$$

Bewegte Radlastzüge. Mit Rücksicht auf Formel 4) oder den Verlauf der Influenzlinie, welche bei z zwischen c und v die Abscissenaxe schneidet und bei c, v selbst ihre Grenzordinaten hat, er-

geben sich nach § 12, b die Grenzwerthe von Y bei Belastung durch Zug II von v bis l mit Vorderrad O bei v

$$(9) \qquad Y = \mathfrak{Y} \pm \frac{y}{lh} \sum_{v}^{l} P(l-a),$$

und bei Belastung durch Zug II von 0 bis c mit Vorderrad O bei c

$$(10) \qquad Y = \mathfrak{Y} \mp \frac{y}{lh} \sum_{0}^{c} Pa.$$

Nach 4) hat man für jede unendlich kleine Verrückung da eines Systems gleichzeitig auf dem Träger Platz findender Lasten in festen Entfernungen die Aenderung von Y

$$(11) \qquad dY = \pm \left[\sum_{0}^{l} P - \frac{l}{v-c} \sum_{c}^{v} P \right] \frac{y}{lh}\, da.$$

Hieraus folgt als Bedingung für diejenigen Stellungen des Systems, bei welchen mathematische Maxima oder Minima von $\mathfrak{Y}$ eintreten

$$(12) \qquad \sum_{c}^{v} P = \frac{v-c}{l} \sum_{0}^{l} P.$$

Diese Bedingung kann wie in den Beispielen 25 und 28 zur Correctur von Zugstellungen verwendet werden, was aber für praktische Zwecke selten nöthig sein wird.

Beispiel 18. Dachbinder. Berechnung von Stabkräften aus Momentengleichungen.

Die in Beispiel 17 verlangten Stabkräfte mittelst der Ritterschen Momentenmethode zu berechnen.

Die Knotenpunktslasten, abgesehen von den ohne Vermittelung des Trägers auf die Stützen übertragenen bei 0 und l, erzeugen Stützenreactionen

$$A = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17{,}5 \text{ tn}.$$

Im Folgenden sind die Stabkräfte nach Anweisung von § 15 aus Momentengleichungen für die in Fig. 44 angedeuteten Schnitte I—IV bestimmt. Der Drehpunkt für die Momente liegt also bei drei getroffenen Stäben mit unbekannten Beanspruchungen im Durchschnitte derjenigen beiden, deren Beanspruchung augenblicklich nicht bestimmt wird, bei nur zwei getroffenen in einem beliebigen Punkte der Richtungslinie des nicht zu berechnenden Stabes.

$$\text{I}\begin{cases}17{,}5 \,.\, 4 + X_1 \,.\, 1{,}79 = 0 & X_1 = -39{,}12 \text{ tn}\\ 17{,}5 \,.\, 4 - Z_1 \,.\, 2 = 0 & Z_1 = 35\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}17{,}5 \,.\, 8 - 5 \,.\, 4 + X_2 \,.\, 3{,}58 = 0 & X_2 = -33{,}52\\ 17{,}5 \,.\, 4 - Z_2 \,.\, 2 = 0 & Z_2 = 35\\ 5 \,.\, 4 + D_2 \,.\, 3{,}58 = 0 & D_2 = -5{,}59\end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases}17{,}5 \,.\, 12 - 5\,(4+8) + X_3 \,.\, 5{,}37 = 0 & X_3 = -27{,}93\\ 17{,}5 \,.\, 8 - 5 \,.\, 4 - Z_3 \,.\, 4 = 0 & Z_3 = 30\\ 5\,(4+8) + D_3 \,.\, 8{,}48 = 0 & D_3 = -7{,}08\end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases}17{,}5 \,.\, 16 - 5\,(4+8+12) + X_4 \,.\, 7{,}16 = 0 & X_4 = -22{,}34\\ 17{,}5 \,.\, 12 - 5\,(4+8) - Z_4 \,.\, 6 = 0 & Z_4 = 25\\ 5\,(4+8+12) + D_4 \,.\, 13{,}31 = 0 & D_4 = -9{,}02\,.\end{cases}$$

Es fehlen nun noch die Beanspruchungen der Verticalen. Da alle Stabkräfte aus Momentengleichungen bestimmt werden sollen, so können wir zur Berechnung wählen: für V_1 einen Schnitt, welcher X_1, V_1, Z_1 trifft,

$$-V_1 \,.\, 4 = 0, \qquad V_1 = 0 \text{ tn},$$

für V_2 einen Schnitt, welcher X_2, V_2, Z_3 trifft,

$$5 \,.\, 4 - V_2 \,.\, 8 = 0, \qquad V_2 = 2{,}5 \text{ tn},$$

für V_3 einen Schnitt, welcher X_3, V_3, Z_4 trifft,

$$5\,(4+8) - V_3 \,.\, 12 = 0, \qquad V_3 = 5 \text{ tn},$$

für V_4 einen Schnitt, welcher X_4, V_4, Z_5 und D_5 trifft,

$$5\,(4+8+12) - V_4 \,.\, 16 - D_5 \,.\, 13{,}31 = 0, \qquad V_4 = 15 \text{ tn}.$$

In der letzten Gleichung war zu beachten, dass $D_5 = D_4$ ist.

Bemerkungen. Wir hätten die Schnitte auch anders als oben wählen und beispielsweise die Beanspruchungen der Gurtungsstäbe aus Momentengleichungen für die zuletzt verwendeten vier Schnitte berechnen können. Wenn nicht wie im vorliegenden Falle eine bestimmte Methode der Berechnung vorgeschrieben ist, wird man natürlich auf möglichst einfache und elegante Weise zum Ziele zu kommen suchen.

Um die Grenzwerthe der Stabkräfte festzustellen, könnte man ganz wie in Beispiel 19 oder Aufgabe 20, 23 vorgehen. Doch wird die allgemeine Behandlung der Dreiecksträger des betrachteten Systems zeigen (§§ 38—40), und schon die obigen Gleichungen lassen es erkennen, dass unter Voraussetzung nur verticaler Belastung die Grenzbeanspruchungen aller Stäbe bei Totalbelastung des ganzen Trägers

und Eigengewicht allein eintreten und die Grenzwerthe einer bestimmten Stabkraft im Verhältniss der Knotenpunktslasten für diese Belastungsfälle stehen. Entsprechen also Totalbelastung und Eigengewicht die Knotenpunktslasten 5 tn und 2 tn, so bilden die bereits berechneten Beanspruchungen die oberen Grenzwerthe der Stabkräfte, die unteren sind $^2/_5$ so gross.

Beispiel 19. Berechnung von Grenzbeanspruchungen aus Momentengleichungen.

Für den in Fig. 48 angedeuteten Fachwerkträger betrage per laufenden Meter das Eigengewicht $g = 0{,}6$ tn, die Verkehrslast $p = 3$ tn. Eigengewicht und Verkehrslast sollen in den Knotenpunkten des Obergurts allein angreifend gelten. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen nach der Ritterschen Methode abzuleiten.

Wir gehen nach der Anweisung in § 15 und § 12, d) vor. Für die drei mittleren Knotenpunkte hat man die Belastung durch Eigengewicht 0,6 . 4 = 2,4 tn, durch Verkehrslast 3 . 4 = 12 tn, durch beide zusammen 14,4 tn; die Belastung der beiden äussersten Knotenpunkte ist halb so gross.

Die Stützenreaction bei 0 drückt sich für Totalbelastung aus

$$V = (G_0 + K_0) + \frac{3}{4}(G_1 + K_1) + \frac{1}{2}(G_2 + K_2) + \frac{1}{4}(G_3 + K_3).$$

Da hiernach alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu V beitragen, so sind Grenzwerthe der Stützenreactionen

$$V = 14{,}4\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 28{,}8 \text{ tn},$$

$$V = 28{,}8\,\frac{2{,}4}{14{,}4} = 4{,}8 \text{ tn}.$$

Die äussersten Knotenpunktslasten werden ohne Vermittelung des Trägers auf die Stützen übertragen, die von den übrigen herrührende Stützenreaction bei 0 sei durch A bezeichnet.

Zur Berechnung der Stabkräfte verwenden wir folgende Momentengleichungen für die Trägertheile links der angedeuteten Schnitte

Stabkraft	Schnitt	Gleichung
X_1	I	$A \,.\, 2 + X_2 \,.\, 2 = 0$
X_2	III	$A \,.\, 6 - (G_1 + K_1)\,2 + X_2 \,.\, 2 = 0$
Z_1	I	$A \,.\, 2 - Z_1 \,.\, 1{,}41 = 0$

Stabkraft	Schnitt	Gleichung
Z_2	II	$A\,.\,4 - Z_2\,.\,2{,}68 = 0$
Z_3	IV	$A\,.\,8 - (G_1 + K_1)4 - Z_3\,.\,4 = 0$
Y_1	II	$-A\,.\,2 - Y_1\,.\,4{,}24 = 0$
Y_2	III	$-A\,.\,2 + (G_1 + K_1)\,6 + Y_2\,.\,5{,}04 = 0$
Y_3	IV	$-A\,.\,\infty + (G_1 + K_1)\,\infty - Y_3\,\frac{4\,\infty}{4{,}47} = 0\,.$

Nach Einsetzen von

$$A = \frac{3}{4}(G_1 + K_1) + \frac{1}{2}(G_2 + K_2) + \frac{1}{4}(G_3 + K_3)$$

nehmen diese Gleichungen folgende Formen an.

$$X_1 = -\frac{1}{4}[3(G_1 + K_1) + 2(G_2 + K_2) + G_3 + K_3],$$

$$X_2 = -\frac{1}{8}[5(G_1 + K_1) + 6(G_2' + K_2) + 3(G_3 + K_3)],$$

$$Z_1 = \frac{1}{2{,}83}[3(G_1 + K_1) + 2(G_2 + K_2) + G_3 + K_3],$$

$$Z_2 = \frac{1}{2{,}68}[3(G_1 + K_1) + 2(G_2 + K_2) + G_3 + K_3],$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}[G_1 + K_1 + 2(G_2 + K_2) + G_3 + K_3],$$

$$Y_1 = -\frac{1}{8{,}48}[3(G_1 + K_1) + 2(G_2 + K_2) + G_3 + K_3],$$

$$Y_2 = \frac{1}{10{,}08}[-9(G_1 + K_1) + 2(G_2 + K_2) + G_3 + K_3],$$

$$Y_3 = \frac{1}{3{,}57}[G_1 + K_1 - 2(G_2 + K_2) - G_3 - K_3].$$

Hiernach treten die Grenzwerthe der Stabkräfte, mit Ausnahme der beiden letzten, bei Totalbelastung und Eigengewicht allein ein. Wir erhalten, wenn die Eigengewichtsbeanspruchungen mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden, in Tonnen:

$$X_1 = -\frac{14{,}4\,.\,6}{4} = -21{,}60 = 6\,\mathfrak{X}_1,$$

$$X_2 = -\frac{14{,}4\,.\,14}{8} = -25{,}20 = 6\,\mathfrak{X}_2,$$

$$Z_1 = \frac{14{,}4\,.\,6}{2{,}83} = 30{,}53 = 6\,\mathfrak{Z}_1,$$

$$Z_2 = \frac{14{,}4\,.\,6}{2{,}68} = 32{,}24 = 6\,\mathfrak{Z}_2,$$

$$Z_3 = \frac{14,4 \cdot 4}{2} = 28,80 = 6\, \mathfrak{Z}_3,$$

$$Y_1 = -\frac{14,4 \cdot 6}{8,48} = -10,19 = 6\, \mathfrak{Y}_1.$$

Für die beiden letzten Stäbe ergeben sich die Eigengewichtsbeanspruchungen und beide Grenzbeanspruchungen wie folgt.

$$\mathfrak{Y}_2 = \frac{2,4}{10,08}(-9 + 2 + 1) = -1,43 \text{ tn},$$

$$Y_2 = -1,43 + \frac{12 \cdot 3}{10,08} = 2,14,$$

$$Y_2 = -1,43 - \frac{12 \cdot 9}{10,08} = -12,14;$$

$$\mathfrak{Y}_3 = \frac{2,4}{3,57}(1 - 2 - 1) = -1,34,$$

$$Y_3 = -1,34 + \frac{12 \cdot 1}{3,57} = 2,04,$$

$$Y_3 = -1,34 - \frac{12 \cdot 3}{3,57} = -11,42.$$

Damit sind alle verlangten Grenzwerthe bestimmt. (Andere Berechnung siehe Beispiel 23).

Beispiel 20. Polonceau-Dachbinder. Berechnung von Stabkräften aus Momentengleichungen.

Für den in Fig. 50 angedeuteten Dachbinder beträgt die Belastung durch Eigengewicht, Schnee und Winddruck per Knotenpunkt der oberen Gurtung, mit Ausnahme der beiden äussersten, 5 tn. Die übrigen Knotenpunkte gelten für unbelastet. Es sind sämmtliche Stabkräfte mittelst der Ritterschen Methode zu berechnen.

Die beiden äussersten Knotenpunktslasten, welche direct auf die Stützen übertragen werden, kommen für die Berechnung der Stabkräfte nicht in Betracht. Die übrigen erzeugen Stützenreactionen von $A = 17,5$ tn. Zur Berechnung der Stäbe führen wir zunächst die Schnitte I bis IV. Die Drehpunkte der Momente sind aus den angesetzten Gleichungen ersichtlich.

$$\text{I} \begin{cases} 17,5 \cdot 5 + O_1 \cdot 2,24 = 0 & O_1 = -39,12 \text{ tn} \\ 17,5 \cdot 4 - U_1 \cdot 2 = 0 & U_1 = 35 \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} 17,5 \cdot 5 - 5 \cdot 1 + O_2 \cdot 2,24 = 0 & O_2 = -36,39 \\ 17,8 \cdot 8 - 5 \cdot 4 - U_2 \cdot 4 = 0 & U_2 = 30 \\ 5 \cdot 4 - X \cdot 4 = 0 & X = 5 \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases}17{,}5\,.\,10 - 5\,(2+6-2) + O_4\,.\,4{,}47 = 0 & O_4 = -\,32{,}42\\ 5\,(4+8+12) - U_4\,.\,8 = 0 & U_4 = \quad 15\\ 17{,}5\,.\,16 - 5\,(4+8+12) - Z\,.\,8 = 0 & Z = \quad 20\end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases}17{,}5\,.\,13 - 5\,(5+9) - Z\,.\,4 + O_3\,.\,2{,}24 = 0 & O_3 = -\,34{,}66\\ 17{,}5\,.\,8 - 5\,.\,4 - Z\,.\,4 - U_3\,.\,4 = 0 & U_3 = \quad 10\\ 17{,}5\,.\,16 - 5\,(8+12) - Z\,.\,8 - Y\,.\,4 = 0 & Y = \quad 5.\end{cases}$$

Da alle Stabkräfte nach Ritters Methode berechnet werden sollen, so wählen wir für N_1 einen Schnitt durch O_2, N_1, U_1

$$5\,.\,4 + N_1\,.\,4{,}47 = 0, \qquad N_1 = -\,4{,}47,$$

für N_2 einen Schnitt durch O_3, Y, N_2, U_2

$$5\,(4+8) + Y\,.\,4 + N_2\,.\,8{,}94 = 0, \qquad N_2 = -\,8{,}94,$$

für N_3 einen Schnitt durch O_3, N_3, U_4 und die symmetrisch zu O_3, U_4 liegenden Stäbe

$$-\,5\,.\,4 - N_3\,.\,4{,}47 = 0, \qquad N_3 = -\,4{,}47.$$

Damit sind alle Stabkräfte bestimmt. Ueber allgemeine Formeln zur Berechnung der Stabkräfte siehe Aufgabe 22 und 23, über die Berücksichtigung schiefen Winddrucks Beispiel 21.

Aufgabe 22. Polonceau-Dachbinder. Formeln für die Stabkräfte.

Es sind Ausdrücke für sämmtliche Stabkräfte der in Fig. 51 und 52 skizzirten Dachbinder abzuleiten.

Im Folgenden möge A die von den K erzeugte Stützenreaction bei 0 bedeuten. Lateinische Zahlen beziehen sich auf die zur Berechnung der Stabkräfte geführten Schnitte.

Erstes System. Fig. 51. Für die Stabkräfte ergeben sich mit $A = \frac{3}{2} K$ folgende Gleichungen.

$$\text{I}\begin{cases}A a + O_1\,.\,c = 0 & O_1 = -\frac{3a}{2c} K\\ A\frac{l}{4} - U_1\frac{cb}{e} = 0 & U_1 = \frac{3el}{8cb} K\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}A a - K\left(a - \frac{l}{4}\right) + O_2 c = 0 & O_2 = -\frac{l+2a}{4c} K\\ A\frac{l}{2} - K\frac{l}{4} - Zh = 0 & Z = \frac{l}{2h} K\\ K\frac{l}{4} + Zd - U_2\frac{2cb}{e} = 0 & U_2 = \left(1 + \frac{2d}{h}\right)\frac{el}{8cb} K\end{cases}$$

$$N + K\frac{l}{4b} = 0 \qquad N = -\frac{l}{4b}K.$$

Speziell für den Fall $d = 0$ hat man wegen $\frac{cb}{e} = \frac{h}{2}$

$$U_1 = \frac{3}{2}Z, \qquad U_2 = \frac{1}{2}Z.$$

Zweites System. Fig. 52. Wir erhalten mit $A = \frac{7}{2}K$ folgende Gleichungen für die Stabkräfte

$$\text{I}\begin{cases} A\frac{a}{2} + O_1\frac{c}{2} = 0 & O_1 = -\frac{7a}{2c}K \\ A\frac{l}{8} - U_1\frac{cb}{2e} = 0 & U_1 = \frac{7el}{8cb}K \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} A\frac{a}{2} - K\left(\frac{a}{2} - \frac{l}{8}\right) + O_2\frac{c}{2} = 0 & O_2 = -\frac{l + 10a}{4c}K \\ A\frac{l}{4} - K\frac{l}{8} - U_2\frac{cb}{e} = 0 & U_2 = -\frac{3el}{4cb}K \\ K\frac{l}{8} - X\frac{cb}{e} = 0 & X = \frac{el}{8cb}K \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} Aa - K\left[\left(a - \frac{l}{8}\right) + \left(a - \frac{l}{4}\right)\right. & \\ \qquad \left. - \left(\frac{3l}{8} - a\right)\right] + O_4c = 0 & O_4 = -\frac{3l + 2a}{4c}K \\ A\frac{l}{2} - K\frac{l}{8}(1 + 2 + 3) - Zh = 0 & Z = \frac{l}{h}K \\ K\frac{l}{8}(1 + 2 + 3) + Zd - U_4\frac{2cb}{e} = 0 & U_4 = \left(3 + \frac{4d}{h}\right)\frac{el}{8cb}K \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} A\left(\frac{l}{4} + \frac{a}{2}\right) - K\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{l}{8}\right) & \\ \qquad - Z\frac{h}{2} + O_3\frac{c}{2} = 0 & O_3 = -\frac{l + 3a}{2c}K \\ A\frac{l}{4} - K\frac{l}{8} - Z\left(h - \frac{h+d}{2}\right) - U_3\frac{cb}{e} = 0 & U_3 = \left(1 + \frac{2d}{h}\right)\frac{el}{4cb}K \\ A\frac{l}{2} - K\frac{l}{8}(2 + 3) - Zh - Y\frac{cb}{c} = 0 & Y = \frac{el}{8cb}K \end{cases}$$

$$N_1 + K\frac{l}{4b} = 0 \qquad N_1 = -\frac{l}{4b}K$$

$$N_2 + K\frac{l}{4b} + (X + Y)\frac{c}{e} = 0 \qquad N_2 = -\frac{l}{2b}K$$

$$N_3 + K\frac{l}{4b} = 0 \qquad N_3 = -\frac{l}{4b}K.$$

Zur Vereinfachung der Berechnung können dienen

$$U_1 = 7X, \quad U_2 = 6X, \quad U_3 = \left(1 + \frac{2d}{h}\right) 2X, \quad U_4 = \left(3 + \frac{4d}{h}\right) X,$$

$$Y = X, \qquad N_2 = 2N_1, \qquad N_3 = N_1 .$$

Speziell für den Fall $d = 0$ (Fig. 54) hat man mit $\frac{cb}{e} = \frac{h}{2}$

$$X = \frac{l}{8h} K, \qquad U_3 = 2X, \qquad U_4 = 3X.$$

Ueber die Grenzbeanspruchungen der Stäbe beider betrachteten Fachwerke siehe den Schlussabsatz der folgenden Aufgabe. Ist g die feste Last und $q = g + p$ die Totalbelastung per Längeneinheit Träger, so ergeben sich die Grenzbeanspruchungen für das System Fig. 51 mit

$$K = \frac{ql}{4} \quad \text{und} \quad K = \frac{gl}{4}$$

für das System Fig. 52 mit

$$K = \frac{ql}{8} \quad \text{und} \quad K = \frac{gl}{8}.$$

Die oberen und unteren Grenzbeanspruchungen stehen also für alle Stäbe im Verhältniss $q : g$

Aufgabe 23. Polonceau-Dachbinder. Allgemeinere Formeln. Für die in voriger Aufgabe behandelten Dachbinder sind die Ausdrücke der Stabkräfte bei beliebigen Knotenpunktslasten sowie die Grenzbeanspruchungen der Stäbe festzustellen.

Wir gehen zunächst ganz wie in Aufgabe 22 vor. Die vom Träger übertragenen Knotenpunktslasten erhalten von 0 nach l hin die Indices 1, 2, 3, ...

Erstes System. Fig. 51. Die Bedingungsgleichungen lauten wie in Aufgabe 22, nur ist K_1 für K zu setzen und

$$A = \frac{1}{4}(3K_1 + 2K_2 + K_3).$$

Damit entstehen folgende Ausdrücke der Stabkräfte für beliebige K.

$$O_1 = -\frac{a}{4c}(3K_1 + 2K_2 + K_3),$$

$$O_2 = -\frac{a}{4c}\left[\left(\frac{l}{a} - 1\right) K_1 + 2K_2 + K_3\right],$$

$$U_1 = \frac{el}{16cb}(3K_1 + 2K_2 + K_3),$$

$$U_2 = \frac{eld}{16cbh}\left[\left(1+\frac{2h}{d}\right)K_1 + 2K_2 + K_3\right],$$

$$Z = \frac{l}{8h}(K_1 + 2K_2 + K_3), \quad N = -\frac{l}{4b}K_1.$$

Für $K_1 = K_2 = K_3 = K$ gehen diese Gleichungen in die in der vorigen Aufgabe erhaltenen über.

Zweites System. Fig. 52. Wir verwenden die gleichen Schnitte und analogen Bedingungsgleichungen wie in Aufgabe 22. Man hat

$$A = \frac{1}{8}(7K_1 + 6K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7)$$

und erhält folgende Stabkräfte für beliebige K

$$O_1 = -\frac{a}{8c}[7K_1 + 6K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7],$$

$$O_2 = -\frac{a}{8c}\left[\left(\frac{2l}{a}-1\right)K_1 + 6K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7\right],$$

$$O_3 = -\frac{a}{8c}\left[\left(\frac{l}{a}-1\right)(K_1 + 2K_2) + \left(\frac{l}{a}+5\right)K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7\right],$$

$$O_4 = -\frac{a}{8c}\left[\left(\frac{l}{a}-1\right)(K_1 + 2K_2 + 3K_3) + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7\right];$$

$$U_1 = \frac{el}{32cb}[7K_1 + 6K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7],$$

$$U_2 = \frac{el}{32cb}[3K_1 + 6K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7],$$

$$U_3 = \frac{el}{16cb}\left[K_1 + 2K_2 + K_3 + \frac{d}{2h}(K_1 + 2K_2 + 3K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7)\right],$$

$$U_4 = \frac{el}{16cb}\left[K_1 + 2K_2 + 3K_3 + \frac{d}{2h}(K_2 + 2K_2 + 3K_3 + 4K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7)\right];$$

$$N_1 = -\frac{l}{4b}K_1, \quad N_2 = -\frac{l}{8b}(K_1 + 2K_2 + K_3), \quad N_3 = -\frac{l}{4b}K_3,$$

$$X = \frac{el}{8cb}K_1, \qquad Y = \frac{el}{8cb}K_3.$$

Für $K_1 = K_2 = \cdots = K_7 = K$ gehen alle diese Gleichungen in die entsprechenden der vorigen Aufgabe über.

Die Gleichungen für beide Systeme zeigen, dass die Grenzbeanspruchungen sämmtlicher Stäbe bei möglichst grossen Werthen aller K (Totalbelastung des ganzen Trägers) und möglichst kleinen Werthen

derselben (Eigengewicht allein) eintreten. Da für diese Fälle die K gleich gross zu sein pflegen, so genügen zur Bestimmung der Grenzbeanspruchungen, abgesehen vom Einflusse nicht verticalen Winddrucks (Beispiel 21), die Gleichungen der vorigen Aufgabe. Sie liefern die Grenzbeanspruchungen, wenn die Grenzwerthe der K eingesetzt werden, und für jeden bestimmten Stab stehen die beiden Ersteren im Verhältniss der beiden Letzteren.

Beispiel 21. Polonceau-Dachbinder. Berücksichtigung schiefen Winddrucks.

Den Einfluss des Winddrucks auf die Beanspruchungen des in Fig. 54 angedeuteten Dachbinders unter folgenden Voraussetzungen zu berechnen. Binderweite 4 m. Winddruck bei normal getroffener Fläche 150 kg per qm. Windrichtung um 10° gegen den Horizont fallend parallel der Trägerebene. Es ist einmal die dem verschiebbaren Auflager anliegende, einmal die abstehende Dachfläche vom Winde getroffen anzunehmen.

Es sei $\mathfrak{w}$ der Winddruck per qm Fläche für den Fall, dass Letztere vom Winde normal getroffen wird. Da die auf eine Dachfläche AB (Fig. 53) kommende Windmasse zu derjenigen auf eine gleich grosse normal getroffene Fläche im Verhältniss $\sin(\alpha+\beta):1$ steht, so ist der nicht normale Winddruck per qm von AB

$$\mathfrak{w}\sin(\alpha+\beta).$$

Wenn ferner die Reibung der Luft am Dache vernachlässigt wird, so kommt für den Träger nur die Normalcomponente

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{w}\sin^2(\alpha+\beta) \tag{1}$$

zur Wirkung. Für den vorliegenden Fall haben wir

$$\mathfrak{w}=150,\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2},\qquad \alpha=26^0 34',\qquad \beta=10^0,$$

$$\mathfrak{n}=150\sin^2 36^0 34'=53{,}24\text{ kg},$$

und demgemäss den der Dachfläche normalen Winddruck für jeden der drei innern Knotenpunkte einer vom Winde getroffenen Binderhälfte

$$N=4{,}47\,.\,4\,.\,53{,}24=952\text{ kg},$$

wofür wir abgerundet $N=1$ tn setzen wollen, sodass die beiden äussersten Knotenpunkte der Binderhälfte je $\frac{1}{2}$ tn Winddruck erhalten.

Bei beliebigen Werthen der N beider Binderhälften bestehen für die vom Winddruck herrührenden Stabkräfte der Trägerhälfte am unverschiebbaren Auflager folgende Gleichungen.

$$\text{I}\begin{cases} V.5-\frac{N}{2}4{,}47+O_1.2{,}24=0 \\ V.4-H.2-\frac{N}{2}4{,}47-U_1.2=0 \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} V.5-\frac{N}{2}4{,}47+O_2.2{,}24=0 \\ V.8-H.4-N.4{,}47\,(1+1)-U_2.4=0 \\ N.4{,}47-X.4=0 \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} V.10-N.4{,}47\,(1+1-1)+O_4.4{,}47=0 \\ N.4{,}47\,(1+2+3)-U_4.8=0 \\ V.16-H.8-N.4{,}47\,(2+3+2+1)-Z.8=0 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} V.13-H.4-N.4{,}47\left(\frac{3}{2}+2+1\right)-Z.4+O_3.2{,}24=0 \\ V.8-H.4-N.4{,}47\,(1+1)-Z.4-U_3.4=0 \\ V.16-H.8-N.4{,}47\,(2+3+2)-Z.4-Y.4=0 \end{cases}$$

$$N+N_1=0 \qquad O_2=O_1$$

$$N+N_2+(X+Y)\frac{2{,}24}{5}=0$$

$$N+N_3=0 \qquad O_3=O_4.$$

Dieselben Gleichungen gelten für die Stabkräfte der zweiten Trägerhälfte, wenn wir uns 0 und V' für H und V gesetzt denken.

Dachfläche beim verschiebbaren Auflager getroffen. Fig. 54. Für die Stützenreactionen hat man

$$V.32-1.4{,}47\left(1+2+3+\frac{4}{2}\right)=0, \qquad V=1{,}12 \text{ tn},$$

$$V'=4\frac{4}{4{,}47}-1{,}12=2{,}46 \text{ tn}, \qquad H=4\frac{2}{4{,}47}=1{,}79 \text{ tn}.$$

Obige Gleichungen liefern für die erste Binderhälfte (beim unverschiebbaren Auflager) mit $V=1{,}12$, $H=1{,}79$, $N=0$,

$$O_1=O_2=O_3=O_4=-2{,}5 \text{ tn},$$

$$U_1=U_2=Z=0{,}45 \text{ tn},$$

$$U_3=U_4=N_1=N_2=N_3=X=Y=0,$$

und für die zweite Binderhälfte (beim verschiebbaren Auflager) mit $V=2{,}46$, $H=0$, $N=1$,

$$O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = -4{,}5 \text{ tn},$$
$$U_1 = 3{,}80, \quad U_2 = 2{,}68, \quad U_3 = 2{,}23, \quad U_4 = 3{,}35,$$
$$N_1 = N_3 = -1, \quad N_2 = -2, \quad X = Y = 1{,}12.$$

Die Stabkraft Z kann natürlich ebensowohl zur ersten wie zur zweiten Binderhälfte gerechnet werden.

Dachfläche beim unverschiebbaren Auflager getroffen. Fig. 55. Für die Stützenreactionen hat man

$$1 \,.\, 4{,}47 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) - V' \,.\, 32 = 0, \qquad V' = 1{,}12 \text{ tn},$$
$$V = 4 \frac{4}{4{,}47} - 1{,}12 = 2{,}46 \text{ tn}, \qquad H = -4 \frac{2}{4{,}47} = -1{,}79 \text{ tn}.$$

Die obigen Bedingungsgleichungen der Stabkräfte ergeben für die erste Binderhälfte mit $V = 2{,}46$, $H = -1{,}79$, $N = 1$,

$$O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = -4{,}5,$$
$$U_1 = 5{,}59, \quad U_2 = 4{,}47, \quad U_3 = 2{,}23, \quad U_4 = 3{,}35,$$
$$N_1 = N_3 = -1, \quad N_2 = -2, \quad X = Y = 1{,}12,$$

und für die zweite Binderhälfte mit $V = 1{,}12$, $H = 0$, $N = 0$,

$$O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = -2{,}5,$$
$$U_1 = U_2 = Z = 2{,}24,$$
$$U_3 = U_4 = N_1 = N_2 = N_3 = X = Y = 0.$$

Auf mancherlei Vereinfachungen, welche die Berechnung der Stabkräfte zulässt, braucht nicht erst hingewiesen zu werden, da sie sich beim Rechnen von selbst ergeben und zuviel Erklären die Uebersicht stört. Erwähnt sei nur, dass die erste Trägerhälfte im zweiten Belastungsfall genau so belastet ist wie die zweite im ersten, dass also, abgesehen vom Einflusse des Horizontalschubs auch entsprechende Stabkräfte entstehen müssen. Ebenso müssen die nicht vom Horizontalschub beeinflussten Stabkräfte der zweiten Trägerhälfte im zweiten Belastungsfall und der ersten im ersten Fall einander gleich sein. Der Horizontalschub übt aber bei horizontalem Untergurt, wie sofort klar und auch aus obigen Gleichungen ersichtlich, nur auf die Stabkräfte U_1, U_2 und Z einen Einfluss.

Grenzwerthe der Stabkräfte. Um diese zu erhalten, hat man die Grenzwerthe der Stabkräfte für feste Last und Schneedruck mit den Beanspruchungen durch Winddruck so zu combiniren, dass möglichst ungünstige Grenzwerthe im Ganzen entstehen. Die Ersteren ergeben sich wie in Beispiel 20 oder bequemer nach den Formeln in Auf-

gabe 22. Angenommen, es seien $K = 2$ und $K = 4$ die Knotenpunktslasten für feste Last allein und feste Last mit Schneedruck, dann sind die entsprechenden Stabkräfte gleich $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{5}$ der in Beispiel 20 berechneten (Aufgabe 22). Weiteres ist aus der folgenden Tabelle zu ersehen, in welcher wir, um das Verfahren allgemein zu zeigen, von möglichen Vereinfachungen abgesehen haben.

Stabkräfte	Grenzwerthe ohne Winddruck		Stabkräfte durch Winddruck				Grenzwerthe im Ganzen				Beispiel 20
			I. Binderhälfte		II. Binderhälfte		I. Binderhälfte		II. Binderhälfte		
$-O_1$	31,30	15,65	2,5	4,5	4,5	2,5	35,80	15,65	35,80	15,65	39,12
$-O_2$	29,51	14,76	2,5	4,5	4,5	2,5	34,01	14,76	34,01	14,76	36,8
$-O_3$	27,73	13,86	2,5	4,5	4,5	2,5	32,23	13,86	32,23	13,86	34,66
$-O_4$	25,94	12,97	2,5	4,5	4,5	2,5	30,44	12,97	30,44	12,97	32,42
U_1	28	14	0,45	5,59	3,80	2,24	33,59	14	31,80	14	35
U_2	24	12	0,45	4,47	2,68	2,24	28,47	12	26,68	12	30
U_3	8	4	0	2,23	2,23	0	10,23	4	10,23	4	10
U_4	12	6	0	3,35	3,35	0	15,35	6	15,35	6	15
$-N_1$	3,58	1,79	0	1	1	0	4,58	1,79	4,58	1,79	4,47
$-N_2$	7,15	3,58	0	2	2	0	9,15	3,58	9,15	3,58	8,94
$-N_3$	3,58	1,79	0	1	1	0	4,58	1,79	4,58	1,79	4,47
X	4	2	0	1,12	1,12	0	5,12	2	5,12	2	5
Y	4	2	0	1,12	1,12	0	5,12	2	5,12	2	5
Z	16	8	0,45	2,24	0,45	2,24	18,24	8	18,24	8	20

Hiernach weichen die Grenzwerthe entsprechender Stabkräfte auf der ersten und zweiten Trägerhälfte nur für U_1 und U_2 von einander ab, wie dies nach einer oben gemachten Bemerkung selbstverständlich ist.

Bemerkungen. Bei Dachbindern wird der einseitige Winddruck vielfach nicht berücksichtigt, sondern die Berechnung mit einem auf das ganze Dach gleichmässig vertheilten Verticaldruck des Windes von

$$(2) \qquad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{n}}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{w}\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$$

per qm Dachfläche durchgeführt, wobei sich im vorliegenden Falle per Knotenpunkt ein Winddruck von $4 \,.\, 4{,}47 \,.\, \mathfrak{v} =$ ca. 1 tn ergeben hätte. Berechnet man demgemäss die Grenzwerthe der Stabkräfte

mit $K = 5$ tn und $K = 2$ tn nach den Formeln der Aufgabe 22, so folgen die in der letzten Columne obiger Tabelle angeführten oberen Grenzwerthe (Beispiel 20), welche entweder zu ungünstig oder nur um wenig zu günstig sind (grösste Abweichung im letzteren Sinne 15 gegen 15,35 tn). Als untere Grenzwerthe hat man nach beiden Berechnungsarten die Beanspruchungen durch die feste Last allein. Das einfachere gewöhnliche Verfahren würde also im jetzigen Falle genügt haben und Gleiches lässt sich bei nicht zu steilen Dächern auch für andere Binder nachweisen. Steht dies einmal fest, so kann man für die betreffenden Fälle von jenem Verfahren Gebrauch machen. Die übliche Begründung desselben, nach welcher die oben erhaltene Windcomponente $\mathfrak{n}$ nochmals in eine Verticalcomponente $\mathfrak{v}$ (Fig. 56) und eine *wirkungslose* Componente längs der Dachfläche zerfallen soll, ist dagegen unrichtig, wie man schon daraus schliessen kann, dass sich die Componente $\mathfrak{v}$ mit wachsendem α der Grenze ∞ nähert. Die Normalcomponente $\mathfrak{n}$ kommt *vollständig* zur Wirkung und zerlegt man sie in Componenten, so ergeben die Letzteren *zusammen* den Einfluss von N.

Beispiel 22. Dachbinder. Berücksichtigung schiefen Winddrucks.

Den Einfluss des Winddrucks auf die Stabkräfte des in Fig. 57 angedeuteten Dachbinders unter gleichen Voraussetzungen wie im vorigen Beispiel zu berechnen.

Bei beliebigen Werthen der N bestehen für die vom Winddrucke herrührenden Stabkräfte der ersten (dem unverschiebbaren Auflager anliegenden) Binderhälfte folgende Gleichungen:

$$\text{I}\begin{cases} V.4 - \frac{N}{2}\frac{4}{4{,}47}4 + X_1 . 1{,}79 = 0 \\ V.4 - H.2 - \frac{N}{2}4{,}47 - Z_1 . 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} V.8 - N\frac{4}{4{,}47}(4+4) + N\frac{2}{4{,}47}2 + X_2 . 3{,}58 = 0 \\ V.4 - H.2 - \frac{N}{2}4{,}47 - Z_2 . 2 = 0 \\ N.4{,}47 + D_2 . 3{,}58 = 0 \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} V.12 - N\frac{4}{4{,}47}(4+8+6) + N\frac{2}{4{,}47}(2+4) + X_3 . 5{,}37 = 0 \\ V.8 - H.4 - N.4{,}47(1+1) - Z_3 . 4 = 0 \\ N.4{,}47(1+2) + D_3 . 8{,}48 = 0 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} V.16 - N\frac{4}{4,47}(4+8+12+8)+N\frac{2}{4,47}(2+4+6)+X_4.7,15=0 \\ V.12 - H.6 - N.4,47\left(1+2+\frac{3}{2}\right) - Z_4.6=0 \\ N.4,47(1+2+3)+D_4.13,31=0 \end{cases}$$

$$V_1 + 0 = 0 \qquad V_1 = 0$$

$$V_2 + D_2\frac{2}{4,47} = 0 \qquad V_2 = \frac{N}{1,79}$$

$$V_3 + D_3\frac{4}{5,56} = 0 \qquad V_3 = \frac{12}{5,56}\,\frac{4,47}{8,48}\,N$$

$$V_4 + (D_4 + D_4')\frac{6}{7,21} = 0 \qquad V_4 = \frac{36}{7,27}\,\frac{4,47}{13,31}(N + N').$$

Dabei wurde vorübergehend die zu D_4 symmetrisch liegende Diagonalenbeanspruchung durch D_4' bezeichnet. Vorstehende Gleichungen gelten auch für die Stabkräfte der zweiten Binderhälfte, wenn N', N, V', 0 für N, N' V, H gesetzt werden. Doch berechnen wir zunächst die erste Binderhälfte.

Dachfläche beim verschiebbaren Auflager getroffen. Wie im vorigen Beispiel sind $V = 1,12$, $H = 1,79$. Mit diesen Werthen und $N = 0$, $N' = 1$ liefern obige Geichungen in Tonnen

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = -2,5,$$
$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 0,45,$$
$$D_2 = D_3 = D_4 = 0,$$
$$V_1 = V_2 = V_3 = 0, \qquad V_4 = 1,68.$$

Dachfläche beim unverschiebbaren Auflager getroffen. Wie im vorigen Beispiel ergeben sich $V = 2,46$, $H = -1,79$. Mit diesen Werthen und $N = 1$, $N' = 0$ liefern obige Gleichungen in Tonnen

$$\begin{array}{llll} X_1 = -4,5 & X_2 = -3,75 & X_3 = -3 & X_4 = -2,25 \\ Z_1 = 5,59 & Z_2 = 5,59 & Z_3 = 4,47 & Z_4 = 3,36 \\ & D_2 = -1,25 & D_3 = -1,58 & D_4 = -2,02 \\ V_1 = 0 & V_2 = 0,56 & V_3 = 1,14 & V_4 = 1,68. \end{array}$$

Da die zweite Binderhälfte im zweiten und ersten Belastungsfalle genau so belastet ist wie die erste Binderhälfte im ersten und zweiten Falle, so gelten die berechneten Beanspruchungen auch für die zweite Binderhälfte, abgesehen vom Einflusse des Horizontalschubs H. Obige Gleichungen zeigen, dass ein solcher Einfluss nur für die Stäbe des Untergurts besteht und dass die Z der zweiten Binderhälfte aus den bereits berechneten hervorgehen, wenn wir den

im ersten und zweiten Belastungsfalle gefundenen Werthen Z bezw. $H = 1{,}79$ und $H = -1{,}79$ zufügen, womit für die zweite Binderhälfte gelten im zweiten Belastungsfalle

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 2{,}24$$

und im ersten Belastungsfalle

$$Z_1 = Z_2 = 3{,}80, \qquad Z_3 = 2{,}68, \qquad Z_4 = 1{,}57 \text{ tn}.$$

Dieselben Werthe hätten sich natürlich auch aus obigen Gleichungen wie im vorigen Beispiele berechnen lassen.

Grenzwerthe der Stabkräfte. Dieselben ergeben sich wie im vorigen Beispiel durch Combination der Grenzwerthe für feste Last und Schneedruck mit den Stabkräften für Winddruck. Angenommen, es seien die Knotenpunktslasten für feste Last $K = 2$, für feste Last und Schneedruck $K = 4$ tn, dann sind die entsprechenden Stabkräfte gleich $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{5}$ der in Beispiel 17 oder 18 berechneten. Das Weitere ist aus nachstehender Tabelle zu ersehen, in welcher sich die ersten und zweiten drei Z auf die erste und zweite Trägerhälfte beziehen, alle übrigen Stabkräfte aber für beide Trägerhälften gelten. Für jede Belastung sind $V_1 = 0$, $Z_1 = Z_2$.

Stabkräfte	Grenzwerthe ohne Winddruck		Stabkräfte durch Winddruck		Grenzwerthe im Ganzen		Beispiel 18
$-X_1$	31,30	15,65	2,5	4,5	35,80	15,65	39,12
$-X_2$	26,82	13,41	2,5	3,75	30,57	13,41	33,52
$-X_3$	22,34	11,17	2,5	3	25,34	11,17	27,93
$-X_4$	17,87	8,94	2,5	2,75	20,62	8,94	22,34
Z_2	28	14	0,45	5,59	33,59	14	35
Z_3	24	12	0,45	4,47	28,47	12	30
Z_4	20	10	0,45	3,36	23,36	10	25
Z_2	28	14	3,8	2,24	31,8	14	35
Z_3	24	12	2,68	2,24	26,78	12	30
Z_4	20	10	1,57	2,24	22,24	10	25
$-D_2$	4,47	2,24	0	1,25	5,72	2,24	5,59
$-D_3$	5,66	2,83	0	1,58	7,24	2,83	7,08
$-D_4$	7,22	3,61	0	2,02	9,24	3,61	9,02
V_2	2	1	0	0,56	2,56	1	2,5
V_3	4	2	0	1,14	5,14	2	5
V_4	12	6	1,68	1,68	13,68	6	15.

Die oberen Grenzwerthe der Stabkräfte, welche sich mit einem gleichmässig auf das ganze Dach verbreiteten Verticaldruck des Windes von 1 tn per Knotenpunkt in Beispiel 18 ergaben, sind in der letzten Columne beigefügt. Wie im vorigen Falle lieferte also die einfachere gewöhnliche Berechnung im Allgemeinen etwas zu ungünstige Werthe, die unteren Grenzwerthe stimmen bei beiden Berechnungen überein.

Aufgabe 24. Abänderung der Trägerenden beim Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks.

Zu entscheiden, welche Aenderung der Stabkräfte gegenüber dem Fachwerke Fig. 58 mit horizontalen Gurtungen und gleich oder verschieden langen Feldern durch Abänderung der Trägerenden nach Fig. 59 entstehen, wenn von äussern Activkräften nur Lasten wirken.

Für die Anordnung Fig. 59 verlangt das Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung des Knotenpunkts 0 und gegen horizontale und verticale Verschiebung des Knotenpunkts 1 im Untergurte

$$H + Z + \frac{\lambda_1}{d_1} X = 0, \quad Z - Z_2 = 0, \quad V_1 - K_u = 0.$$

Im Falle von Fig. 58 gelten fürs Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung der Knotenpunkte 0 und 1 im Untergurt

$$H + Z_1 = 0, \qquad Z_1 - Z_2 + \frac{\lambda_1}{d_1} D_1 = 0.$$

Da Z_2 in beiden Fällen denselben Werth hat, so folgt aus der letzten Gleichung mit der zweiten und vierten

$$H + Z = \frac{\lambda_1}{d_1} D_1$$

und damit aus der ersten

$$X = -D_1.$$

Wir können aussprechen: *Werden bei dem* (einfachen oder continuirlichen) *Fachwerk Fig. 58 die Trägerenden nach Fig. 59 abgeändert, so hat man für jede Belastung und also bei bewegter Belastung auch für die Grenzbeanspruchungen*

$$X = -D_1, \qquad Z = Z_2, \qquad V_1 = K_u,$$

worin sich D_1, Z_2 *auf Fig. 58 beziehen und* K_u *die Belastung des Knotenpunkts 1 im Untergurt bedeutet. Alle übrigen Stabkräfte bleiben ungeändert.*

Aufgabe 25. Eine Eigenschaft der Parabelträger.

Es soll bewiesen werden, dass für Parabelträger einfachen Systems mit Verticalen der Horizontalschub H ohne Einfluss auf die Beanspruchungen der Diagonalen ist.

Für die Beanspruchung der Diagonale im $m$ten Felde eines Fachwerks einfachen Systems und beliebiger Gurtungsformen hat man nach § 16, 5) bei beliebig gerichteten Knotenpunktskräften

(1) $$D_m = \mp M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} \quad \text{mit} \quad w = \mathfrak{x}_m - \varepsilon(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}),$$

worin nach A. 5, 1)

(2) $$M_s = Vu - Hw - \sum_0^s K(u-e) + \sum_0^s L(w-c).$$

Die letzte Summe fällt weg, wenn wie gewöhnlich sämmtliche Knotenpunktskräfte vertical sind. Für Parabelträger ergaben sich in § 17

$$\mathfrak{x}_m = m(n-m)\frac{4f_x}{n^2}, \qquad \varepsilon = \frac{m(n-m)}{n-2m+1}.$$

Wir erhalten damit aus 1) in 2)

(3) $$w = 0.$$

Bei beliebigen Parabelträgern einfachen System mit Verticalen (Sichelträger, Linsenträger, Segmentträger) ist der Horizontalschub H ohne Einfluss auf die Beanspruchungen der Diagonalen, diese können für Bogenträger nach denselben Formeln wie für Balkenträger berechnet werden.

Bemerkungen. Selbstverständlich ist der Einfluss des Horizontalschubs auch auf jede andre Stabkraft gleich Null, welche proportional einem Momente M_s mit $w = 0$ ist. Es trifft dies u. A. bei Trägern beliebigen einfachen Systems mit einer die Auflager enthaltenden horizontalen Gurtung für alle diejenigen Stäbe zu, welche nicht in jener Gurtung liegen. Der Fall des Parabelträgers ist jedoch deshalb von Interesse, weil bei ihm keine weitere Voraussetzung bezüglich der Gurtungen besteht und weil parabolische Sichelträger auch als Bogenträger Verwendung finden.

Für Träger einfachen Systems mit Verticalen hat H auch dann keinen Einfluss auf die Diagonalenbeanspruchungen, wenn die Gurtungen bei sonst beliebigen Formen symmetrisch zu einer Horizontalen durch die Auflager liegen, womit eben wieder das entsprechende w gleich Null wird. Bei Dreiecksträgern des fraglichen Systems hat H weder

auf die Diagonalenbeanspruchungen noch auf die Verticalenbeanspruchungen einen Einfluss, da wir wegen $\mathfrak{x}_m = mc$, $\varepsilon = \nu = m$ in 1) und in

$$V_m = \pm M_s \frac{1}{\nu\lambda} \quad \text{mit} \quad w = \mathfrak{x}_m - \nu(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1})$$

$w = 0$ haben.

Aufgabe 26. Freitragender Perrondachbinder. Ableitung der Formeln durch Spezialisirung.

Die Stabkräfte des in Aufgabe 20 behandelten Perrondachbinders Fig. 45 durch Spezialisirung der Formeln des § 18 abzuleiten.

Wird Punkt 0 wie in Aufgabe 20 ans freie Ende gelegt, so hat man

(1) $$H = 0, \qquad M = 0, \qquad \varepsilon = \nu = m.$$

Die letzten Werthe nach § 17, 4) 5). Mit 1) liefern die Gleichungen § 18, 2) für beliebige Belastung

(2) $$\begin{cases} X_m = -\left[(n-m)S + m(M' + S')\right] \dfrac{x}{lh_m}, \\ Z_m = \quad \left[(n-m+1)S + (m-1)(M' + S')\right] \dfrac{1}{n\,h_{m-1}}, \\ D_m = -\dfrac{S}{m\lambda} \dfrac{d_m}{h_{m-1}}, \\ V_m = \quad \dfrac{S}{m\lambda}. \end{cases}$$

Bei der in Fig. 45 angedeuteten Belastung der oberen Knotenpunkte allein hat man das Moment der äussern Kräfte links von Schnitt l in Hinsicht des Punktes l

$$M' = -\left[nK_0 + (n-1)K_1 + \cdots + K_{n-1}\right]\lambda,$$

das Moment der Knotenpunktslasten vor Schnitt s durch Feld m in Hinsicht des Punktes 0

$$S = \left[K_1 + 2K_2 + \cdots + (m-1)K_{m-1}\right]\lambda,$$

das Moment der Knotenpunktslasten nach Schnitt s durch Feld m in Hinsicht des Punktes l

$$S' = \left[K_{n-1} + 2K_{n-2} + \cdots + (n-m)K_m\right]\lambda.$$

Die beiden letzten Momente gelten auch für einen Schnitt s durch die Stäbe x_m, h_m, z_m und also für sämmtliche Gleichungen 2). Dieselben lassen sich damit in unserm Falle auch wie folgt ausdrücken

$$(3)\quad\begin{cases} X_m = \quad [mK_0 + (m-1)K_1 + \cdots + K_{m-1}]\dfrac{x}{h_m}, \\ Z_m = -[(m-1)K_0 + (m-2)K_1 + \cdots + K_{m-2}]\dfrac{1}{h_{m-1}}, \\ D_m = -[K_1 + 2K_2 + \cdots + (m-1)K_{m-1}]\dfrac{d_m}{mh_{m-1}}, \\ V_m = \quad [K_1 + 2K_2 + \cdots + (m-1)K_{m-1}]\dfrac{1}{m}, \end{cases}$$

welche Formeln mit A. 20, 2) übereinstimmen und zu den dort angeschlossenen Bemerkungen und Vereinfachungen Anlass geben. Auch die Stützenreactionen wurden in A. 20 bereits bestimmt.

Aufgabe 27. Fachwerke mit statischen Bedingungen.
Die Veränderlichkeit der Verticalenlängen einfacher Balkenfachwerke des in §§ 16—18 behandelten Systems für folgende Fälle festzustellen: a) die Knotenpunktslasten rechts oder links einer Diagonale sollen keinen Einfluss auf die Beanspruchung dieser Diagonale haben; b) bei gleichmässig über den ganzen Träger vertheilter Last sollen überhaupt keine Beanspruchungen der Diagonalen entstehen; c) die Beanspruchungen aller Verticalen sollen bei bestimmter Belastung den gleichen Werth C haben.

a) Die dritte Gleichung § 18, 2) ergibt die Beanspruchung der Diagonale m bei beliebiger Belastung wegen $M = M' = H = 0$

$$D_m = \mp [(n - m + \varepsilon) S + (m - \varepsilon) S'] \frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}\,.$$

Hiernach ist die rechtsseitige Belastung ohne Einfluss auf D_m für

$$\varepsilon = m = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{m-1}{m},$$

d. h. wenn bei beliebiger Form der einen Gurtung die Verticalenlängen wie die Ordinaten einer durch den Coordinatenursprung gehenden Geraden variiren, wie beispielsweise für Dreiecksträger mit Gurtungsschnitten der Abscisse 0 (§ 17). Die linksseitige Belastung ist ohne Einfluss für

$$\varepsilon = m - n = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{n - m + 1}{n - m},$$

d. h. wenn bei beliebiger Form einer Gurtung die Verticalenlängen wie die Ordinaten einer bei l die Abscissenaxe schneidenden Geraden

variiren, wie beispielsweise für Dreieckträger mit Gurtungsschnitten der Abscisse l (§ 17).

b) Nach § 18, 10) hat man, wenn die Belastung mit q per Längeneinheit auf die ganze Länge gleichmässig vertheilt ist

$$D_m = \mp [m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1)] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{q\lambda}{2}.$$

Soll dabei keine Diagonalbeanspruchung entstehen, so muss sein

$$\varepsilon = \frac{m(n-m)}{n-2m+1} = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{m(n-m)},$$

d. h. bei beliebiger Form einer Gurtung müssen die Verticalenlängen wie die Ordinaten eines Parabelbogens mit verticaler Axe in Hinsicht einer durch die Bogenenden gehenden Abscissenaxe variiren, wie dies beispielsweise beim Parabelträger der Fall ist (§ 17). Da nach § 18, 4) 5) im angenommenen Belastungsfall beim nun bestimmten Träger

$$Z_{m+1} \frac{\lambda}{z_{m+1}} = Z_m \frac{\lambda}{z_m} = -X_m \frac{\lambda}{x_m},$$

so sind die Beanspruchungen aller Gurtungsstäbe proportional deren Längen und ihre Horizontalcomponenten numerisch gleich.

c) Nach § 18, 2) hat man die Beanspruchung der Verticale m bei beliebiger Belastung

$$V_m = \mp [(n-m+v)S + (m-v)S'] \frac{1}{vl}.$$

Wird dieser Ausdruck gleich C gesetzt, so folgt durch Auflösung nach v

$$v = \frac{(n-m)S + mS'}{S' - S \pm Cl}$$

und speziell, wenn die Verticalen keine Beanspruchungen erleiden sollen,

$$v = \frac{(n-m)S + mS'}{S' - S}.$$

Für Träger mit horizontaler X-Gurtung, horizontaler Z-Gurtung und zu einer beliebigen horizontalen symmetrischen Gurtung ist mit v nach § 16, 12) 15) 18) ohne Weiteres auch die Veränderlichkeit der Verticalenlängen bestimmt (sie hängt von der Belastung ab), in den übrigen Fällen folgt dieselbe aus § 16, 2) nachdem die Form einer Gurtung gewählt ist.

Vorstehende Beispiele lassen erkennen, wie leicht mit Hülfe der ε, v statischen Bedingungen genügt werden kann.

Aufgabe 28. Mittelverticale von Balkenfachwerken.

Die Beanspruchungen V_σ der mittleren Verticale Fig. 60 und Fig. 61 bei $n = 2\sigma$ Feldern der Länge λ und beliebiger Belastung des Trägers auszudrücken, wenn im Falle von Fig. 60 die oberen, im Falle von Fig. 61 die unteren Gurtungsstäbe der zwei Mittelfelder symmetrisch zur mittleren Verticale liegen, die Stäbe der übrigen Felder aber beliebig angeordnet sind.

Wir führen die in Fig. 60 und 61 ersichtlichen Bezeichnungen ein. h, x_σ seien die Längen der durch V_σ, X_σ beanspruchten Stäbe, $r_0, r_1, .. r_n$ die Resultanten der in den Verticalen 0, 1, .. n angreifenden Lasten. Die Ordinatendifferenz

$$(1) \qquad \Delta = \mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_{\sigma-1}$$

der Knotenpunkte, welche den Stab x_σ begränzen, kann positiv oder negativ sein. Dann gelten in den abzuleitenden Gleichungen die oberen Vorzeichen für Fig. 60 (X-Gurtung im Felde σ oben), die unteren für Fig. 61 (X-Gurtung im Felde σ unten).

Da x_σ und der angrenzende Gurtungsstab der zweiten Trägerhälfte symmetrisch zur Verticale σ liegen, so ergiebt die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den zwischenliegenden Knotenpunkt, dass diese Gurtungsstäbe gleich stark beansprucht sind und die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf denselben Knotenpunkt

$$(2) \qquad V_\sigma \pm X_\sigma \frac{2\Delta}{x_\sigma} \pm K_\sigma = 0.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale σ an, so ist dieselbe bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung nicht in K_σ zu berücksichtigen, wohl aber bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung, wie sich ergibt, wenn man für den Grenzpunkt beider Verticalenstücke die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ anschreibt. Zur Bestimmung von X_σ verwenden wir die Momentengleichung für den Trägertheil links eines Schnittes durch Feld σ:

$$(V - r_0)\sigma\lambda - r_1(\sigma-1)\lambda - r_2(\sigma-2)\lambda - \cdots - r_{\sigma-1}\lambda \pm X_\sigma \frac{\lambda h}{x_\sigma} = 0$$

und erhalten wegen

$$V = r_0 + \frac{2\sigma-1}{2\sigma} r_1 + \frac{2\sigma-2}{2\sigma} r_2 + \cdots + \frac{1}{2\sigma} r_{2\sigma-1}:$$

$$X_\sigma = \mp [r_1 + 2r_2 + \cdots + (\sigma - 1)\, r_{\sigma-1} + \sigma r_\sigma + (\sigma - 1)\, r_{\sigma+1} + \cdots + 2r_{2\sigma-2} + r_{2\sigma-1}] \frac{x_\sigma}{2h}.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in 2) folgt

(3) $$V_\sigma = [r_1 + 2r_2 + \cdots + (\sigma - 1)\, r_{\sigma-1} + \sigma r_\sigma + (\sigma - 1)\, r_{\sigma+1} + \cdots + 2r_{2\sigma-2} + r_{2\sigma-1}] \frac{\varDelta}{h} \mp K_\sigma.$$

Die Gleichungen 2) 3) gelten bei beliebiger Belastung. Angenommen beispielsweise wir haben eine auf die ganze Trägerlänge gleichmässig vertheilte Last von q per Längeneinheit, dann liefert 2) mit $r_1 = r_2 = \cdots = r_{2\sigma-1} = q\lambda$

(4) $$V_\sigma = \frac{ql}{4h} n\varDelta \mp K_\sigma.$$

Wenn also das Eigengewicht mit g per Längeneinheit gleichmässig vertheilt ist und $K_\sigma = \lambda g_x$ vom Eigengewichte herrührt, dann ist die Beanspruchung durch das Eigengewicht allein

(5) $$\mathfrak{V}_\sigma = \frac{gl}{4h} n\varDelta \mp \lambda g_x.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale σ an, so ist das Eigengewicht der Fahrbahn nur bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_x zu berücksichtigen.

Da K_σ einen Theil von r_σ bildet, so ersieht man, dass in folgenden Fällen alle Verkehrslasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu V_σ beitragen:

1) wenn die Fahrbahnlast auf Knotenpunkt σ der Z-Gurtung wirkt, also nicht zu K_σ beiträgt;
2) wenn $\varDelta$ gleich Null oder für Fig. 60 negativ, für Fig. 61 positiv ist;
3) wenn $\sigma\varDelta > h$ für Fig. 60 oder $\sigma\varDelta < h$ für Fig. 61 ist.

Für alle diese Fälle, welche in der Folge besonders interessiren, lassen sich die Grenzwerthe von V_σ nach Kenntniss derjenigen von X_σ aus 2) berechnen. Wir wollen deshalb spezielle Ausdrücke der Grenzwerthe nur unter der Voraussetzung ableiten, dass die Verkehrslast mit p per Längeneinheit gleichmässig vertheilt auf die ergriffene Strecke ist. Man erhält dann für die vorerwähnten Fälle mit Rücksicht auf 4):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte σ der X-Gurtung angreift,

(6) $$V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{pl}{4h} n\varDelta \mp p\lambda, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma.$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte σ der Z-Gurtung angreift,

(7) $$V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{pl}{4h} n\varDelta, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma.$$

Greift im Falle Fig. 60 für $\sigma\varDelta < h$ oder im Falle Fig. 61 für $\sigma\varDelta > h$ die Fahrbahnlast im Knotenpunkte σ der X-Gurtung an, dann ergeben sich aus 3) nach der Methode vorausbestimmter Knotenpunktslasten (§ 12), wenn einmal alle Knotenpunkte der Fahrbahngurtung mit Ausnahme des mittleren, und einmal nur dieser belastet werden, die Grenzwerthe

(8) $$V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{n-2}{4h} p\lambda\varDelta, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{pl}{2h}\varDelta \mp p\lambda.$$

Greift schliesslich die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale σ an, dann gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe 7), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung, wenn für Fig. 60 $\varDelta$ negativ oder $\sigma\varDelta > h$ und für Fig. 61 $\varDelta$ positiv oder $\sigma\varDelta < h$ ist, die Grenzwerthe 6), wenn dies nicht zutrifft die Grenzwerthe 8).

Wir haben bei obiger Ableitung Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern vorausgesetzt. Die Ableitung gilt jedoch auch bei Trägern mit Horizontalschub H, wenn dieser keinen Einfluss auf V, X_σ ausübt.

III. Abschnitt.

Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern.

Beispiel 23. Beliebige einfache Systeme mit gleichmässig vertheilter bewegter Last.

Für das in Fig. 62 angedeutete Balkenfachwerk beträgt per laufenden Meter das Eigengewicht $g = 0{,}6$ tn, die Verkehrslast $p = 3$ tn, also die Totallast $q = g + p = 3{,}6$ tn. Das Eigengewicht soll auf die Knotenpunkte des Obergurts allein vertheilt gelten, in welchen auch die Fahrbahnträger aufliegen. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu bestimmen.

Bezeichnet M_s das Moment der äussern Kräfte links eines beliebigen Schnittes s durch den Träger, dann gelten zur Bestimmung der Stabkräfte bei jeder Belastung folgende Momentengleichungen für den Trägertheil links von s:

Stabkraft	Schnitt s	Gleichung
X_1	I	$M_s + 2 X_1 = 0$
X_2	III	$M_s + 4 X_1 = 0$
Z_1	I	$M_s - 1{,}41\, Z_1 = 0$
Z_2	II	$M_s - 2{,}68\, Z_2 = 0$
Z_3	IV	$M_s - 4\, Z_3 = 0$
Y_1	II	$M_s - 4{,}24\, Y_1 = 0$
Y_2	III	$M_s + 5{,}04\, Y_2 = 0$
Y_3	IV	$M_s - \frac{400}{4{,}47} Y_3 = 0.$

Sind ferner c, v die Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, u die Abscisse des Drehpunkts für M_s und

$$(1) \qquad z = \frac{v - u}{cl - u(l - v + c)}\, cl,$$

so haben wir

für $X_1 = -\frac{M_s}{2}$	$c = 0$	$v = 4$	$u = 2$	$z = 0$
$X_2 = -\frac{M_s}{4}$	4	8	6	-16
$Z_1 = \frac{M_s}{1,41}$	0	4	2	0
$Z_2 = \frac{M_s}{2,68}$	0	4	4	0
$Z_3 = \frac{M_s}{4}$	4	8	8	0
$Y_1 = \frac{M_s}{4,24}$	0	4	-2	0
$Y_2 = -\frac{M_s}{5,04}$	4	8	-2	7,27
$Y_3 = \frac{1,12\, M_s}{\infty}$	4	8	$-\infty$	5,33.

Da die Stäbe und feste Last zur Verticallinie durch die Trägermitte symmetrisch liegen, so ist nur eine Trägerhälfte zu berechnen.

Eigengewicht allein. Nach § 24, 7) ist der Beitrag des Eigengewichts zu M_s

$$\mathfrak{M}_s = [u\,(l - c - v) + cv]\,\frac{g}{2}, \tag{2}$$

woraus sich folgende vom Eigengewichte allein herrührende Momente und Stabkräfte ergeben.

$\mathfrak{M}_s = (2 \,.\, 12 + 0)\, 0,3 = 7,2$ mtn,	$\mathfrak{X}_1 = -\,3,60$ tn.
$\mathfrak{M}_s = (4 \,.\, 6 + 4 \,.\, 8)\, 0,3 = 16,8$	$\mathfrak{X}_2 = -\,4,20$
$\mathfrak{M}_s = (2 \,.\, 12 + 0)\, 0,3 = 7,2$	$\mathfrak{Z}_1 = 5,10$
$\mathfrak{M}_s = (4 \,.\, 12 + 0)\, 0,3 = 14,4$	$\mathfrak{Z}_2 = 5,37$
$\mathfrak{M}_s = (8 \,.\, 4 + 4 \,.\, 8)\, 0,3 = 19,2$	$\mathfrak{Z}_3 = 4,80$
$\mathfrak{M}_s = (-\,2 \,.\, 12 + 0)\, 0,3 = -\,7,2$	$\mathfrak{Y}_1 = -\,1,70$
$\mathfrak{M}_s = (-\,2 \,.\, 4 + 4 \,.\, 8)\, 0,3 = 7,2$	$\mathfrak{Y}_2 = -\,1,43$
$\mathfrak{M}_s = (-\,\infty \,.\, 4 + 4 \,.\, 8)\, 0,3 = -\,1,12\,\infty$	$\mathfrak{Y}_3 = -\,1,34$.

Für die Stützenreactionen liefert § 24, 6)

$$\mathfrak{V} = \frac{gl}{2} = 0,6 \,.\, 8 = 4,8 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Für die Gurtungsstäbe zeigt obige Zusammen-

stellung den Drehpunkt u innerhalb l, sodass nach § 24, 2) die entsprechenden Grenzwerthe von M_s

$$(3) \qquad M_s = \frac{q}{g}\,\mathfrak{M}_s, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s.$$

Für die Füllungsglieder liegt der Drehpunkt u ausserhalb l, nach § 24, 3) sind die zugehörigen Grenzwerthe von M_s

$$(4) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-z)(l-v)p, \quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}czp.$$

Nach 3) hat man als untere Grenzwerthe der Gurtungskräfte und nach 4) wegen $z = 0$ auch als unteren Grenzwerth von Y_1 die schon berechneten Werthe für Eigengewicht allein, die entsprechenden oberen Grenzwerthe sind $q:g = 6$mal so gross, d. h.

$$X_1 = -21{,}60, \quad X_2 = -25{,}20, \quad Z_1 = 30{,}60, \quad Z_2 = 32{,}22,$$
$$Z_3 = 28{,}80, \quad Y_1 = -10{,}90 \text{ tn}.$$

Nach 4) ergeben sich die von der Verkehrslast allein erzeugten Grenzmomente und die ganzen Grenzwerthe von Y_2, Y_3 wie folgt.

$$M_s = -\frac{2.8{,}73.8.3}{2.16} = -13{,}09, \qquad M_s = \frac{18.4.7{,}27.3}{2.16} = 49{,}07,$$

$$Y_2 = -1{,}43 + \frac{13{,}09}{5{,}04} = 1{,}17, \qquad Y_2 = -1{,}43 - \frac{49{,}07}{5{,}04} = -11{,}17 \text{ tn};$$

$$M_s = -\frac{\infty.10{,}67.8.3}{2.16} = -8\infty, \qquad M_s = \frac{\infty.4.5{,}33.3}{2.16} = 2\infty,$$

$$Y_3 = -1{,}34 - \frac{1{,}12.8.\infty}{\infty} = -10{,}30, \quad Y_3 = -1{,}34 + \frac{1{,}12.2.\infty}{\infty} = 0{,}90 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind nach § 24, 5)

$$V = \mathfrak{V} = 4{,}8, \qquad V = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V} = 28{,}8 \text{ tn}.$$

Bemerkungen. Verwendet man anstatt 4) die Näherungsformeln § 24, 8)

$$(5) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-c)(l-v)p, \quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}cvp,$$

so kann die Berechnung der Grenzpunkte z der Beitragsstrecken vermieden werden, welche übrigens oben nur für Y_2, Y_3 nöthig gewesen wäre. Wir erhalten

$$\text{für } Y_2: \; M_s = -\frac{2.12.8.3}{2.16} = -18, \qquad M_s = \frac{18.4.8.3}{2.16} = 54,$$

$$Y_2 = -1{,}43 + \frac{18}{5{,}04} = 2{,}14, \quad Y_2 = -1{,}43 - \frac{54}{5{,}04} = -12{,}14 \text{ tn};$$

für Y_3:

$$M_s = -\frac{\infty . 12 . 8 . 3}{2 . 16} = -9\infty, \qquad M_s = \frac{\infty . 4 . 8 . 3}{2 . 16} = 3\infty,$$

$$Y_3 = -1{,}34 - \frac{1{,}12 . 9 . \infty}{\infty} = -11{,}42, \quad Y_3 = -1{,}34 + \frac{1{,}12 . 3 . \infty}{\infty} = 2{,}02 \text{ tn.}$$

Diese Werthe entsprechen der Berechnung auf Grund vorausbestimmter Knotenpunktslasten (§ 12, d) und stimmen demgemäss mit den in Beispiel 19 erhaltenen überein. Die Differenzen gegen die genaueren Werthe sind hier verhältnissmässig gross, wie dies bei den im Vergleiche zu den c, v, $l-c$, $l-v$ grossen $v-c$ zu erwarten war (§ 24).

Beispiel 24. Beliebige einfache Systeme mit bewegten Radlastzügen.

Der Träger des vorigen Beispiels möge nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören, welche von Locomotiven der Radanordnung Fig. 18 befahren wird. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles im vorigen Beispiel Gesagte gültig. Weiter haben wir nun nach § 25 für sämmtliche Stäbe bei beliebigen Laststellungen

$$(1) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{u}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a)$$

und folgende Grenzwerthe von M_s: Für die Gurtungsstäbe, weil u innerhalb l liegt und $u < c$ ist,

Belastung durch Zug I (Fig. 63, 64) von 0 bis l, Rad O bei v, M_s nach 1),

Belastung durch Eigengewicht allein, $M_s = \mathfrak{M}_s$;

für die Füllungsglieder, weil u ausserhalb l liegt,

Belastung durch Zug II (Fig. 65) von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(2) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(3) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa.$$

Wie im vorigen Beispiele genügt es, eine Trägerhälfte zu berechnen.

Nach vorstehenden Angaben sind die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte die schon berechneten Beanspruchungen durch Eigengewicht allein, die von der Verkehrslast allein herrührenden M_s der oberen Grenzwerthe und letztere im Ganzen ergeben sich wie folgt. Für X_1: Zug I mit Rad O bei $v = 4$, erste Zugrichtung (Fig. 63),

$$M_s = \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{16}\right)(6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7 + 4 \,.\, 1{,}5)$$
$$+ \frac{2}{16}(6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 6 \,.\, 4{,}1 + 4 \,.\, 2{,}9) = 38{,}95 \text{ mtn},$$

zweite Zugrichtung (Fig. 64),

$$M_s = \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{16}\right)(6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7)$$
$$+ \frac{2}{16}(6 \,.\, 10{,}7 + 4 \,.\, 9{,}5 + 5 \,.\, 6{,}5 + 6 \,.\, 2{,}3 + 6 \,.\, 1) = 34{,}39 \text{ mtn},$$

daher der Grenzwerth

$$X_1 = -\,3{,}60 - \frac{38{,}95}{2} = -\,23{,}08 \text{ tn}.$$

Für X_2: Zug I mit Rad O bei $v = 8$,

$$M_s = \frac{10}{16}\, 5 \,.\, 2{,}5 + \left(\frac{2}{4} - \frac{6}{16}\right)(4 \,.\, 21{,}5 + 6 \,.\, 22{,}7 + 6 \,.\, 24)$$
$$+ \frac{6}{16}(6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 2{,}7 + 6 \,.\, 1{,}4 + 6 \,.\, 0{,}1) = 78{,}11 \text{ mtn},$$

$$M_s = \frac{10}{16}(6 \,.\, 0{,}1 + 6 \,.\, 1{,}4 + 6 \,.\, 2{,}7) + \left(\frac{2}{4} - \frac{6}{16}\right)(6 \,.\, 22{,}7 + 6 \,.\, 24)$$
$$+ \frac{6}{16}(6 \,.\, 6{,}7 + 4 \,.\, 5{,}5 + 5 \,.\, 2{,}5) = 78{,}78 \text{ mtn},$$

$$X_2 = -\,4{,}20 - \frac{78{,}78}{4} = -\,23{,}90 \text{ tn}.$$

Für Z_1: Zug I mit Rad O bei $v = 4$, M_s wie für X_1 und

$$Z_1 = 5{,}09 + \frac{38{,}95}{1{,}41} = 32{,}71 \text{ tn}.$$

Für Z_2: Zug I mit Rad O bei $v = 8$,

$$M_s = \left(\frac{4}{4} - \frac{4}{16}\right)(6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7 + 4 \,.\, 1{,}5)$$
$$+ \frac{4}{16}(6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 6 \,.\, 4{,}1 + 4 \,.\, 2{,}9) = 77{,}90 \text{ mtn},$$

$$M_s = \left(\frac{4}{4} - \frac{4}{16}\right)(6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7)$$
$$+ \frac{4}{16}(6 \,.\, 10{,}7 + 4 \,.\, 9{,}5 + 5 \,.\, 6{,}5 + 6 \,.\, 2{,}3 + 6 \,.\, 1) = 68{,}77 \text{ mtn},$$

$$Z_2 = 5{,}37 + \frac{77{,}90}{2{,}68} = 34{,}44 \text{ tn}.$$

Für Z_3: Zug I mit Rad O bei $v = 8$,

$$M_s = \frac{8}{16} 5 \,.\, 2{,}5 + \left(\frac{4}{4} - \frac{8}{16}\right)(4 \,.\, 5{,}5 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 8)$$

$$+ \frac{8}{16}(6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 2{,}7 + 6 \,.\, 1{,}4 + 6 \,.\, 0{,}1) = 94{,}05 \text{ mtn},$$

$$M_s = \frac{8}{16}(6 \,.\, 0{,}1 + 6 \,.\, 1{,}4 + 6 \,.\, 2{,}7) + \left(\frac{4}{4} - \frac{8}{16}\right)(6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 8)$$

$$+ \frac{8}{16}(6 \,.\, 6{,}7 + 4 \,.\, 5{,}5 + 5 \,.\, 2{,}5) = 94{,}05 \text{ mtn},$$

$$Z_3 = 4{,}80 + \frac{94{,}05}{4} = 28{,}31 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder sind im Folgenden ebenfalls nach obiger Anleitung bestimmt, wobei die M_s der Verkehrslast allein entsprechen. Wir erhalten für Y_1 mit $c = 0$, $v = 4$ die beiden Grenzwerthe des Moments

$$M_s = -\frac{2}{16}(6.12 + 6.10{,}7 + 6.9{,}4 + 4.8{,}2 + 5.5{,}2 + 6.1) = -32{,}17 \text{ mtn},$$

$$M_s = \mathfrak{M}_s$$

und damit die Grenzwerthe von Y_1

$$Y_1 = -1{,}70 - \frac{32{,}17}{4{,}24} = -9{,}28 \text{ tn}, \quad Y_1 = \mathfrak{Y}_1 = -1{,}70;$$

für Y_2 mit $c = 4$, $v = 8$,

$$M_s = -\frac{2}{16}(6 \,.\, 3 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 4 \,.\, 4{,}2 + 5 \,.\, 1{,}2) = -17{,}92 \text{ mtn},$$

$$M_s = \frac{18}{16}(6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7 + 6 \,.\, 1{,}4 + 4 \,.\, 0{,}2) = 55{,}57 \text{ mtn},$$

$$Y_2 = -1{,}43 + \frac{17{,}92}{5{,}04} = 2{,}13 \text{ tn}, \quad Y_2 = -1{,}43 - \frac{55{,}57}{5{,}04} = -12{,}46 \text{ tn};$$

für Y_3 mit $c = 4$, $v = 8$,

$$M_s = -\frac{\infty}{16}(6 \,.\, 8 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 4 \,.\, 4{,}2 + 5 \,.\, 1{,}2) = -8{,}96\,\infty,$$

$$M_s = \frac{\infty}{16}(6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7 + 6 \,.\, 1{,}4 + 4 \,.\, 0{,}2) = 4{,}09\,\infty,$$

$$Y_3 = -1{,}34 - 1{,}12\,\frac{8{,}96 \,.\, \infty}{\infty} = -11{,}36 \text{ tn},$$

$$Y_3 = -1{,}34 + 1{,}12\,\frac{4{,}09 \,.\, \infty}{\infty} = 4{,}57 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen ergeben sich nach § 25 bei Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0,

$$V = \mathfrak{B} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l - a)$$

$$= 4{,}8 + \frac{1}{16}[6\,(16 + 14{,}7 + 13{,}4 + 5 + 3{,}7 + 2{,}4) + 4\,(12{,}2 + 1{,}2) + 5\,.\,9{,}2] = 31{,}72 \text{ tn}$$

und für Eigengewicht allein

$$V = \mathfrak{B} = 4{,}8 \text{ tn}.$$

Wir haben oben Y_1 nach den für u ausserhalb l gültigen Regeln berechnet. Da jedoch für Y_1 die Abscisse des Grenzpunkts der Beitragsstrecken $z = 0$ ist, so wird nach § 25 wahrscheinlich Zug I mit Rad O über v einen ungünstigeren oberen Grenzwerth als Zug II erzeugen. In der That erhalten wir für die erste und zweite Zugrichtung nach 1)

$$M_s = -\left(\frac{2}{4} - \frac{2}{16}\right)(6\,.\,4 + 6\,.\,2{,}7 + 4\,.\,1{,}5)$$
$$- \frac{2}{16}(6\,.\,10{,}7 + 6\,.\,6{,}7 + 6\,.\,5{,}4 + 6\,.\,4{,}1 + 4\,.\,2{,}9) = -38{,}95 \text{ mtn},$$

$$M_s = -\left(\frac{2}{4} - \frac{2}{16}\right)(6\,.\,4 + 6\,.\,2{,}7)$$
$$- \frac{2}{16}(6\,.\,10{,}7 + 4\,.\,9{,}5 + 5\,.\,6{,}5 + 6\,.\,2{,}3 + 6\,.\,1) = -34{,}39 \text{ mtn},$$

und damit

$$Y_1 = -1{,}70 - \frac{38{,}95}{4{,}24} = -10{,}89 \text{ tn}$$

gegen oben erhaltene 9,28 tn.

Bemerkungen. Da im vorliegenden Falle $v - c$ verhältnissmässig gross gegen die c, v, $l - c$, $l - v$ und die Radstände bei O ist, so werden die berechneten Grenzwerthe möglicherweise nicht sehr genau sein. Im folgenden Beispiele ist eine genauere Berechnung gegeben, deren Resultate wir mit den oben und im vorigen Beispiele erhaltenen hier zusammenstellen. Die bei Belastung durch Eigengewicht allein entstehenden unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte und von Y_1, welche in allen drei Fällen dieselben bleiben, sind weggelassen.

Stabkräfte	nach Beispiel 23	oben gefunden	genaue Grenzwerthe
X_1	−21,60	−23,08	−23,08
X_2	−25,20	**−23,90**	**−25,61**
Z_1	30,60	32,71	32,71
Z_2	32,22	34,44	34,44
Z_3	28,80	**28,31**	**28,90**

Stabkräfte	nach Beispiel 23	oben gefunden	genaue Grenzwerthe
Y_1	— 10,90	— 10,89	— 10,89
Y_2	1,17	2,13	2,13
„	— 11,17	— **12,46**	— **14,96**
Y_3	— 10,30	— **11,36**	— **11,65**
„	0,90	4,57	4,57.

Die genauen Grenzwerthe sind in Fig. 66 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Die obige Berechnung lässt bereits erkennen, dass es für die erste Trägerhälfte symmetrischer Träger in vielen Fällen genügen wird, nur die erste Richtung des Zugs I in Betracht zu ziehen. Fast alle oben verwendeten Werthe $\sum$ hätten wir bequemer aus der Tabelle in Beispiel 6 entnehmen können.

Beispiel 25. Genaueste Berechnung beliebiger einfacher Systeme für bewegte Radlastzüge.

Die ungünstigsten Belastungen und Grenzwerthe der Stabkräfte im Falle des vorigen Beispiels mit möglichster Genauigkeit festzustellen.

Für ein beliebiges System gleichzeitig auf dem Träger Platz findender Lasten lautet nach § 25 die Bedingung für mathematische Maxima und Minima von M_s

$$(1) \qquad \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c} \sum_c^v P = \frac{u}{l} \sum_0^l P,$$

während jede Verschiebung des Lastsystems um da eine Aenderung des Moments um

$$(2) \qquad dM_s = \left(\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c} \sum_c^v P - \frac{u}{l} \sum_0^l P \right) da,$$

bewirkt. Mit Rücksicht auf die in Beispiel 23 zusammengestellten Werthe der Abscissen c, v, u nimmt die Bedingung 1) folgende Formen an:

$$(a) \qquad \text{Für } X_1,\ Z_1,\ Z_2,\ Y_1, \qquad \sum_0^4 P = \frac{1}{4} \sum_0^l P,$$

$$(b) \qquad \text{für } X_2, \qquad \sum_0^4 P + \frac{1}{2} \sum_4^8 P = \frac{3}{8} \sum_0^l P,$$

(c) für Z_3, $$\sum_0^8 P = \frac{1}{2}\sum_0^l P,$$

(d) für Y_2, $$-\sum_0^4 P + \frac{3}{2}\sum_4^8 P = \frac{1}{8}\sum_0^l P,$$

(e) für Y_3, $$\sum_4^8 P = \frac{1}{4}\sum_0^l P.$$

Im letzten Falle ergab sich zunächst

$$\sum_0^4 P - \frac{\infty + 4}{4}\sum_4^8 P = -\frac{\infty}{16}\sum_0^l P$$

und hieraus durch Division mit ∞ die Gleichung e). Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte und von Y_1 (wegen $z = 0$) bleiben die berechneten Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein. Im Uebrigen nehmen wir nun die einzelnen Stabkräfte der Reihe nach vor.

Für X_1, Z_1, Z_2, Y_1 ist bei der in Beispiel 24 angenommenen Belastung durch Zug I mit Rad O über Punkt 4, erste Zugrichtung, wegen

$$\frac{1}{4}\sum_0^l P = 11, \qquad \sum_0^4 P = 16 \text{ bis } 10$$

die Maximalbedingung a) erfüllt, die berechneten Grenzwerthe sind richtig.

Für X_2 hat man bei der in Beispiel 24 gewählten Belastung durch Zug I mit Rad O bei 8, zweite Zugrichtung,

$$\frac{3}{8}\sum_0^l P = 16{,}9, \qquad \sum_0^4 P + \frac{1}{2}\sum_4^8 P = 24 \text{ bis } 21,$$

die Maximalbedingung b) ist nicht erfüllt. Fährt der Zug in der Richtung von 0 nach l hin weiter, so bewirkt anfangs jede Verrückung um da eine Aenderung von M_s um

$$dM_s = (21 - 16{,}9)\, da,$$

welche wegen positivem da (für die Fahrrichtung von 0 nach l) positiv ist. Mit dem Ueberschreiten des Punktes 8 durch das auf O folgende Rad bleibt immer noch positiv

$$dM_s = (19 - 18{,}4)\, da,$$

wogegen nach dem Passiren eines weiteren Rades

$$dM_s = (16 - 18{,}4)\, da$$

schon negativ ist. Das Maximum von M_s tritt zwischen den beiden letzten Ueberschreitungen in dem Augenblicke ein, wo Rad Q (Fig. 64) den Punkt 4 passirt. Es ist dann mit

$$\frac{3}{8}\sum_0^l P = 16{,}5, \qquad \sum_0^4 + \frac{1}{2}\sum_4^8 P = 19 \text{ bis } 13$$

Bedingung b) erfüllt und wir erhalten

$$M_s = \frac{10}{16}(6\,.\,4 + 6\,.\,2{,}7 + 4\,.\,1{,}5)$$
$$+ \left(\frac{2}{4} - \frac{6}{16}\right)6.21{,}3 + \frac{6}{16}(6.6{,}7 + 6.5{,}4 + 6.4{,}1 + 4.2{,}9) = 85{,}64 \text{ mtn},$$
$$X_2 = -4{,}20 - \frac{85{,}64}{4} = -25{,}61 \text{ tn}.$$

Für Z_3 hat man bei der in Beispiel 24 verwendeten Belastung durch Zug I mit Rad O über 8, erste Zugrichtung,

$$\frac{1}{2}\sum_0^l P = 22{,}5, \qquad \sum_0^8 P = 15 \text{ bis } 21,$$

Bedingung c) ist nicht erfüllt. Nachdem O in der Fahrrichtung nach 0 hin über Punkt 8 hinaus ist, ändert sich M_s zunächst mit weiterer Verrückung da um

$$dM_s = (21 - 22{,}5)\,da,$$

also wegen negativem da in positivem Sinne, das positive M_s nimmt zu; dagegen ist beim Ueberschreiten des Punktes 8 durch das nächste Rad

$$\frac{1}{2}\sum_0^l P = 24{,}5, \qquad \sum_0^8 P = 21 \text{ bis } 27$$

die Bedingung c) erfüllt und wir erhalten

$$M_s = \frac{8}{16}(6\,.\,8 + 6\,.\,6{,}7 + 6\,.\,5{,}4 + 4\,.\,4{,}2 + 5\,.\,1{,}2)$$
$$+ \frac{8}{16}(6\,.\,4 + 6\,.\,2{,}7 + 6\,.\,1{,}4 + 4\,.\,0{,}2) = 96{,}40 \text{ mtn},$$
$$Z_3 = 4{,}80 + \frac{96{,}40}{4} = 28{,}90 \text{ tn}.$$

Für Y_2 ist bei der in Beispiel 24 zur Ermittelung des ersten Grenzwerthes gewählten Belastung durch Zug II von v bis l mit Vorderrad O bei $v = 8$

$$\frac{1}{8}\sum_0^l P = 3{,}37, \qquad -\sum_0^4 P + \frac{3}{2}\sum_4^8 P = 0 \text{ bis } 9,$$

also Bedingung d) erfüllt und der erste berechnete Grenzwerth richtig. Dagegen ist bei der für den zweiten angenommenen Belastung durch Zug II von 0 bis c mit Vorderrad O bei $c = 4$

$$\frac{1}{8}\sum_0^l P = 2,75, \quad -\sum_0^4 P + \frac{3}{2}\sum_4^8 P = -22 \text{ bis } -7,$$

und d) nicht erfüllt. Dass hier ein weiteres Verschieben des Zuges gegen 8 hin das Moment erhöhen würde, war zu erwarten, da der Grenzpunkt $z = 7,27$ der negativen und positiven Beitragsstrecke nahe bei 8 liegt. Mit dem Passiren des Punktes 4 durch das zweite Rad werden

$$\frac{1}{8}\sum_0^l P = 2,75, \quad -\sum_0^4 P + \frac{3}{2}\sum_4^8 P = -7 \text{ bis } 8,$$

Bedingung d) ist erfüllt, wir erhalten nach B. 24, 1)

$$M_s = \frac{18}{16}(6 . 4 + 6 . 2,7 + 4 . 1,5) + \left(\frac{6}{4} - \frac{2}{16}\right) 6 . 1,97 = 68,22,$$

$$Y_2 = -1,43 - \frac{68,22}{5,04} = -14,96 \text{ tn}.$$

Für Y_3 schliesslich haben wir bei der in Beispiel 24 für den ersten Grenzwerth angenommenen Belastung durch Zug II von v bis l mit Vorderrad O bei $v = 8$

$$\frac{1}{8}\sum_0^l P = 6,75, \quad \sum_4^8 P = 0 \text{ bis } 6,$$

die Bedingung e) ist nicht erfüllt und wegen $z = 5,33$ eine ungünstigere Belastung mit weiterem Vorrücken des Zugs nach 4 hin zu erwarten. Bei der Ankunft des zweiten Rades über 8 hat man

$$\frac{1}{8}\sum_0^l P = 6,75, \quad \sum_4^8 P = 6 \text{ bis } 12,$$

Bedingung e) ist erfüllt,

$$M_s = -\left(\frac{\infty + 4}{4} - \frac{\infty}{16}\right) 6 . 1,37 - \frac{\infty}{16}(6 . 8 + 6 . 6,7 + 4 . 5,5$$
$$+ 5 . 2,5) = -9,21\,\infty,$$

$$Y_3 = -1,34 - 1,12\,\frac{9,21\,\infty}{\infty} = -11,65 \text{ tn}.$$

Bei der für den zweiten Grenzwerth angenommenen Belastung durch Zug II von 0 bis c mit Vorderrad O bei $c = 4$ ist wegen

$$\frac{1}{4}\sum_0^l P = 5{,}5, \qquad \sum_4^8 P = 4 \text{ bis } 8$$

die Bedingung e) erfüllt und der entsprechende Grenzwerth richtig.

Am Schlusse des Beispiels 24 sind die jetzt abgeleiteten genaueren Grenzwerthe mit den dort erhaltenen zusammengestellt.

Beispiel 26. Beliebige einfache Systeme mit gleichmässig vertheilter bewegter Last.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Halbparabelträger einfachen Systems des gleichschenkligen Dreiecks (Fig. 67) zur Verwendung kommen. Die grösste Höhe soll $h = 6$ m, die Höhe bei den Auflagern $h_0 = 4$ m betragen. Vorläufig ermittelt per laufenden Meter jedes der beiden Träger: Eigengewicht $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}7$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_u = 0{,}6$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnbelastung angreift und $g_o = 0{,}3$ tn auf die Knotenpunkte des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Formberechnung. Die Gleichung eines Parabelbogens von verticaler Axe, der Spannweite l und dem Pfeile f lautet nach § 17, 18) bei verticaler Abscissenaxe durch die Bogenenden

$$(1) \qquad y = \frac{4f}{l^2}\,x(l - x).$$

Im vorliegenden Falle tritt die grösste Trägerhöhe bei $x = 20$ ein, sodass

$$2 = \frac{4f}{45^2}\,20\,.\,25, \qquad f = \frac{81}{40}$$

und für die Knotenpunkte des Obergurts allgemein

$$y = \frac{x\,(l - x)}{250}.$$

Wir erhalten hiernach

für	$x = 0$	5	10	15	20 m:
	$y = 0$	0,8	1,4	1,8	2 m,
Trägerhöhe	$h_0 + y = 4$	4,8	5,4	5,8	6 m,

womit die Dimensionen des Trägers vollständig bestimmt sind. Die Stablängen des Obergurts und der Füllung ergeben sich

$$o_1 = \sqrt{5^2 + 0{,}8^2} = 5{,}06 \text{ m} \qquad s_1 = \sqrt{4^2 + 2{,}5^2} = 4{,}72 \text{ m}$$

$$o_2 = \sqrt{5^2 + 0{,}6^2} = 5{,}04 \qquad t_1 = s_2 = \sqrt{4{,}8^2 + 2{,}5^2} = 5{,}41$$

$$o_3 = \sqrt{5^2 + 0{,}4^2} = 5{,}02 \text{ m} \qquad t_2 = s_3 = \sqrt{5{,}4^2 + 2{,}5^2} = 5{,}95 \text{ m}$$
$$o_4 = \sqrt{5^2 + 0{,}2^2} = 5{,}00 \qquad t_3 = s_4 = \sqrt{5{,}8^2 + 2{,}5^2} = 6{,}32$$
$$o_5 = 5 \qquad t_4 = s_5 = \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = 6{,}5\,.$$

Statische Berechnung. Vorbereitung. Zur Berechnung einer Stabkraft haben wir einen Schnitt s so durch den Träger zu legen, dass ausser dem fraglichen Stabe nur solche Stäbe mit unbekannten Beanspruchungen getroffen werden, welche sich in einem Punkte schneiden (§ 15). Hinsichtlich dieses Punktes der Abscisse u ist ist die Bedingung „Summe aller Momente gleich Null" für die am Trägertheile links von s wirkenden äussern Kräfte und durch s getroffenen Stabkräfte auszudrücken. Bezeichnet M_s das Moment jener äussern Kräfte allein, R die gesuchte Stabkraft und r deren Hebelarm in Bezug auf den Drehpunkt u, so hat man

$$M_s \pm Rr = 0\,. \tag{2}$$

Hierin ist das obere oder untere Vorzeichen massgebend, jenachdem die zunächst als Zug (also positiv, vom Trägertheil links von s weggerichtet) gedachte Kraft R wie der Zeiger der Uhr rechts um u dreht oder nicht. Es sind nun zunächst die r zu berechnen.

Bezeichnet d_m die Entfernung von Stützpunkt 0 bis Schnittpunkt der Richtungslinien von Stab o_m und Untergurt, so haben wir

$$d_1 : 4 = d_1 + 5 : 4{,}8 \qquad d_1 = 25 \text{ m}$$
$$d_2 + 5 : 4{,}8 = d_2 + 10 : 5{,}4 \qquad d_2 = 35$$
$$d_3 + 10 : 5{,}4 = d_3 + 15 : 5{,}8 \qquad d_3 = 57{,}5$$
$$d_4 + 15 : 5{,}8 = d_4 + 20 : 6 \qquad d_4 = 130\,.$$

Bezeichnen ferner $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{s}_m$, $\mathfrak{t}_m$ die Längen der Perpendikel (Fig. 68) vom Knotenpunkte m des Untergurts auf o_m und vom Schnittpunkte der Stabrichtungslinien o_m, u_m auf s_m und t_m, dann erhält man folgende Beziehungen und Werthe:

$$\mathfrak{o}_1 : d_1 + 2{,}5 = 4 : \sqrt{4^2 + d_1^2} \qquad \mathfrak{o}_1 = 4{,}34 \text{ m}$$
$$\mathfrak{o}_2 : d_2 + 7{,}5 = 4{,}8 : \sqrt{4{,}8^2 + (d_2 + 5)^2} \qquad \mathfrak{o}_2 = 5{,}06$$
$$\mathfrak{o}_3 : d_3 + 12{,}5 = 5{,}4 : \sqrt{5{,}4^2 + (d_3 + 10)^2} \qquad \mathfrak{o}_3 = 5{,}58$$
$$\mathfrak{o}_4 : d_4 + 17{,}5 = 5{,}8 : \sqrt{5{,}8^2 + (d_4 + 15)^2} \qquad \mathfrak{o}_4 = 5{,}89$$
$$\mathfrak{o}_5 = 6\,;$$

$$\mathfrak{s}_1 : d_1 + 2{,}5 = 4 : s_1 \qquad \mathfrak{s}_1 = 23{,}31 \text{ m}$$
$$\mathfrak{s}_2 : d_2 + 7{,}5 = 4{,}8 : s_2 \qquad \mathfrak{s}_2 = 37{,}71$$

$$\mathfrak{s}_3 : d_3 + 12{,}5 = 5{,}4 : s_3 \qquad \mathfrak{s}_3 = 63{,}53$$
$$\mathfrak{s}_4 : d_4 + 17{,}5 = 5{,}8 : s_4 \qquad \mathfrak{s}_4 = 135{,}36$$
$$\mathfrak{s}_5 : d_5 + 22{,}5 = 6 \quad : s_5 \qquad \mathfrak{s}_5 = \frac{6}{6{,}5}\,\infty$$

$$\mathfrak{t}_1 : d_1 + 2{,}5 = 4{,}8 : t_1 \qquad \mathfrak{t}_1 = 22{,}44 \text{ m}$$
$$\mathfrak{t}_2 : d_2 + 7{,}5 = 5{,}4 : t_2 \qquad \mathfrak{t}_2 = 38{,}57$$
$$\mathfrak{t}_3 : d_3 + 12{,}5 = 5{,}8 : t_3 \qquad \mathfrak{t}_3 = 64{,}24$$
$$\mathfrak{t}_4 : d_4 + 17{,}5 = 6 : t_4 \qquad \mathfrak{t}_4 = 136{,}15.$$

Sind schliesslich c, v die Abscissen derjenigen Knotenpunkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, und

$$z = \frac{v - u}{cl - u(l - v + c)}\, cl, \tag{3}$$

so haben wir folgende Unterlagen für die Berechnung der Stabkräfte bei beliebiger Belastung.

Stab	Schnitt	Stabkraft	u	c	v	z
o_1	I	$O_1 = -M_s : 4{,}34$	2,5	0	2,5	0
o_2	II	$O_2 = -M_s : 5{,}06$	7,5	2,5	7,5	0
o_3	III	$O_3 = -M_s : 5{,}58$	12,5	7,5	12,5	0
o_4	IV	$O_4 = -M_s : 5{,}89$	17,5	12,5	17,5	0
o_5	V	$O_5 = -M_s : 6$	22,5	17,5	22,5	0
u_1	1	$U_1 = \quad M_s : 4{,}8$	5	2,5	7,5	— 3,21
u_2	2	$U_2 = \quad M_s ; 5{,}4$	10	7,5	12,5	— 13,5
u_3	3	$U_3 = \quad M_s : 5{,}8$	15	12,5	17,5	— 37,5
u_4	4	$U_4 = \quad M_s : 6$	20	17,5	22,5	— 157,5
s_1	I	$S_1 = -M_s : 23{,}3$	— 25	0	2,5	0
s_2	II	$S_2 = -M_s : 37{,}7$	— 35	2,5	7,5	3,16
s_3	III	$S_3 = -M_s : 63{,}5$	— 57,5	7,5	12,5	8,72
s_4	IV	$S_4 = -M_s : 135$	— 130	12,5	17,5	14,39
s_5	V	$S_5 = -M_s : 0{,}92\,\infty$	— ∞	17,5	22,5	19,69
t_0	0	$T_0 = \quad M_s : 10$	— 10	0	2,5	0
t_1	1	$T_1 = \quad M_s : 24{,}4$	— 25	2,5	7,5	3,24
t_2	2	$T_2 = \quad M_s : 38{,}6$	— 35	7,5	12,5	9,17
t_3	3	$T_3 = \quad M_s : 64{,}2$	— 57,5	12,5	17,5	14,38
t_4	4	$T_4 = \quad M_s : 136$	— 130	17,5	22,5	20,06

Bezüglich t_0 war zu beachten, dass der Schnitt 0 nur zwei Stäbe trifft und also der Drehpunkt zur Berechnung von T_0 in jeden beliebigen Punkt der Richtungslinie von u_0 gelegt werden darf (§ 15). Wir haben $u = -10$ gewählt. Die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf den Knotenpunkt 0 des Untergurts ergiebt für jede Belastung $U_0 = 0$.

Eigengewicht allein. Wollte man das Eigengewicht, wie die Fahrbahnlast, nur auf die Knotenpunkte des Untergurts vertheilt annehmen, so würde nach § 24, 7) sein

$$(4) \qquad \mathfrak{M}_s = [u(l - c - v) + cv]\,\frac{g}{2}\,.$$

Die Stabkräfte, welche sich auf Grund dieser Formel ergeben, sind den unten berechneten in Klammer beigefügt. Da im vorliegenden Falle ein Theil g_o von g auf die Knotenpunkte des Obergurts gerechnet werden soll, so könnten wir nach § 23, 2) mit $G = 5g_o$ setzen

$$(5) \quad \mathfrak{M}_s = [u(l - c - v) + cv]\,\frac{g_u}{2} + \frac{l-u}{l}\sum_0^s Ge + \frac{u}{l}\sum_s^l G(l-e).$$

Bequemer ist es, die mit Rücksicht auf § 10 zulässige Formel

$$(6) \quad \mathfrak{M}_s = [u(l - c - v) + cv]\,\frac{g_u}{2} + [u\,(l - c_o - v_o) + c_o v_o]\,\frac{g_o}{2}$$

zu verwenden, worin c_o, v_o die Abscissen derjenigen Knotenpunkte bedeuten, bei welchen der von Schnitt s getroffene Stab des Obergurts endigt. Wir erhalten damit bei Beachtung obiger Tabelle folgende Momente und Stabkräfte für Eigengewicht allein.

Obere Gurtung.

$$\mathfrak{M}_s = (2{,}5\,.\,42{,}5 + 0\,.\,2{,}5)\,0{,}3 + (2{,}5\,.\,40 + 0\,.\,5)\,0{,}15 = 31{,}9 + 15 = 46{,}9,$$

$$\mathfrak{O}_1 = -\frac{46{,}9}{4{,}34} = -10{,}81 \text{ tn } (-10{,}99);$$

$$\mathfrak{M}_s = (7{,}5\,.\,35 + 2{,}5\,.\,7{,}5)\,0{,}3 + (7{,}5\,.\,30 + 5\,.\,10)\,0{,}15 = 84{,}4 + 41{,}2 = 126,$$

$$\mathfrak{O}_2 = -\frac{126}{5{,}06} = -24{,}89 \text{ tn } (-25{,}01);$$

$$\mathfrak{M}_s = (12{,}5\,.\,25 + 7{,}5\,.\,12{,}5)\,0{,}3 + (12{,}5\,.\,20 + 10\,.\,15)\,0{,}15 = 121{,}9 + 60 = 182,$$

$$\mathfrak{O}_3 = -\frac{182}{5{,}58} = -32{,}61 \text{ tn } (-32{,}76);$$

$$\mathfrak{M}_s = (17{,}5 \,.\, 15 + 12{,}5 \,.\, 17{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (17{,}5 \,.\, 10 + 15 \,.\, 20)\, 0{,}15 = 144{,}4 + 71{,}2 = 216,$$
$$\mathfrak{O}_4 = -\frac{216}{5{,}89} = -36{,}67 \text{ tn } (-36{,}77);$$

$$\mathfrak{M}_s = (22{,}5 \,.\, 5 + 17{,}5 \,.\, 22{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (22{,}5 \,.\, 0 + 20 \,.\, 25)\, 0{,}15 = 151{,}9 + 75 = 227,$$
$$\mathfrak{O}_5 = -\frac{227}{6} = -37{,}83 \text{ tn } (-37{,}97).$$

Untere Gurtung.

$$\mathfrak{M}_s = (5 \,.\, 35 + 2{,}5 \,.\, 7{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (5 \,.\, 40 + 0 \,.\, 5)\, 0{,}15 = 58{,}1 + 30 = 88,$$
$$\mathfrak{U}_1 = \frac{88}{4{,}8} = 18{,}35 \text{ tn } (18{,}16);$$

$$\mathfrak{M}_s = (10 \,.\, 25 + 7{,}5 \,.\, 12{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (10 \,.\, 30 + 5 \,.\, 10)\, 0{,}15 = 103{,}1 + 52{,}5 = 156,$$
$$\mathfrak{U}_2 = \frac{156}{5{,}4} = 28{,}89 \text{ tn } (28{,}65);$$

$$\mathfrak{M}_s = (15 \,.\, 15 + 12{,}5 \,.\, 17{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (15 \,.\, 20 + 10 \,.\, 15) = 133{,}1 + 67{,}5 = 201,$$
$$\mathfrak{U}_3 = \frac{201}{5{,}8} = 34{,}65 \text{ tn } (34{,}43);$$

$$\mathfrak{M}_s = (20 \,.\, 5 + 17{,}5 \,.\, 22{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (20 \,.\, 10 + 15 \,.\, 20)\, 0{,}15 = 148{,}1 + 75 = 223,$$
$$\mathfrak{U}_4 = \frac{223}{6} = 38{,}83 \text{ tn } (37{,}03).$$

Füllungsglieder *s*.

$$\mathfrak{M}_s = (-25 \,.\, 42{,}5 + 0 \,.\, 2{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-25 \,.\, 40 + 0 \,.\, 5)\, 0{,}15 = -318{,}6 - 150 = -469,$$
$$\mathfrak{S}_1 = \frac{469}{23{,}3} = 20{,}14 \text{ tn } (20{,}51);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-35 \,.\, 35 + 2{,}5 \,.\, 7{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-35 \,.\, 30 + 5 \,.\, 10)\, 0{,}15 = -361{,}9 - 150 = -512,$$
$$\mathfrak{S}_2 = \frac{512}{37{,}7} = 13{,}58 \text{ tn } (14{,}39);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-57{,}5 \,.\, 25 + 7{,}5 \,.\, 12{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-57{,}5 \,.\, 20 + 10 \,.\, 15)\, 0{,}15 = -400{,}1 - 150 = -450,$$
$$\mathfrak{S}_3 = \frac{450}{63{,}5} = 7{,}09 \text{ tn } (9{,}52);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-130 \,.\, 15 + 12{,}5 \,.\, 17{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-130 \,.\, 10 + 15 \,.\, 20)\, 0{,}15 = -519{,}4 - 150 = -669,$$
$$\mathfrak{S}_4 = \frac{669}{135} = 4{,}96 \text{ tn } (5{,}75);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-\infty \,.\, 5 + 17{,}5 \,.\, 22{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-\infty \,.\, 0 + 20 \,.\, 25)\, 0{,}15 = -1{,}5\,\infty - 0\,\infty = -1{,}5\,\infty,$$
$$\mathfrak{S}_5 = \frac{1{,}5\ \infty}{0{,}92\ \infty} = 1{,}62 \text{ tn } (2{,}46).$$

Füllungsglieder *t*.

$$\mathfrak{M}_s = (-10 \,.\, 42{,}5 + 0 \,.\, 2{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-10 \,.\, 45 + 0 \,.\, 0)\, 0{,}15 = -127{,}5 - 67{,}5 = -195,$$
$$\mathfrak{T}_0 = -\frac{195}{10} = -19{,}5 \text{ tn } (-19{,}12);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-25 \,.\, 35 + 2{,}5 \,.\, 7{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-25 \,.\, 40 + 0 \,.\, 5)\, 0{,}15 = -256{,}9 - 150 = -407,$$
$$\mathfrak{T}_1 = -\frac{407}{24{,}4} = -16{,}68 \text{ tn } (-15{,}79);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-35 \,.\, 25 + 7{,}5 \,.\, 12{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-35 \,.\, 30 + 5 \,.\, 10)\, 0{,}15 = -234{,}4 - 150 = -384,$$
$$\mathfrak{T}_2 = -\frac{384}{38{,}6} = -9{,}95 \text{ tn } (-9{,}11);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-57{,}5 \,.\, 15 + 12{,}5 \,.\, 17{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-57{,}5 \,.\, 20 + 10 \,.\, 15)\, 0{,}15 = -193{,}1 - 150 = -343,$$
$$\mathfrak{T}_3 = -\frac{343}{64{,}2} = -5{,}34 \text{ tn } (= 4{,}51);$$

$$\mathfrak{M}_s = (-130 \,.\, 5 + 17{,}5 \,.\, 22{,}5)\, 0{,}3$$
$$+ (-130 \,.\, 10 + 15 \,.\, 20)\, 0{,}15 = -76{,}9 - 150 = -227,$$
$$\mathfrak{T}_4 = -\frac{227}{136} = -1{,}67 \text{ tn } (-0{,}85).$$

Schliesslich liefert § 24, 6) die vom Eigengewicht allein herrührende Stützenreaction

$$\mathfrak{B} = \frac{g\,l}{2} = 0{,}45 \,.\, 45 = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Da für die Gurtungsstäbe nach obiger Zusammenstellung der Drehpunkt u innerhalb der Spannweite l liegt, so sind nach § 24, 2) die zugehörigen Grenzwerthe der Momente

$$(7) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + [u(l - c - v) + cv]\,\frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s.$$

Hätten wir die Beanspruchungen für Eigengewicht allein auf Grund von 4) berechnet, so würden

(8) $$M_s = \frac{q}{g}\,\mathfrak{M}_s, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s$$

und damit die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte gleich den Beanspruchungen für Eigengewicht allein, die oberen $q:g = 4$ mal so gross. Die ersterwähnten Grenzwerthe bleiben auch jetzt gültig, dagegen erhalten wir mit Rücksicht auf die nach 6) für das Eigengewicht in den unteren Knotenpunkten berechneten Momente und $p:g_u = 4{,}5$ die oberen Grenzmomente durch die Verkehrslast allein und die oberen Grenzwerthe der ganzen Gurtungskräfte wie folgt:

$$M_s = 31{,}9\,.\,4{,}5 = 143 \qquad O_1 = -10{,}81 - \frac{143}{4{,}34} = -\ 43{,}76 \text{ tn}$$

$$84{,}4\,.\,4{,}5 = 380 \qquad O_2 = -24{,}89 - \frac{380}{5{,}06} = -\ 99{,}99$$

$$121{,}9\,.\,4{,}5 = 549 \qquad O_3 = -32{,}61 - \frac{549}{5{,}58} = -131{,}00$$

$$144{,}4\,.\,4{,}5 = 650 \qquad O_4 = -36{,}67 - \frac{650}{5{,}89} = -147{,}03$$

$$151{,}9\,.\,4{,}5 = 684 \qquad O_5 = -37{,}83 - \frac{684}{6} = -151{,}83;$$

$$M_s = 58{,}1\,.\,4{,}5 = 262 \qquad U_1 = 18{,}35 + \frac{262}{4{,}8} = 72{,}93 \text{ tn}$$

$$103{,}1\,.\,4{,}5 = 464 \qquad U_2 = 28{,}69 + \frac{464}{5{,}4} = 114{,}62$$

$$131{,}1\,.\,4{,}5 = 599 \qquad U_3 = 34{,}65 + \frac{599}{5{,}8} = 137{,}93$$

$$148{,}1\,.\,4{,}5 = 666 \qquad U_4 = 38{,}83 + \frac{666}{6} = 149{,}83.$$

Für die Füllungsglieder liegt nach obiger Zusammenstellung der Drehpunkt u ausserhalb der Spannweite l; daher ergiebt § 24, 3) die entsprechenden Grenzmomente

(9) $$\begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-v)(l-s)\,p, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}\,c s p. \end{cases}$$

Mit Rücksicht hierauf erhalten wir folgende Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder.

$$S_1 = 20{,}14 + \frac{25 \cdot 42{,}5 \cdot 45}{90 \cdot 23{,}3} 2{,}7 = 81{,}70 \text{ tn}$$

$$S_2 = 13{,}58 + \frac{35 \cdot 37{,}5 \cdot 41{,}84}{90 \cdot 37{,}7} 2{,}7 = 57{,}27$$

$$S_3 = 7{,}09 + \frac{57{,}5 \cdot 32{,}5 \cdot 36{,}28}{90 \cdot 63{,}5} 2{,}7 = 38{,}91$$

$$S_4 = 4{,}96 + \frac{130 \cdot 27{,}5 \cdot 30{,}61}{90 \cdot 135} 2{,}7 = 29{,}29$$

$$S_5 = 1{,}62 + \frac{\infty \cdot 22{,}5 \cdot 25{,}31}{90 \cdot 0{,}92\, \infty} 2{,}7 = 18{,}59,$$

$$S_1 = 20{,}14 - \frac{70 \cdot 0 \cdot 0}{90 \cdot 23{,}3} 2{,}7 = 20{,}14 \text{ tn}$$

$$S_2 = 13{,}58 - \frac{80 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}16}{90 \cdot 37{,}7} 2{,}7 = 13{,}07$$

$$S_3 = 7{,}09 - \frac{102{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 8{,}72}{90 \cdot 63{,}5} 2{,}7 = 3{,}93$$

$$S_4 = 4{,}96 - \frac{175 \cdot 12{,}5 \cdot 14{,}39}{90 \cdot 135} 2{,}7 = -\ 2{,}03$$

$$S_5 = 1{,}62 - \frac{\infty \cdot 17{,}5 \cdot 19{,}69}{90 \cdot 0{,}92\, \infty} 2{,}7 = -\ 9{,}58.$$

$$T_0 = -\ 19{,}50 - \frac{10 \cdot 42{,}5 \cdot 45}{90 \cdot 10} 2{,}7 = -\ 76{,}87 \text{ tn}$$

$$T_1 = -\ 16{,}68 - \frac{25 \cdot 37{,}5 \cdot 41{,}76}{90 \cdot 24{,}4} 2{,}7 = -\ 58{,}60$$

$$T_2 = -\ 9{,}95 - \frac{35 \cdot 32{,}5 \cdot 35{,}83}{90 \cdot 38{,}6} 2{,}7 = -\ 41{,}63$$

$$T_3 = -\ 5{,}34 - \frac{57{,}5 \cdot 27{,}5 \cdot 30{,}62}{90 \cdot 64{,}2} 2{,}7 = -\ 27{,}97$$

$$T_4 = -\ 1{,}67 - \frac{130 \cdot 22{,}5 \cdot 24{,}94}{90 \cdot 136} 2{,}7 = -\ 17{,}76,$$

$$T_0 = -\ 19{,}50 + \frac{55 \cdot 0 \cdot 0}{90 \cdot 10} 2{,}7 = -\ 19{,}50 \text{ tn}$$

$$T_1 = -\ 16{,}68 + \frac{70 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}24}{90 \cdot 24{,}4} 2{,}7 = -\ 15{,}98$$

$$T_2 = -\ 9{,}95 + \frac{80 \cdot 7{,}5 \cdot 9{,}17}{90 \cdot 38{,}6} 2{,}7 = -\ 5{,}68$$

$$T_3 = -\ 5{,}34 + \frac{102{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot 14{,}38}{90 \cdot 64{,}2} 2{,}7 = 3{,}27$$

$$T_4 = -\ 1{,}67 + \frac{175 \cdot 17{,}5 \cdot 20{,}06}{90 \cdot 136} 2{,}7 = 11{,}88.$$

Als Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man nach § 24, 5) 6)

$$V = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V} = \frac{3{,}6}{0{,}9}\,20{,}25 = 81 \text{ tn}, \qquad V = \mathfrak{V} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Damit sind sämmtliche Grenzwerthe bestimmt.

Bemerkungen. Ein Vergleich der oben berechneten Beanspruchungen durch Eigengewicht allein mit den in Klammer für den Fall beigesetzten, dass das Eigengewicht nur in den durch die Verkehrslast ergriffenen Knotenpunkten angreifend gedacht wird, lässt erkennen, dass diese schon in Beispiel 23 gemachte vereinfachende Annahme auch hier zulässig gewesen wäre.

Da für die Endverticalen der Drehpunkt u auch innerhalb l angenommen werden darf, so würden zur Berechnung ihrer Grenzbeanspruchungen auch dieselben Formeln wie für die Gurtungen verwendbar gewesen sein. Ebenso hätten wir hierbei nach Formeln der Aufgabe 19 rechnen können.

Wären für die Füllungsglieder anstatt der Formeln 9) die Näherungsformeln

$$(10) \qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-c)(l-v)p, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}cvp \end{cases}$$

zur Verwendung gekommen, so würden wir, ohne die z berechnen zu müssen, gefunden haben

für	anstatt wie oben		die Werthe	
S_1	81,70	und 20,14	81,70	und 20,14
S_2	57,27	13,07	57,97	12,39
S_3	38,91	3,93	40,20	2,55
S_4	29,29	− 2,03	30,78	− 3,55
S_5	18,59	− 9,58	21,80	− 11,22
T_0	− 76,87	− 19,50	− 76,87	− 19,50
T_1	− 58,60	− 15,98	− 65,67	− 15,05
T_2	− 41,63	− 5,68	− 43,10	− 4,12
T_3	− 27,87	3,27	− 29,35	5,14
T_4	− 17,76	11,88	− 19,41	13,53.

Beispiel 27. Beliebige einfache Systeme mit bewegten Radlastzügen.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen

Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles im vorigen Beispiele Gegebene gültig. Die Berechnung der Trägerform und der Beanspruchungen durch Eigengewicht allein sind also erledigt. Die Formeln für die Grenzmomente M_s sind verschieden, jenachdem der Momentendrehpunkt innerhalb oder ausserhalb der Spannweite liegt, jenachdem die Abscisse u dieses Drehpunkts zwischen 0 und l liegt oder nicht. Nach der in Beispiel 26 gegebenen Tabelle tritt der erste Fall für die Gurtungsstäbe, der zweite für die Füllungsglieder ein. Da überdies für alle zu berechnenden Gurtungsstäbe $z \leq c$ und für diejenigen des Obergurts $u = v$, $z = 0$ ist, so liefert § 25 als unteren Grenzwerth des Moments M_s für sämmtliche Gurtungsstäbe $M_s = \mathfrak{M}_s$ und als oberen Grenzwerth bei Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis l, Rad O bei v,

$$(1)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \frac{v-u}{v-c}\frac{c}{z}\sum_c^v P(z-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

und speziell für den Obergurt einfacher

$$(2)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^v Pa + \sum_v^l P(l-a).$$

Statt 1) kann man auch die Formel B. 24, 1) verwenden. Die Grenzmomente der Füllungsglieder ergeben sich nach § 22 bei Belastung durch Zug II (Fig. 22) von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(3)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a)$$

und bei Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(4)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa.$$

Wenn man will, kann man berücksichtigen, dass für S_1 und T_0 wegen $z = 0$ die unteren Grenzwerthe $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_0$ sind und die oberen mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei v, voraussichtlich noch etwas un-

günstiger als mit Zug II werden, wozu die M_r nach 1) oder B. 24, 1) zu berechnen wären.

Gurtungen. Nach Vorstehendem sind die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen die schon berechneten Beanspruchungen durch Eigengewicht allein, für die oberen Grenzbeanspruchungen kommen mit Rücksicht auf die in der Tabelle des Beispiels 26 zusammengestellten Werthe der v bei jeder Zugrichtung (Fahrrichtung beliebig) fünf Belastungsfälle in Betracht, welche in Fig. 69 für die erste Zugrichtung, in Fig. 70 für die zweite Zugrichtung angedeutet sind. Diesen Belastungen entsprechen folgende Werthe der in 1) 2) auftretenden Summenausdrücke in Metertonnen.

Belastung für O_1 $(c = 0,\ v = 2{,}5)$, erste Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6(41{,}2 + 37{,}2 + 35{,}9 + 34{,}6 + 26{,}2 + 24{,}9 + 23{,}6 + 15{,}2 + 13{,}9 + 12{,}6 + 4{,}2 + 2{,}9 + 1{,}6) + 4(33{,}4 + 22{,}4 + 11{,}4 + 0{,}4) + 5(30{,}4 + 19{,}4 + 8{,}4) = 2205,$$

$$\sum_0^v Pa = 6(2{,}5 + 1{,}2) = 22{,}2;$$

zweite Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6(42{,}5 + 41{,}2 + 32{,}8 + 31{,}5 + 30{,}2 + 21{,}8 + 20{,}5 + 19{,}2 + 10{,}8 + 9{,}5 + 8{,}2) + 4(40 + 29 + 18 + 7) + 5(37 + 26 + 15 + 4) = 2395,$$

$$\sum_0^v Pa = 6 \,.\, 1{,}2 = 7{,}2.$$

Belastung für O_2, U_1 $(c = 2{,}5,\ v = 7{,}5)$, erste Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6(36{,}2 + 32{,}2 + 30{,}9 + 29{,}6 + 21{,}2 + 19{,}9 + 18{,}6 + 10{,}2 + 8{,}9 + 7{,}6) + 4(28{,}4 + 17{,}4 + 6{,}4) + 5(25{,}4 + 14{,}4 + 3{,}4) = 1716,$$

$$\sum_0^v Pa = 6(7{,}5 + 6{,}2) + 4 \,.\, 5 + 5 \,.\, 2 = 112,$$

$$\sum_0^c Pa = 5 \,.\, 2 = 10,$$

$$\sum_c^v P(a-z) = 6(10{,}71 + 9{,}41) + 4 \,.\, 8{,}21 = 154;$$

zweite Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(37{,}5 + 36{,}2 + 27{,}8 + 26{,}5 + 25{,}2 + 16{,}8 + 15{,}5 + 14{,}2 + 5{,}8 + 4{,}5 + 3{,}2) + 4\,(35 + 24 + 13 + 2) + 5\,(32 + 21 + 10) = 1890,$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,(6{,}2 + 2{,}2 + 0{,}9) = 55{,}8,$$

$$\sum_0^c Pa = 55{,}8 - 6\,.\,6{,}2 = 18{,}6,$$

$$\sum_c^v P(a-z) = 6\,.\,9{,}41 = 56{,}5.$$

Belastung für O_3, U_2 ($c = 7{,}5$, $v = 12{,}5$), erste Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(31{,}2 + 27{,}2 + 25{,}9 + 24{,}6 + 16{,}2 + 14{,}9 + 13{,}6 + 5{,}2 + 3{,}9 + 2{,}6) + 4\,(23{,}4 + 12{,}4 + 1{,}4) + 5\,(20{,}4 + 9{,}4) = 1290,$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,(12{,}5 + 11{,}2 + 2{,}8 + 1{,}5 + 0{,}2) + 4\,.\,10 + 5\,.\,7 = 244,$$

$$\sum_0^c Pa = 244 - 6\,(15 + 11{,}2) - 4\,.\,10 = 62,$$

$$\sum_c^v P(a-z) = 6\,(26 + 24{,}7) + 4\,.\,23{,}5 = 398;$$

zweite Zugrichtung

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(32{,}5 + 31{,}2 + 22{,}8 + 21{,}5 + 20{,}2 + 11{,}8 + 10{,}5 + 9{,}2 + 0{,}8) + 4\,(30 + 19 + 8) + 5\,(27 + 16 + 5) = 1431,$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,(11{,}2 + 7{,}2 + 5{,}9 + 4{,}6) + 5\,.\,0{,}4 + 4\,.\,3{,}4 = 189,$$

$$\sum_0^c Pa = 189 - 6\,.\,11{,}2 = 18{,}6,$$

$$\sum_c^v P(a-z) = 6\,.\,24{,}7 = 148.$$

Belastung für O_4, U_3 ($c = 12,5$, $v = 17,5$), erste Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(26,2 + 22,2 + 20,9 + 19,6 + 11,2 + 9,9 + 8,6 + 0,2) + 4\,(18,4 + 7,4) + 5\,(15,4 + 4,4) = 915\,,$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,(17,5 + 16,2 + 7,8 + 6,5 + 5,2) + 4\,(15 + 4) + 5\,(12 + 1) = 460\,,$$

$$\sum_0^c Pa = 460 - 6\,(17,5 + 16,2) - 4\,.\,15 = 198\,,$$

$$\sum_c^v P(a-z) = 6\,(55 + 53,7) + 4\,.\,52,5 = 862\,;$$

zweite Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(27,5 + 26,2 + 17,8 + 16,5 + 15,2 + 6,8 + 5,5 + 4,2) + 4\,(25 + 14 + 3) + 5\,(22 + 11) = 1051\,,$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,(16,2 + 12,2 + 10,9 + 9,6 + 1,2) + 5\,.\,5,4 + 4\,.\,8,4 = 361\,,$$

$$\sum_0^c Pa = 361 - 6\,.\,16,2 = 264\,, \qquad \sum_c^v P(a-z) = 6\,.\,53,7 = 322\,.$$

Belastung für O_5, U_4 ($c = 17,5$, $v = 22,5$), erste Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(21,2 + 17,2 + 15,9 + 14,6 + 6,2 + 4,9 + 3,6) + 4\,(13,4 + 2,4) + 5\,.\,10,4 = 617\,,$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,(22,5 + 21,2 + 12,8 + 11,5 + 10,2 + 1,8 + 0,5) + 4\,(20 + 9) + 5\,(17 + 6) = 714\,,$$

$$\sum_0^c Pa = 714 - 6\,(22,5 + 21,2) - 4\,.\,20 = 372\,,$$

$$\sum_c^v P(a-z) = 6\,(180 + 178,7) + 4\,.\,177,5 = 2862\,;$$

zweite Zugrichtung,

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(22,5 + 21,2 + 12,8 + 11,5 + 10,2 + 1,8 + 0,5) + 4\,(20 + 9) + 5\,(17 + 6) = 714\,,$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,(21{,}2 + 17{,}2 + 15{,}9 + 14{,}6 + 6{,}2 + 4{,}9 + 3{,}6)$$
$$+ 5\,.\,10{,}4 + 4\,(13{,}4 + 2{,}4) = 617\,,$$

$$\sum_0^c Pa = 617 - 6\,.\,21{,}2 = 490\,, \quad \sum_c^v P(a - s) = 6\,.\,178{,}7 = 1072\,.$$

Wir drücken nun die von der Verkehrslast herrührenden Grenzmomente nach 1) 2) für die erste Zugrichtung aus, setzen die analog für die zweite Zugrichtung erhaltenen in Klammer und erhalten demgemäss die Grenzbeanspruchungen. Für den Obergurt:

$$M_s = \frac{1}{45}\,(42{,}5\,.\,22{,}2 + 2{,}5\,.\,2205) = 143 \text{ mtn} \qquad (140)$$
$$M_s = \frac{1}{45}\,(37{,}5\,.\,112 + 7{,}5\,.\,1716) = 379 \qquad (362)$$
$$M_s = \frac{1}{45}\,(32{,}5\,.\,244 + 12{,}5\,.\,1290) = 535 \qquad (532)$$
$$M_s = \frac{1}{45}\,(27{,}5\,.\,460 + 17{,}5\,.\,915) = 637 \qquad (629)$$
$$M_s = \frac{1}{45}\,(22{,}5\,.\,714 + 22{,}5\,.\,617) = 666 \qquad (666)\,,$$

$$O_1 = -\,10{,}81 - \frac{143}{4{,}34} = -43{,}76 \text{ tn}$$
$$O_2 = -\,24{,}89 - \frac{379}{5{,}06} = -99{,}79$$
$$O_3 = -\,32{,}61 - \frac{535}{5{,}58} = -\,128{,}49$$
$$O_4 = -\,36{,}67 - \frac{637}{5{,}89} = -\,144{,}82$$
$$O_5 = -\,37{,}83 - \frac{666}{6} = -\,148{,}83\,,$$

und für den Untergurt:

$$M_s = \frac{40}{45}\;10 + \frac{2{,}5\,.\,2{,}5}{5\,.\,3{,}21}\;154 + \frac{5}{45}\,1716 = 260 \text{ mtn} \;(244)$$
$$M_s = \frac{35}{45}\;62 + \frac{2{,}5\,.\,7{,}5}{5\,.\,13{,}5}\;398 + \frac{10}{45}\,1290 = 445 \qquad (454)$$
$$M_s - \frac{30}{45}\,198 + \frac{2{,}5\,.\,12{,}5}{5\,.\,37{,}5}\;862 + \frac{15}{45}\;915 = 581 \qquad (582)$$
$$M_s = \frac{25}{45}\,372 + \frac{2{,}5\,.\,17{,}5}{5\,.\,157{,}5}\,2862 + \frac{20}{45}\;617 = 640 \qquad (649)\,,$$

$$U_1 = 18{,}35 + \frac{260}{4{,}8} = 72{,}40 \text{ tn}$$
$$U_2 = 28{,}69 + \frac{454}{5{,}4} = 112{,}76$$
$$U_3 = 34{,}65 + \frac{582}{5{,}8} = 134{,}99$$
$$U_4 = 38{,}83 + \frac{619}{6} = 147{,}00.$$

Der Vergleich der M_t zeigt, dass wir die Berücksichtigung der zweiten Zugrichtung ganz gut unterlassen hätten können, worauf schon in Beispiel 24 hingewiesen wurde.

Füllungsglieder. Zur Berechnung der Füllungsglieder nach 3) 4) ergeben sich bei Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v, und bei Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c, folgende Summenwerthe in Metertonnen.

Belastungen für S_1 ($c = 0$, $v = 2{,}5$):

$$\sum_v^l P(l-a) = 6(42{,}5 + 41{,}2 + 39{,}9 + 31{,}5 + 30{,}2 + 28{,}9 + 20{,}5 + 19{,}2 + 17{,}9 + 9{,}5 + 8{,}2 + 6{,}9) + 4(38{,}7 + 27{,}7 + 16{,}7 + 5{,}7) + 5(35{,}7 + 24{,}7 + 13{,}7 + 2{,}7) = 2518,$$
$$\sum_0^c Pa = 0.$$

Belastungen für S_2, T_1 ($c = 2{,}5$, $v = 7{,}5$):

$$\sum_v^l P(l-a) = 6(37{,}5 + 36{,}2 + 34{,}9 + 26{,}5 + 25{,}2 + 23{,}9 + 15{,}5 + 14{,}2 + 12{,}9 + 4{,}5 + 3{,}2 + 1{,}9) + 4(33{,}7 + 22{,}7 + 11{,}7 + 0{,}7) + 5(30{,}7 + 19{,}7 + 8{,}7) = 1989,$$
$$\sum_0^c Pa = 6(2{,}5 + 1{,}2) = 22{,}2.$$

Belastungen für S_3, T_2 ($c = 7{,}5$, $v = 12{,}5$):

$$\sum_v^l P(l-a) = 6(32{,}5 + 31{,}2 + 29{,}9 + 21{,}5 + 20{,}2 + 18{,}9 + 10{,}5 + 9{,}2 + 7{,}9) + 4(28{,}7 + 17{,}7 + 6{,}7) + 5(25{,}7 + 14{,}7 + 3{,}7) = 1524,$$
$$\sum_0^c Pa = 6(7{,}5 + 6{,}2 + 4{,}9) + 4 \,.\, 3{,}7 + 5 \,.\, 0{,}7 = 130.$$

Belastungsfälle für S_4, T_3 ($c = 12{,}5$, $v = 17{,}5$):

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(27{,}5 + 26{,}2 + 24{,}9 + 16{,}5 + 15{,}2 + 13{,}9 + 5{,}5 + 4{,}2 + 2{,}9) + 4\,(23{,}7 + 12{,}7 + 1{,}7) + 5\,(20{,}7 + 9{,}7) = 1125,$$

$$\sum_0^c Pa = 6\,(12{,}5 + 11{,}2 + 9{,}9 + 1{,}5 + 0{,}2) + 4\,.\,8{,}7 + 5\,.\,5{,}7 = 275.$$

Belastungen für S_5, T_4 ($c = 17{,}5$, $v = 22{,}5$):

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(22{,}5 + 21{,}2 + 19{,}9 + 11{,}5 + 10{,}2 + 8{,}9 + 0{,}5) + 4\,(18{,}7 + 7{,}7) + 5\,(15{,}7 + 4{,}7) = 776,$$

$$\sum_0^c Pa = 6\,(17{,}5 + 16{,}2 + 14{,}9 + 6{,}5 + 5{,}2 + 3{,}9) + 4\,(13{,}7 + 2{,}7) + 5\,.\,10{,}7 = 504.$$

Damit erhalten wir die Grenzwerthe der Stabkräfte S:

$$S_1 = 20{,}14 + \frac{25\,.\,2518}{45\,.\,23{,}3} = 80{,}17 \text{ tn}$$

$$S_2 = 13{,}58 + \frac{35\,.\,1989}{45\,.\,37{,}7} = 54{,}61$$

$$S_3 = 7{,}09 + \frac{57{,}5\,.\,1524}{45\,.\,63{,}5} = 37{,}76$$

$$S_4 = 4{,}96 + \frac{130\,.\,1125}{45\,.\,135} = 29{,}03$$

$$S_5 = 1{,}62 + \frac{\infty\,.\,776}{45\,.\,0{,}92\,.\,\infty} = 20{,}36,$$

$$S_1 = 20{,}14 - \frac{70\,.\,0}{45\,.\,23{,}3} = 20{,}14 \text{ tn}$$

$$S_2 = 13{,}58 - \frac{80\,.\,22{,}2}{45\,.\,37{,}7} = 12{,}53$$

$$S_3 = 7{,}09 - \frac{102{,}5\,.\,130}{45\,.\,63{,}5} = 2{,}43$$

$$S_4 = 4{,}96 - \frac{175\,.\,275}{45\,.\,135} = -\ 2{,}96$$

$$S_5 = 1{,}62 - \frac{\infty\,.\,504}{45\,.\,0{,}92\,.\,\infty} = -\ 10{,}55,$$

und die Grenzwerthe der Stabkräfte T:

$$T_0 = -19{,}50 - \frac{10 \,.\, 2518}{45 \,.\, 10} = -75{,}46 \text{ tn}$$

$$T_1 = -16{,}68 - \frac{25 \,.\, 1989}{45 \,.\, 24{,}4} = -62{,}13$$

$$T_2 = -\ \ 9{,}95 - \frac{35 \,.\, 1524}{45 \,.\, 38{,}6} = -40{,}66$$

$$T_3 = -\ \ 5{,}34 - \frac{57{,}5 \,.\, 1125}{45 \,.\, 64{,}2} = -27{,}72$$

$$T_4 = -\ \ 1{,}67 - \frac{130 \,.\, 776}{45 \,.\, 136} = -18{,}15,$$

$$T_0 = -19{,}50 + \frac{55 \,.\, 0}{45 \,.\, 10} = -19{,}50 \text{ tn}$$

$$T_1 = -16{,}68 + \frac{70 \,.\, 22{,}2}{45 \,.\, 24{,}4} = -15{,}26$$

$$T_2 = -\ \ 9{,}95 + \frac{80 \,.\, 130}{45 \,.\, 38{,}6} = -\ \ 3{,}96$$

$$T_3 = -\ \ 5{,}34 + \frac{102{,}5 \,.\, 275}{45 \,.\, 64{,}2} = \ \ 4{,}42$$

$$T_4 = -\ \ 1{,}67 + \frac{175 \,.\, 504}{45 \,.\, 136} = \ \ 12{,}74.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen erhält man nach § 25 bei Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0,

$$V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) = 20{,}25$$

$$+ \frac{1}{45}[6(45 + 43{,}7 + 42{,}4 + 34 + 32{,}7 + 31{,}4 + 23 + 21{,}7$$
$$+ 20{,}4 + 12 + 10{,}7 + 9{,}4 + 1)$$
$$+ 4(41{,}2 + 30{,}2 + 19{,}2 + 8{,}2)$$
$$+ 5(38{,}2 + 27{,}2 + 16{,}2 + 5{,}2)] = 20{,}25 + \frac{2794}{45} = 82{,}34 \text{ tn}$$

und für Eigengewicht allein

$$V = \mathfrak{V} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Wie oben erwähnt ist für S_1 und T_0 bei Belastung durch Zug I, Rad O bei $v = 2{,}5$ ein noch etwas ungünstigerer Grenzwerth als mit Zug II zu erwarten. In der That erhält man für S_1 mit den bereits zu O_1 berechneten Werthen der Summenausdrücke für die erste Zugrichtung

$$M_s = -\left(\frac{25}{2{,}5} - \frac{25}{45}\right) 22{,}2 - \frac{25}{45}\, 2205 = -1435 \text{ mtn},$$

für die zweite Zugrichtung

$$M_s = -\left(\frac{25}{2,5} - \frac{25}{45}\right) 7,2 - \frac{25}{45} 2395 = -1399 \text{ mtn},$$

und demnach den oberen Grenzwerth von S_1

$$S_1 = 20,14 + \frac{1435}{23,3} = 81,73 \text{ tn}$$

gegen oben berechnete 80,17 tn. Ebenso ergiebt sich für den oberen Grenzwerth von T_0

$$M_s = -\left(\frac{10}{2,5} - \frac{10}{45}\right) 22,2 - \frac{10}{45} 2205 = -573,8 \text{ mtn},$$

$$T_0 = -19,5 - \frac{573,8}{10} = -76,88 \text{ tn}$$

gegen oben berechnete 75,46 tn.

Bemerkungen. Die oben verwendeten Summen $\sum$ mit Ausnahme der $\sum_0^c Pa$ und $\sum_c^v P(a-s)$ hätten wir aus der Tabelle in Beispiel 6 entnehmen können. Beispielsweise würden sich ergeben haben für V direct

$$\sum_0^l P(l-a) = 2794,$$

für O_4, U_3 durch Interpolation

$$\sum_v^l P(l-a) = \frac{1016 + 1089}{2} = 1052 \text{ (oben 1051)},$$

für S_4, T_3 durch Interpolation

$$\sum_v^l P(l-a) = \frac{1087 + 1163}{2} = 1125 \text{ (oben 1125)},$$

$$\sum_0^c Pa = \frac{257 + 295}{2} = 276 \text{ („ 275)}.$$

Wie aus § 25 bekannt, brauchen die oben berechneten Grenzwerthe nicht in allen Fällen vollständig genau zu sein, es können unter Umständen noch etwas ungünstigere Laststellungen als die angenommenen entstehen. Im folgenden Beispiele ist die Berechnung genauer durchgeführt. Wir stellen deren Resultate mit den oben erhaltenen zusammen.

Stabkräfte	oben gefunden		genaue Grenzwerthe	
O_1	— 43,76 und	— 10,81	— **44,91** und	— 10,81
O_2	— 99,79	— 24,89	— 99,79	— 24,89
O_3	— 128,49	— 32,61	— 128,49	— 32,61
O_4	— 144,82	— 36,67	— 144,82	— 36,67
O_5	— 148,83	— 37,83	— 148,83	— 37,83
U_0	0	0	0	0
U_1	72,40	18,35	72,40	18,35
U_2	**112,76**	28,89	**113,50**	28,89
U_3	134,99	34,65	134,99	34,65
U_4	147,00	38,83	147,00	38,83
S_1	**81,73**	20,14	**83,48**	20,14
S_2	**54,61**	12,53	**55,83**	12,53
S_3	**37,76**	2,43	**38,71**	2,43
S_4	**29,03**	— 2,96	**29,53**	— 2,96
S_5	**20,36**	— 10,55	**20,62**	— 10,55
T_0	— **76,89**	— 19,50	— **78,55**	— 19,50
T_1	— **62,13**	— 15,26	— **63,36**	— 15,26
T_2	— **40,66**	— 3,96	— **41,25**	— 3,96
T_3	— **27,72**	4,42	— **28,47**	4,42
T_4	— **18,15**	12,74	— **18,40**	12,96.

Die abweichenden Resultate sind durch fetten Druck hervorgehoben. Man sieht, dass die obige Berechnung genügend genaue Werthe lieferte, wie dies in praktischen Fällen fast immer zutreffen wird. Auch die oben vorgenommene Berechnung der Füllungsglieder s_1, t_0 für Zug I konnte unterbleiben, da die Abweichungen gegen die mit Zug II erhaltenen Grenzwerthe immer noch unter zwei Procent der Letzteren bleiben und die gewählten Lastzüge aus lauter Locomotiven ohnehin sehr ungünstig sind.

Beispiel 28. Genaueste Berechnung beliebiger einfacher Systeme für bewegte Radlastzüge.

Die ungünstigsten Belastungen und Grenzwerthe der Stabkräfte im Falle des vorigen Beispiels mit möglichster Genauigkeit festzustellen.

Für ein beliebiges System gleichzeitig auf dem Träger Platz

findender Lasten in festen Entfernungen hat man nach § 25 bei jeder Stellung

$$(1)\quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \frac{v-u}{v-c}\,\frac{c}{s}\sum_c^v P(s-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

welche Gleichung auch in der Form B. 24, 1) geschrieben werden kann. Die Bedingung für mathematische Maxima und Minima von M_s lautet

$$(2)\qquad \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = \frac{u}{l}\sum_0^l P$$

und die Aenderung von M_s durch jede Verschièbung des Lastsystems um da drückt sich aus

$$(3)\qquad dM_s = \left(\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P - \frac{u}{l}\sum_0^l P\right) da,$$

wobei da für die Fahrrichtung von 0 nach l positiv, für die Fahrrichtung von l nach 0 negativ ist. Wir untersuchen nun, ob für die in Beispiel 27 angenommenen Belastungen die Maximalbedingung 2) erfüllt ist und berechnen andernfalls genauere Grenzwerthe. Die in Beispiel 26 gegebene Tabelle bleibt gültig.

Obere Gurtung. Wegen $u = v$, $s = 0$ nehmen 1) 2) folgende Formen an

$$(4)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^v Pa + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

$$(5)\qquad \sum_0^v P = \frac{u}{l}\sum_0^l P.$$

Wenn Zug I in erster Zugrichtung von 0 nach l fahrend mit Rad O den Punkt v passirt, wie in Beispiel 27 zur Berechnung der oberen Grenzbeanspruchungen angenommen wurde, dann haben wir

für O_1	$\frac{u}{l}\sum_0^l P = \frac{2,5}{45}\,125 = 6,9$	$\sum_0^v P = 16$ bis 10
„ O_2	$\frac{7,5}{45}\,108 = 18$	21 „ 15
„ O_3	$\frac{12,5}{45}\,121 = 33,6$	39 „ 33
„ O_4	$\frac{17,5}{45}\,114 = 44,3$	48 „ 42
„ O_5	$\frac{22,5}{45}\,115 = 55,7$	60 „ 55.

Hiernach sind bis auf O_1 alle berechneten Grenzwerthe genau.

Da O_1 nach dem Passiren von $v = 2{,}5$ durch Rad O wegen

$$dM_s = (10 - 6{,}9)\, da$$

mit dem Weiterrücken des Lastsystems noch wächst, so lassen wir das nächste Rad über v gelangen, womit

$$\frac{u}{l}\sum_0^l P = \frac{2{,}5}{45}\, 121 = 6{,}7\,, \qquad \sum_0^v P = 10 \text{ bis } 4$$

werden und also die Maximalbedingung erfüllt ist. Für die gefundene Laststellung haben wir

$$\sum_v^l P(l-a) = 6\,(41{,}2 + 39{,}9 + 35{,}9 + 34{,}6 + 33{,}3 + 24{,}9 + 23{,}6 + 22{,}3 + 13{,}9 + 12{,}6 + 11{,}3 + 2{,}9 + 1{,}6 + 0{,}3) + 4\,(32{,}1 + 21{,}1 + 10{,}1) + 5\,(29{,}1 + 18{,}1 + 7{,}1) = 2314 \text{ mtn},$$

$$\sum_0^v Pa = 6\,.\,2{,}5 + 4\,.\,1{,}3 = 20{,}2\,;$$

das von der Verkehrslast herrührende Moment wird

$$M_s = \frac{1}{45}\,(42{,}5\,.\,20{,}2 + 2{,}5\,.\,2314) = 148 \text{ mtn}$$

und der genaue Grenzwerth von O_1

$$O_1 = -\,10{,}81 - \frac{148}{4{,}34} = -\,44{,}91 \text{ tn}.$$

Untere Gurtung. Wegen $v - c = 2(u - c)$ nimmt 2) die Form an

$$\text{(6)} \qquad \sum_0^c P + \frac{1}{2}\sum_c^v P = \frac{u}{l}\sum_0^l P.$$

Wenn Zug I entsprechend den Annahmen in Beispiel 27 (erste Zugrichtung für U_1, zweite für U_2, U_3, U_4) von 0 nach l fahrend mit Rad O den Punkt v überschreitet, so hat man

	$\frac{u}{l}\sum_0^l P$	$\sum_0^c P + \frac{1}{2}\sum_c^v P$
für U_1	$= \frac{5}{45}\, 108 = 12$	$= 13$ bis 10
„ U_2	$\frac{10}{45}\, 114 = 25{,}3$	30 „ 30
„ U_3	$\frac{15}{45}\, 109 = 36{,}3$	42 „ 36
„ U_4	$\frac{20}{45}\, 115 = 51{,}1$	54 „ 48.

Es ist also nur für U_2 die Maximalbedingung nicht erfüllt.

Für U_2 hat man, nachdem Rad O über $v = 12,5$ hinaus ist,

$$dM_s = (30 - 25,3)\, da,$$

sodass M_s mit dem Verschieben noch wächst. Beim Ueberschreiten des Punkts v durch das nächste Rad dagegen ist wegen

$$\frac{u}{l}\sum_0^l P = \frac{10}{45}\,108 = 24, \qquad \sum_0^c P + \frac{1}{2}\sum_c^v P = 27 \text{ bis } 24$$

die Maximalbedingung erfüllt. Wir erhalten bei der gefundenen Stellung wie im Belastungsfall für S_3, T_2 des Beispiels 27

$$\sum_v^l P(l-a) = 1524$$

und weiter

$$\sum_0^c Pa = 6\,(7,2 + 5,9) + 4\,.\,4,7 + 5\,.\,1,7 = 106,$$

$$\sum_c^v P\,(a - s) = 6\,(8,5 + 13,5) = 132,$$

$$M_s = \frac{35}{45}\,106 + \frac{2,5\,.\,7,5}{5\,.\,13,5}\,132 + \frac{10}{45}\,1524 = 458,$$

$$U_2 = 28,69 + \frac{458}{5,4} = 113,50 \text{ tn}.$$

Füllungsglieder. Erster Grenzwerth. Bei den in Beispiel 27 zur Berechnung der ersten Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder gewählten Belastungen durch Zug II von v bis l mit Vorderrad O bei v ergeben sich

für S_1	$\frac{u}{l}\sum_0^l P = -\frac{25}{45}\,108 = -60,$	$\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = 0 \text{ bis } -60,$
„ S_2	$-\frac{35}{45}\,103 = -80,1$	0 „ -45
„ S_3	$-\frac{57,5}{45}\,81 = -104$	0 „ -78
„ S_4	$-\frac{130}{45}\,76 = -220$	0 „ -171
„ S_5	$-\frac{\infty}{45}\,60 = -1,3\infty$	0 „ $-1,2\infty$
„ T_0	$-\frac{10}{45}\,108 = -24$	0 „ -24
„ T_1	$-\frac{25}{45}\,103 = -57,2$	0 „ -33

für T_2 $\frac{u}{l}\sum_0^l P = -\frac{35}{45}81 = -63{,}0,$ $\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = 0$ „ -51

„ T_3 $-\frac{57{,}5}{45}76 = -97{,}1$ 0 „ -84

„ T_4 $-\frac{130}{45}60 = -173$ 0 „ $-177.$

Die Maximalbedingung ist nur für S_1, T_0 erfüllt. Da nun das Aggregat rechts mit dem Ueberschreiten (in der Richtung auf 0) des Punktes v durch das zweite Rad auf das doppelte wächst, ohne dass sich der Werth des ersten Ausdrucks bedeutend ändert, so lässt sich annehmen, dass die genauen Grenzwerthe der S, T in jenem Falle eintreten. Thatsächlich erhalten wir dann auch bei fraglichen Laststellungen

	$\frac{u}{l}\sum_0^l P$	$\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P$
für S_1	$-\frac{25}{45}108 = -60,$	-60 bis -120
„ S_2	$-\frac{35}{45}103 = -80{,}1$	-45 „ -90
„ S_3	$-\frac{57{,}5}{45}\ 87 = -111$	-78 „ -156
„ S_4	$-\frac{130}{45}\ 77 = -220$	-171 „ -342
„ S_5	$-\frac{\infty}{45}\ 66 = -1{,}5\infty$	$-1{,}2\infty$ „ $-2{,}4\infty$
„ T_0	$-\frac{10}{45}108 = -24$	-24 „ -48
„ T_1	$-\frac{25}{45}103 = -57{,}2$	-33 „ -66
„ T_2	$-\frac{35}{45}\ 87 = -67{,}7$	-51 „ -102
„ T_3	$-\frac{57{,}5}{45}\ 76 = -97{,}1$	-84 „ -168
„ T_4	$-\frac{130}{45}\ 66 = -191$	-177 „ $-354,$

sodass Bedingung 2) immer erfüllt ist. Da weiter, wie schon in Beispiel 27 berechnet wurde, für Zug II, zweites Rad bei v, das heisst auch für Zug I, zweite Zugrichtung, Rad O bei v,

im Falle $v =$	7,5	12,5	17,5	22,5
$\sum_v^l P(l-a) =$	1890	1431	1051	714,

so finden sich nach 1) und den in der Tabelle des Beispiels 26 zusammengestellten Formeln die Grenzmomente und Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder s:

$$M_s = -\frac{42{,}5\,.\,2{,}5}{5\,.\,3{,}16}\,6\,.\,3{,}04 - \frac{35}{45}\,1890 = -1593 \text{ mtn}$$

$$M_s = -\frac{70\,.\,7{,}5}{5\,.\,8{,}72}\,6\,.\,2{,}48 - \frac{57{,}5}{45}\,1431 = -2008$$

$$M_s = -\frac{147{,}5\,.\,12{,}5}{5\,.\,14{,}39}\,6\,.\,1{,}81 - \frac{130}{45}\,1051 = -3317$$

$$M_s = -\frac{\infty\,.\,17{,}5}{5\,.\,19{,}69}\,6\,.\,1{,}51 - \frac{\infty}{45}\,714 = -17{,}48\,\infty,$$

$$S_2 = 13{,}58 + \frac{1593}{37{,}7} = 55{,}83 \text{ tn}$$

$$S_3 = 7{,}09 + \frac{2008}{63{,}5} = 38{,}71$$

$$S_4 = 4{,}96 + \frac{3317}{135} = 29{,}53$$

$$S_5 = 1{,}62 + \frac{17{,}48\,.\,\infty}{0{,}92\,.\,\infty} = 20{,}62,$$

und diejenigen der Füllungsglieder t:

$$M_s = -\frac{32{,}5\,.\,2{,}5}{5\,.\,3{,}24}\,6\,.\,2{,}96 - \frac{25}{45}\,1890 = -1139 \text{ mtn}$$

$$M_s = -\frac{47{,}5\,.\,7{,}5}{5\,.\,9{,}17}\,6\,.\,2{,}03 - \frac{35}{45}\,1431 = -1208$$

$$M_s = -\frac{75\,.\,12{,}5}{5\,.\,14{,}38}\,6\,.\,1{,}82 - \frac{57{,}5}{45}\,1051 = -1485$$

$$M_s = -\frac{152{,}5\,.\,17{,}5}{5\,.\,20{,}06}\,6\,.\,1{,}14 - \frac{130}{45}\,714 = -2275,$$

$$T_1 = -16{,}68 - \frac{1139}{24{,}4} = -63{,}36 \text{ tn}$$

$$T_2 = -9{,}95 - \frac{1208}{38{,}6} = -41{,}25$$

$$T_3 = -5{,}34 - \frac{1485}{64{,}2} = -28{,}47$$

$$T_4 = -1{,}67 - \frac{2275}{136} = -18{,}40.$$

Da für S_1, T_0 bei der jetzt angenommenen Laststellung die Maximalbedingung erfüllt bleibt, ohne dass gegenüber der in Beispiel 27 gewählten eine Aenderung des Lastsystems auf dem Träger eintritt, so müssen sich in beiden Fällen genau dieselben Werthe von S_1, T_0 ergeben, was die Berechnung bestätigt.

Für S_1 haben wir in Beispiel 27 bei Belastung durch Zug I mit Rad O bei $v = 2{,}5$, erste Zugrichtung, einen ungünstigeren Grenzwerth als mit Zug II erhalten. Der fraglichen Belastung entsprechen

$$\frac{u}{l}\sum_0^l P = -\frac{25}{45}\,125 = -69,$$

$$\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = -160 \text{ bis } -100,$$

sodass die Maximalbedingung nicht erfüllt ist. Da nach dem Ueberschreiten von Punkt v durch Rad O in der Fahrrichtung von 0 nach l

$$dM_s = -(100 - 69)\,da$$

einen negativen Werth hat, so nimmt das negative M_s weiter zu. Beim Ueberschreiten des Punktes v durch das nächste Rad dagegen ist mit

$$\frac{u}{l}\sum_0^l P = -\frac{25}{45}\,121 = -67,$$

$$\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = -100 \text{ bis } -40$$

die Maximalbedingung erfüllt, wir erhalten, wie schon für O_1 berechnet,

$$\sum_v^l P(l-a) = 2314, \qquad \sum_0^v Pa = 20{,}2$$

und also das Grenzmoment und den wirklichen oberen Grenzwerth von S_1

$$M_s = -\left(\frac{25}{2{,}5} - \frac{25}{45}\right) 20{,}2 - \frac{25}{.45}\,2314 = 1476 \text{ mtn},$$

$$S_1 = 20{,}14 + \frac{1476}{23{,}3} = 83{,}48 \text{ tn}.$$

Auch für T_0 konnten wir in Beispiel 27 mit Zug I einen grösseren oberen Grenzwerth erreichen als mit Zug II. Bei der betreffenden Laststellung, welche mit der soeben für S_1 verwendeten übereinstimmt, ist die durch A. 19, 14) gegebene Maximalbedingung

$$\sum_0^v P = \frac{v}{l}\sum_0^l P$$

wegen

$$\frac{v}{l}\sum_0^l P = \frac{2{,}5}{45}\,125 = 6{,}9, \qquad \sum_0^v P = 16 \text{ bis } 10$$

nicht erfüllt. Die Erfüllung tritt jedoch ein, wenn der Zug in der Fahrrichtung von 0 nach l mit dem nächsten Rade bei $v = 2{,}5$ anlangt. Wir erhalten dann

$$\frac{v}{l}\sum_0^l P = \frac{2{,}5}{45}\,121 = 6{,}7\,, \qquad \sum_0^v P = 10 \text{ bis } 4$$

und mit den oben für S_1 benutzten Summenwerthen nach A. 19, 11)

$$T_0 = \mathfrak{T}_0 - \frac{l-v}{lv}\sum_0^v Pa - \frac{v}{l}\sum_v^l P(l-a)$$

$$= -19{,}5 - \frac{42{,}5\,.\,20{,}2}{45\,.\,2{,}5} - \frac{2314}{45} = -78{,}55 \text{ tn}.$$

Füllungsglieder. Zweiter Grenzwerth. Bei der in Beispiel 27 zur Berechnung der zweiten Grenzbeanspruchung der Füllungsglieder gewählten Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c, finden sich (S_1 und T_0 könnten unberücksichtigt bleiben, da ihre zweiten Grenzwerthe für Eigengewicht allein eintreten)

	$\frac{u}{l}\sum_0^l P =$	$\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P =$
für S_1	$-\frac{25}{45}\,0 = 0,$	0 bis 0
„ S_2	$-\frac{35}{45}\,12 = -9{,}3$	12 „ -39
„ S_3	$-\frac{57{,}5}{45}\,27 = -34{,}5$	27 „ -57
„ S_4	$-\frac{130}{45}\,39 = -113$	39 „ -138
„ S_5	$-\frac{\infty}{45}\,49 = -1{,}1\infty$	49 „ $-1{,}2\infty$
„ T_0	$-\frac{10}{45}\,0 = 0$	0 „ 0
„ T_1	$-\frac{25}{45}\,12 = -6{,}6$	12 „ -27
„ T_2	$-\frac{35}{45}\,27 = -21{,}0$	27 „ -30
„ T_3	$-\frac{57{,}5}{45}\,39 = -49{,}8$	39 „ -51
„ T_4	$-\frac{130}{45}\,49 = -142$	49 „ -134.

Es trifft also nur für T_4 die Maximalbedingung nicht zu.

Bringen wir zur Berechnung des genauen Grenzwerths von T_4 das zweite Rad über $c = 17{,}5$, so wird mit

$$\frac{u}{l}\sum_0^l P = -\frac{130}{45}\,54 = -156,$$

$$\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = -129 \text{ bis } -312$$

die Bedingung 2) erfüllt und es ergeben sich zur Berechnung nach 1) und der Tabelle in Beispiel 26

$$\sum_0^c Pa = 6(17{,}5+16{,}2+7{,}8+6{,}5+5{,}2)+4(15+4)+5(12+1)=460,$$

$$M_s = \frac{175}{45}\,460 + \frac{152{,}5\,.\,17{,}5}{5\,.\,20{,}06}\,6\,.\,1{,}26 = 1990 \text{ mtn},$$

sodass der gesuchte Grenzwerth

$$T_4 = -1{,}67 - \frac{1990}{136} = 12{,}96 \text{ tn}.$$

Damit sind sämmtliche Grenzbeanspruchungen bestimmt. Dieselben wurden am Schlusse des vorigen Beispiels mit den dort erhaltenen zusammengestellt.

Beispiel 29. Lastäquivalente bei beliebigen Systemen.

Für das in Beispiel 26 behandelte Balkenfachwerk sind diejenigen gleichmässig vertheilten Lasten p zu ermitteln, welche gleiche Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen wie die Radlastzüge in Beispiel 27 ergeben.

Gurtungsglieder. Der Drehpunkt u liegt innerhalb l. Nach § 26, 1) hat man, wenn m_s den von den Radlastzügen allein herrührenden Theil des oberen Grenzmoments M_s bezeichnet,

(1) $$p = \frac{2m_s}{u(l-c-v)+cv}.$$

Es folgen daraus mit den in Beispiel 27 berechneten m_s nachstehende Lastäquivalente in Tonnen:

für O_1 $$p = \frac{2\,.\,143}{2{,}5\,.\,42{,}5 + 0\,.\,2{,}5} = 2{,}69$$

„ O_2 $$\frac{2\,.\,379}{7{,}5\,.\,35 + 2{,}5\,.\,7{,}5} = 2{,}69$$

„ O_3 $$\frac{2\,.\,535}{12{,}5\,.\,25 + 7{,}5\,.\,12{,}5} = 2{,}63$$

„ O_4 $$\frac{2\,.\,637}{17{,}5\,.\,15 + 12{,}5\,.\,17{,}5} = 2{,}65$$

„ O_5 $$\frac{2\,.\,666}{22{,}5\,.\,5 + 17{,}5\,.\,22{,}5} = 2{,}63$$

für U_1 $p = \frac{2 \, . \, 260}{5 \, . \, 35 + 2{,}5 \, . \, 7{,}5} = 2{,}68$

„ U_2 $\frac{2 \, . \, 454}{10 \, . \, 25 + 7{,}5 \, . \, 12{,}5} = 2{,}64$

„ U_3 $\frac{2 \, . \, 582}{15 \, . \, 15 + 12{,}5 \, . \, 17{,}5} = 2{,}62$

„ U_4 $\frac{2 \, . \, 649}{20 \, . \, 5 + 17{,}5 \, . \, 22{,}5} = 2{,}63.$

Hiernach ist die übliche Wahl eines constanten p vom selben Werthe wie für die Momente M_x eines vollwandigen Trägers gleicher Spannweite (2,63 tn nach der Tabelle in Beispiel 8) gerechtfertigt. Man kann etwas nach oben abrunden.

Füllungsglieder. Der Drehpunkt u liegt ausserhalb l. Nach § 26, 3) 5) hat man für die beiden Grenzbeanspruchungen

(2) $$p = \frac{2 s_v}{(l - v)(l - z)}, \quad p = \frac{2 r_c}{c z},$$

worin mit Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

(3) $$s_v = \sum_v^l P(l - a)$$

und mit Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

(4) $$r_c = \sum_0^c Pa.$$

Die s_v, r_c wurden in Beispiel 27 berechnet. Wir erhalten damit in Tonnen:

für S_1 $p = \frac{2 \, . \, 2518}{42{,}5 \, . \, 45} = 2{,}63$, $p = \frac{2 \, . \, 0}{0 \, . \, 0} = \infty$

„ S_2 $\frac{2 \, . \, 1989}{37{,}5 \, . \, 41{,}84} = 2{,}53$ $\frac{2 \, . \, 22{,}2}{2{,}5 \, . \, 3{,}16} = 5{,}61$

„ S_3 $\frac{2 \, . \, 1524}{32{,}5 \, . \, 36{,}24} = 2{,}59$ $\frac{2 \, . \, 130}{7{,}5 \, . \, 8{,}72} = 3{,}96$

„ S_4 $\frac{2 \, . \, 1125}{27{,}5 \, . \, 30{,}61} = 2{,}67$ $\frac{2 \, . \, 275}{12{,}5 \, . \, 14{,}39} = 3{,}06$

„ S_5 $\frac{2 \, . \, 776}{22{,}5 \, . \, 25{,}31} = 2{,}63$ $\frac{2 \, . \, 504}{17{,}5 \, . \, 19{,}69} = 2{,}93$

„ T_0 $\frac{2 \, . \, 2518}{42{,}5 \, . \, 45} = 2{,}63$ $\frac{2 \, . \, 0}{0 \, . \, 0} = \infty$

„ T_1 $\frac{2 \, . \, 1989}{37{,}5 \, . \, 41{,}76} = 2{,}54$ $\frac{2 \, . \, 22{,}2}{2{,}5 \, . \, 3{,}24} = 5{,}48$

„ T_2 $\frac{2 \, . \, 1524}{32{,}5 \, . \, 35{,}83} = 2{,}61$ $\frac{2 \, . \, 130}{7{,}5 \, . \, 9{,}17} = 3{,}78$

für T_3 $p = \frac{2 \cdot 1125}{27,5 \cdot 30,62} = 2,67, \quad p = \frac{2 \cdot 275}{12,5 \cdot 14,38} = 3,06$

„ T_4 $\frac{2 \cdot 776}{22,5 \cdot 24,94} = 2,77 \quad \frac{2 \cdot 504}{17,5 \cdot 20,06} = 2,87.$

Für die in Beispiel 27 mit Zug I berechneten oberen Grenzwerthe von S_1 und T_0 würden § 26 zufolge die Lastäquivalente nach 1) sein:

$$p = \frac{2 \cdot 1435}{25 \cdot 42,5 + 0 \cdot 2,5} = 2,70 \text{ tn},$$

$$p = \frac{2 \cdot 574}{10 \cdot 42,5 + 0 \cdot 2,5} = 2,70 \text{ tn}.$$

Das Lastäquivalent für den oberen Grenzwerth der Stützenreaction ist bestimmt durch den ersten Ausdruck 2) mit $v = z = 0$

$$p = \frac{2 s_0}{l^2} = \frac{2 \cdot 2794}{45^2} = 2,76 \text{ tn}.$$

Aufgabe 29. Lastäquivalente bei beliebigen Systemen.

Die in § 26 gegebenen Beziehungen so umzuformen, dass die Berechnung der Grenzwerthe von M_s, V mit Rücksicht auf die Lastäquivalente direct befahrener vollwandiger Träger erfolgen kann.

a) **Drehpunkt** u **ausserhalb** l (Gewöhnlicher Fall bei Berechnung von Füllungsgliedern). Liegt der Drehpunkt für M_s ausserhalb der Spannweite, so haben wir den ersten Grenzwerth dieses Moments

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l - z)(l - v)\,p$$

und das Lastäquivalent

$$p = \frac{2 s_v}{(l - z)(l - v)},$$

worin mit Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$s_v = \sum_v^l P(l - a).$$

Nach A. 11, 9) 11) hat man, wenn p_v das Lastäquivalent zur Berechnung des pos max V_x im Querschnitte $x = v$ eines durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite l bedeutet,

$$p_v = \frac{2 s_v}{(l - v)^2}.$$

Damit folgt im vorliegenden Falle zur Berechnung des ersten Grenzwerths

(1) $$p = \frac{l-v}{l-z} p_v$$

und als Ausdruck dieses Grenzwerths selbst

(2) $$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-v)^2 p_v .$$

Für den zweiten Grenzwerth von M_s fanden wir

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l} czp$$

und das Lastäquivalent

$$p = \frac{2r_c}{cz},$$

worin mit Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$r_c = \sum_0^c Pa .$$

Nach A. 11, 10) 12) hat man, wenn p_c das Lastäquivalent zur Berechnung des neg max V_x im Querschnitte $x = c$ eines durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite l bezeichnet,

$$p_c = \frac{2r_c}{c^2} .$$

Damit folgt im vorliegenden Falle zur Berechnung des zweiten Grenzwerths

(3) $$p = \frac{c}{z} p_c$$

und als Ausdruck dieses Grenzwerths selbst

(4) $$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l} c^2 p_c .$$

Nach § 26 haben wir zur Berechnung des oberen Grenzwerths der Stützenreaction V

(5) $$p = p_v \quad \text{mit} \quad v = 0,$$

sodass dieser Grenzwerth selbst wird

(6) $$V = \mathfrak{B} + \frac{p_v l}{2} .$$

Der untere Grenzwerth $\mathfrak{B}$ tritt für die feste Last allein ein.

Wollte man für u ausserhalb l aber z gleich 0 oder l (das heisst auch $c = 0$ oder $v = l$) im Falle bewegter Radlastzüge den oberen Grenzwerth von M_s (der untere tritt für Eigengewicht allein ein) entsprechend der Bemerkung am Schlusse des § 25 mit Zug I an-

statt mit Zug II berechnen, so würde bei Berechnung mit Lastäquivalenten die Formel § 24, 3) für gleichmässig vertheilte bewegte Last mit dem unter b) angeführten Lastäquivalente zu verwenden sein. Wie bei Berechnung mit Radlastzügen, so kann man natürlich auch bei Berechnung mit Lastäquivalenten beide Grenzwerthe probeweise ermitteln und hat dann den numerisch grössten zu wählen.

b) **Drehpunkt u innerhalb l** (Gewöhnlicher Fall bei Berechnung von Gurtungsstäben). Liegt der Drehpunkt für M_s innerhalb der Spannweite, so tritt der untere Grenzwerth des Moments für die feste Last allein ein. Bezüglich des oberen Grenzwerths fassen wir zunächst den allein wichtigen Fall ins Auge, dass u zwischen c und v liegt. Nach § 26, 1) 2) hat man für $u = c$ wegen $z = 0$

$$(7) \quad p = \frac{2 m_s}{v(l-v)} \quad \text{mit} \quad m_s = \frac{l-v}{l} \sum_0^v Pa + \frac{v}{l} \sum_v^l P(l-a)$$

und für $u = v$ wegen $z = l$

$$(8) \quad p = \frac{2 m_s}{c(l-c)} \quad \text{mit} \quad m_s = \frac{l-c}{l} \sum_0^c Pa + \frac{c}{l} \sum_c^l P(l-a).$$

Da nun nach A. 11, 7) 8) für die max M_x eines durch den Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite l

$$(9) \quad p = \frac{2 m_x}{x(l-x)} \quad \text{mit} \quad m_x = \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l-a),$$

so gilt im Falle 7) dasselbe p wie nach 9) bei $x = v$ und im Falle 8) dasselbe p wie nach 9) bei $x = c$, das heisst *wir können den oberen Grenzwerth von M_s mit demjenigen p berechnen, welches für einen durch den angenommenen Zug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem max M_x bei der Trägermitte entspricht.* Wenn dies zunächst nur für $u = c$ und $u = v$ festgestellt wurde, so gilt es doch auch mit genügender Genauigkeit, wenn u zwischen c und v oder sonst nahe diesen Punkten liegt (Beispiele 29, 30, 32). Man kann etwas nach oben abrunden. Einen weiter vorkommenden Fall wollen wir im Folgenden betrachten.

c) **Drehpunkt u an der Grenze von l** (Füllungsglieder von Dreiecksträgern, gewissen Trapezträgern u. s. w.). Liegt der Drehpunkt von M_s gerade an der Grenze der Spannweite, so tritt der untere Grenzwerth des Moments wie im Falle b) für die feste Last allein ein. Der obere Grenzwerth könnte je nach den anzunehmenden Last-

systemen und den Werthen von c, v, l mit Zug I oder Zug II entstehen. Der Berechnung mit Zug II entsprechen die Lastäquivalente und Grenzwerthe unter a). Gewöhnlich liefert jedoch Zug I ungünstigere M_s und es haben dann diesem auch die Lastäquivalente zu entsprechen. Wir erhalten nun nach § 26, 1) 2) für $u = 0$ wegen $z = v$

$$(10) \qquad p = \frac{2}{v}\left[\frac{1}{c}\sum_0^c Pa + \frac{1}{v-c}\sum_c^v P(v-a)\right].$$

Da nach 9) für einen durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l

$$(11) \qquad p = \frac{2}{l}\left[\frac{1}{x}\sum_0^x Pa + \frac{1}{l-x}\sum_x^l P(l-a)\right],$$

so gilt im Falle 10) dasselbe p wie nach 11) für $l = v$, $x = c$, das heisst *wir können im Falle $u = 0$ den oberen Grenzwerth von M_s mit demjenigen p berechnen, welches für einen durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite v dem max M_x bei der Trägermitte entspricht.*

Für $u = l$ ergibt sich in ganz analoger Weise wie vorstehend, dass der obere Grenzwerth von M_s mit demjenigen p zu berechnen ist, welches bei einem durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite $l - c$ dem max M_x bei der Trägermitte entspricht. Doch ist hiervon der symmetrischen Anordnung fast aller Träger wegen kaum jemals Gebrauch zu machen.

Bemerkungen. Wir hätten die Grenzwerthe 2) 4) noch schneller ohne Rücksicht auf die Beziehungen des § 26 ableiten können. Liegt der Drehpunkt u ausserhalb der Spannweite l, so hat man nach § 25 bei Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a) = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\, s_v$$

und bei Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\, r_c.$$

Da nun nach A. 11, 9) – 12)

$$2 s_v = p_v\,(l-v)^2, \qquad 2\, r_c = p_c c^2,$$

so gehen vorstehende Ausdrücke für M_s sofort in 2) 4) über. Die zuerst gegebene Ableitung lässt den Zusammenhang mit den Gleichungen des § 24 besser erkennen. Zu beachten ist, dass die Formeln

unter a) ihrer Entstehung gemäss nicht nur näherungsweise sondern genau zu denselben Werthen führen müssen wie die directe Berechnung mit Lastzug II.

Die Zahlenwerthe von p, welche den obigen Resultaten zufolge dann anzuwenden sind, wenn die Züge I und II nach den Andeutungen Fig. 23 und 22 zusammengestellt werden, lassen sich aus den Tabellen des Beispiels 8 entnehmen. Wir empfehlen übrigens wiederholt und trotz vorstehender Ermittelungen, mit den wirklichen Lasten zu rechnen, was besonders in allen denjenigen Fällen geschehen sollte, für welche zuverlässige Lastäquivalente nicht bekannt sind.

Weitere Formeln und Regeln zur Berechnung mit Lastäquivalenten enthalten die Aufgaben 11, 29, 32, 34, 35, 36, 37, 48, über Anwendungen siehe die Beispiele 9, 11, 30, 32, 37, 43, 48, 53, 56, 61, 64, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 111, 114, 117, 121, 124, 127, 130.

Beispiel 30. Berechnung beliebiger Systeme mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des Beispiels 26 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie für die bewegten Radlastzüge des Beispiels 27 entstehen.

Abgesehen von der Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles in Beispiel 26 Gegebene gültig. Da für die Gurtungsglieder der Drehpunkt u innerhalb l liegt, so kann die Berechnung ihrer oberen Grenzbeanspruchungen ganz wie in Beispiel 26 mit constantem p erfolgen und zwar wäre wie für die max M_x eines durch den angenommenen Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m zu setzen $p = 2{,}63$ tn (Beispiel 8). Wird nach oben abgerundet 2,7 gewählt, so bleiben sämmtliche in Beispiel 26 berechnete Gurtungskräfte ungeändert.

Für die Füllungsglieder liegt der Drehpunkt u ausserhalb l, sodass sich nach A. 25, 2) 4) die Grenzmomente ausdrücken

$$(1) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(p-v)^2 p_v, \quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l} c^2 p_c,$$

unter p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente verstanden, welche für einen durch den angenommenen Zug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem pos max V_x bei $x = v$, bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen. Dieselben sind der Tabelle des

Beispiels 8 zu entnehmen. Wir erhalten, im Uebrigen ganz wie in Beispiel 26 vorgehend, folgende Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder in Tonnen:

$$S_1 = 20{,}14 + \frac{25 \cdot 42{,}5^2}{90 \cdot 23{,}3} 2{,}79 = 80{,}22$$

$$S_2 = 13{,}58 + \frac{35 \cdot 37{,}5^2}{90 \cdot 37{,}7} 2{,}83 = 54{,}63$$

$$S_3 = 7{,}09 + \frac{57{,}5 \cdot 32{,}5^2}{90 \cdot 63{,}5} 2{,}88 = 37{,}70$$

$$S_4 = 4{,}96 + \frac{130 \cdot 27{,}5^2}{90 \cdot 135} 2{,}98 = 29{,}07$$

$$S_5 = 1{,}62 + \frac{\infty \cdot 22{,}5^2}{90 \cdot 0{,}92\,\infty} 3{,}07 = 20{,}39,$$

$$S_1 = 20{,}14 - \frac{70 \cdot 0^2}{90 \cdot 23{,}3} \infty = 20{,}14$$

$$S_2 = 13{,}58 - \frac{80 \cdot 2{,}5^2}{90 \cdot 37{,}7} 7{,}45 = 12{,}48$$

$$S_3 = 7{,}09 - \frac{102{,}5 \cdot 7{,}5^2}{90 \cdot 63{,}5} 4{,}62 = 2{,}43$$

$$S_4 = 4{,}96 - \frac{175 \cdot 12{,}5^2}{90 \cdot 135} 3{,}52 = -\ 2{,}96$$

$$S_5 = 1{,}62 - \frac{\infty \cdot 17{,}5^2}{90 \cdot 0{,}92\,\infty} 3{,}29 = -\ 10{,}55;$$

$$T_0 = -\ 19{,}50 - \frac{10 \cdot 42{,}5^2}{90 \cdot 10} 2{,}79 = -\ 75{,}49$$

$$T_1 = -\ 16{,}68 - \frac{25 \cdot 37{,}5^2}{90 \cdot 24{,}4} 2{,}83 = -\ 61{,}99$$

$$T_2 = -\ 9{,}95 - \frac{35 \cdot 32{,}5^2}{90 \cdot 38{,}6} 2{,}88 = -\ 40{,}60$$

$$T_3 = -\ 5{,}34 - \frac{57{,}5 \cdot 27{,}5^2}{90 \cdot 64{,}2} 2{,}98 = -\ 27{,}77$$

$$T_4 = -\ 1{,}67 - \frac{130 \cdot 22{,}5^2}{90 \cdot 136} 3{,}07 = -\ 18{,}18,$$

$$T_0 = -\ 19{,}50 + \frac{55 \cdot 0^2}{90 \cdot 10} \infty = -\ 19{,}50$$

$$T_1 = -\ 16{,}68 + \frac{70 \cdot 2{,}5^2}{90 \cdot 24{,}4} 7{,}45 = -\ 15{,}20$$

$$T_2 = -\ 9{,}95 + \frac{80 \cdot 7{,}5^2}{90 \cdot 38{,}6} 4{,}62 = -\ 3{,}97$$

$$T_3 = -\ 5{,}34 + \frac{102{,}5 \cdot 12{,}5^2}{90 \cdot 64{,}2} 3{,}52 = 4{,}42$$

$$T_4 = -\ 1{,}67 + \frac{175 \cdot 17{,}5^2}{90 \cdot 136} 3{,}29 = 12{,}74.$$

Der obere Grenzwerth der Stützenreactionen ergibt sich nach A. 29, 6) mit $p_v = 2{,}76$

$$V = \mathfrak{B} + \frac{p_v l}{2} = 20{,}25 + \frac{2{,}76 \,.\, 45}{2} = 82{,}35 \text{ tn}.$$

Die gefundenen Werthe stimmen, soweit nicht kleine Differenzen durch vernachlässigte Decimalstellen und die Interpolation der p bedingt sind, vollständig mit den in Beispiel 27 mit Zug II erhaltenen überein. Da für S_1, T_0 wegen $c = 0$ auch $z = 0$ ist, so sind jedoch dem am Schlusse von A. 29, a) Gesagten zufolge mit

(2) $$M_s = (l - v)\,\frac{up}{2}$$

und dem für die Gurtungskräfte verwendeten $p = 2{,}7$ tn noch etwas ungünstigere obere Grenzwerthe als oben berechnet zu erwarten, und in der That erhält man

$$S_1 = \quad 20{,}14 + \frac{42{,}5 \,.\, 25}{23{,}3 \,.\, 2}\, 2{,}7 = \quad 81{,}70 \text{ tn},$$

$$T_0 = -\,19{,}5 \quad - \frac{42{,}5 \,.\, 10}{10 \,.\, 2}\, 2{,}7 = -\,76{,}88 \text{ tn},$$

entsprechend den in Beispiel 27 mit Zug I berechneten Werthen 81,73 und — 76,88 tn.

Bemerkungen. Vergleicht man die hier gegebene Berechnung der Grenzwerthe mit der in Beispiel 26 durchgeführten, so zeigt sich, dass durch Einführung unsrer genauen Lastäquivalente die Rechnung gegenüber der gewöhnlichen für gleichmässig vertheilte bewegte Last nicht erschwert sondern erleichtert wird, indem die Bestimmung der z unterbleiben kann.

Angenommen wir sollten die Gurtungskräfte nachträglich für $p = 2{,}63$ berechnen, so kann dies mit Rücksicht auf die vorausgegangene Berechnung mit $p = 2{,}7$ in abgekürzter Weise geschehen. Hätten wir das Eigengewicht wie die Verkehrslast nur in den Knotenpunkten des Untergurts angreifend gedacht, so würden sich nach B. 26, 9) die neuen Grenzwerthe einfach durch Multiplication der erstberechneten mit

$$\frac{0{,}9 + 2{,}63}{0{,}9 + 2{,}7} = 0{,}98$$

ergeben. Im vorliegenden Falle lässt sich mit Rücksicht auf

$$2{,}63 : 2{,}7 = 0{,}97$$

und die Berechnung in Beispiel 26 wie folgt verfahren.

$$O_1 = -10{,}81 - \frac{0{,}97 \,.\, 143}{4{,}34} = -\ 42{,}77$$

$$O_2 = -24{,}89 - \frac{0{,}97 \,.\, 380}{5{,}06} = -\ 97{,}74$$

$$O_3 = -32{,}61 - \frac{0{,}97 \,.\, 549}{5{,}58} = -128{,}05$$

$$O_4 = -36{,}67 - \frac{0{,}97 \,.\, 650}{5{,}89} = -143{,}72$$

$$O_5 = -37{,}83 - \frac{0{,}97 \,.\, 684}{6} = -148{,}41,$$

$$U_1 = 18{,}35 + \frac{0{,}97 \,.\, 262}{4{,}8} = 71{,}30$$

$$U_2 = 28{,}69 + \frac{0{,}97 \,.\, 464}{5{,}4} = 112{,}04$$

$$U_3 = 34{,}65 + \frac{0{,}97 \,.\, 599}{5{,}8} = 134{,}83$$

$$U_4 = 38{,}83 + \frac{0{,}97 \,.\, 666}{6} = 146{,}50.$$

Aufgabe 30. Parallelträger beliebigen einfachen Systems. Die Grenzwerthe der Stabkräfte von Parallelträgern beliebigen einfachen Systems mit horizontalen Gurtungen bei bewegter Verkehrslast anzugeben.

Es seien O, U, Y die Beanspruchungen der durch einen Schnitt s getroffenen Stäbe des Obergurts, Untergurts und der Füllung, M_s das Moment der äussern Kräfte links von s. Dann haben wir zur Berechnung der Gurtungen (Fig. 46, 47)

(1) $$M_s + Oh = 0, \qquad O = -\frac{M_s}{h},$$

(2) $$M_s - Uh = 0, \qquad U = \frac{M_s}{h}$$

und zur Berechnung des Füllungsglieds, wenn das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem das Glied von s aus nach dem Trägertheil vor s ansteigt oder abfällt,

(3) $$M_s \mp Y \infty \frac{h}{d} = 0, \qquad Y = \pm \frac{M_s}{\infty} \frac{d}{h}.$$

Diese Gleichungen gestatten mit Rücksicht auf die Ausdrücke für M_s in §§ 23—25 alle Stabkräfte bei beliebiger Belastung und die Grenzwerthe der Stabkräfte für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge zu berechnen. Dabei ist zu beachten, dass der

Momentendrehpunkt u für die Gurtungsstäbe innerhalb, für die Füllungsstäbe ausserhalb der Spannweite l liegt.

Bei gleichmässig vertheilter bewegter Last von constantem Werthe p per Längeneinheit beispielsweise haben wir mit § 24, 2) die Grenzwerthe der Gurtungskräfte

(4) $$O = \mathfrak{O} - [u(l-c-v)+cv]\frac{p}{2}, \qquad O = \mathfrak{O},$$

(5) $$U = \mathfrak{U} + [u(l-c-v)+cv]\frac{p}{2}, \qquad U = \mathfrak{U},$$

und mit § 24, 3) die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder

(6) $$\begin{cases} Y = \mathfrak{Y} \pm (l-z)(l-v)\dfrac{py}{2lh} = \mathfrak{Y} \pm \dfrac{(l-v)^2}{l-v+c}\dfrac{py}{2h}, \\ Y = \mathfrak{Y} \mp cz\dfrac{py}{2lh} \qquad\qquad = \mathfrak{Y} \mp \dfrac{c^2}{l-v+c}\dfrac{py}{2h}. \end{cases}$$

Diese letzten Gleichungen wurden auf anderem Wege schon in Aufgabe 21 gefunden. Die u in 4) und 5) sind verschieden.

Ist der Träger durch Radlastzüge befahren und es sollen die Grenzwerthe der Stabkräfte doch auf Grund gleichmässig vertheilter bewegter Lasten berechnet werden, so bleiben nach Aufgabe 29 die Formeln 4) 5) ungeändert, während mit A. 29, 1) 3) aus 6) entstehen

(7) $$\begin{cases} Y = \mathfrak{Y} \pm (l-v)^2\dfrac{yp_v}{2lh}, \\ Y = \mathfrak{Y} \mp c^2\dfrac{yp_c}{2lh}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke hätten wir auch durch Einsetzen von A. 29, 2) 4) in obige Gleichung 3) erhalten können, sie müssen genau dieselben Grenzwerthe wie die Berechnung mit Zug II selbst ergeben.

Wenn für $c=0$ oder $v=l$ (das heisst auch $z=0$ oder l) nach 6) mit dem für die Gurtungskräfte verwendeten p ein ungünstigerer oberer Grenzwerth als nach 7) entsteht (der untere tritt für Eigengewicht allein ein), so kann man A. 29 zufolge diesen als massgebend ansehen. Der Vergleich von 6) mit 7) zeigt wieder, dass durch Einführung richtiger Lastäquivalente die Berechnung nicht erschwert sondern erleichtert wird.

Beispiel 31. Parallelträger. Einfaches System des gleichschenklichen Dreiecks. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Parallelträger einfachen Systems des gleichschenkligen Dreiecks zur Verwendung

kommen. Gewünschte Trägerhöhe und Felderzahl $h = 6$ m, $n = 9$. Verkehrslast per Längeneinheit Träger $p = 2{,}1$ tn, Eigengewicht $g = 0{,}9$ tn. Von Letzterem kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und 0,3 tn auf diejenigen des Untergurts. Die Berechnung nach den Formeln für vorausbestimmte Knotenpunktslasten durchzuführen.

Der Träger kann unter obigen Bedingungen noch mit oben liegender oder unten liegender X-Gurtung hergestellt werden (Fig. 71 und 73). In beiden Fällen hat man nach § 24, 4) 5) mit $q = g + p$ die Grenzwerthe der Stützenreactionen

$$V = \frac{ql}{2} = \frac{3 \cdot 45}{2} = 67{,}5 \text{ tn}, \quad \mathfrak{V} = \frac{gl}{2} = \frac{0{,}9 \cdot 45}{2} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Für die Gurtungskräfte wollen wir die oberen Grenzwerthe allein berechnen, neben welchen bei der Dimensionirung nur das Verhältniss der unteren Grenzwerthe zu den oberen interessirt. Dasselbe ist im vorliegenden Falle genau oder genügend genau

$$\frac{g}{q} = \frac{0{,}9}{3} = \frac{3}{10}.$$

Fall I. X-Gurtung oben. Fig. 71. Wenn die X-Gurtung oben liegt und die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten derselben angreift, so hat man nach § 29 die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte

$$(1) \qquad X_m = -\, m(n - m)\frac{q\lambda^2}{2h},$$

$$(2) \qquad Z_m = \left[(2m - 1)(2n - 2m + 1) - \frac{q - 2g_1}{q}\right]\frac{q\lambda^2}{8h}$$

und die Eigengewichtsbeanspruchung und Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{Y}_m = \left(n - 2m + \dfrac{g_1}{g}\right)\dfrac{g\lambda d}{2h}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m + (n - m)^2 \dfrac{p\lambda d}{2nh}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m - m^2 \dfrac{p\lambda d}{2nh}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen für den vorliegenden Fall mit $n = 9$, $\lambda = 5$, $h = 6$, $d = 6{,}5$, $g = 0{,}9$, $g_1 = 0{,}3$, $p = 2{,}1$, $q = 3$ folgende Formen an

$$X_m = -\, m(9 - m)\frac{25}{4},$$

$$Z_m = (2m - 1)(19 - 2m)\frac{25}{16} + \frac{5}{4},$$

$$\mathfrak{Y}_m = 22{,}75 - 4{,}875\, m\,,$$
$$Y_m = \mathfrak{Y}_m + 0{,}632\,(9 - m)^2\,,$$
$$Y_m = \mathfrak{Y}_m - 0{,}632\, m^2\,.$$

Wir erhalten damit nachstehende Werthe der Stabkräfte in Tonnen.

$X_1 = -\ \ 50{,}00$	$Z_1 = \ \ 27{,}81$
$X_2 = -\ \ 87{,}50$	$Z_2 = \ \ 71{,}56$
$X_3 = -\ 112{,}50$	$Z_3 = 102{,}81$
$X_4 = -\ 125{,}50$	$Z_4 = 121{,}56$
	$Z_5 = 127{,}81$

$\mathfrak{Y}_1 = 17{,}88$	$Y_1 = 58{,}32$	$Y_1 = 17{,}24$
$\mathfrak{Y}_2 = 13{,}00$	$Y_2 = 43{,}97$	$Y_2 = 10{,}47$
$\mathfrak{Y}_3 = 8{,}13$	$Y_3 = 30{,}88$	$Y_3 = 2{,}44$
$\mathfrak{Y}_4 = 3{,}25$	$Y_4 = 19{,}05$	$Y_4 = -\ 6{,}86$
$\mathfrak{Y}_5 = -\ 1{,}63$	$Y_5 = 8{,}49$	$Y_5 = -\ 17{,}43$
$\mathfrak{Y}_6 = -\ 6{,}50$	$Y_6 = -\ 0{,}81$	$Y_6 = -\ 29{,}25$
$\mathfrak{Y}_7 = -\ 11{,}38$	$Y_7 = -\ 8{,}85$	$Y_7 = -\ 42{,}34$
$\mathfrak{Y}_8 = -\ 16{,}25$	$Y_8 = -\ 15{,}62$	$Y_8 = -\ 56{,}70$
$\mathfrak{Y}_9 = -\ 21{,}13$	$Y_9 = -\ 21{,}13$	$Y_9 = -\ 72{,}32$.

Werden die punktirten Stäbe angebracht (und damit die Fahrbahnlast auch durch die Endverticalen übertragen), so hat man nach Aufgabe 19 für jede Belastung $X_0 = 0$ und die Grenzwerthe von V_0 zufolge A. 19, 6) 10)

$$\mathfrak{V}_0 = -\frac{g_o v}{2} = -\frac{0{,}6\,.\,2{,}5}{2} = -\ 1{,}5\ \text{tn}\,,$$
$$V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{pv}{2} = -\ 1{,}5 - \frac{2{,}1\,.\,2{,}5}{2} = -\ 4{,}13\ \text{tn}\,.$$

Damit ist der Symmetrie des Trägers wegen die Berechnung beendigt. Die gefundenen Grenzwerthe sind in Fig. 72 eingetragen.

Fall II. X-Gurtung unten. Fig. 73. Wenn die X-Gurtung unten liegt und die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten der Z-Gurtung wirkt, dann sind nach § 29 die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte

$$(4)\qquad X_m = m\,(n - m)\,\frac{q\lambda^2}{2h}\,,$$

$$(5)\qquad Z_m = -\left[(2m - 1)\,(2n - 2m + 1) - \frac{q - 2g_x}{q}\right]\frac{q\lambda^2}{8h}$$

und die Eigengewichtsbeanspruchung und Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Y}_m = -\left(n - 2m + \frac{g_z}{g}\right)\frac{g\lambda d}{2h}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m - (n-m)(n-m+1)\frac{p\lambda d}{2nh}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m + m(m-1)\frac{p\lambda d}{2nh}. \end{cases}$$

Für den jetzigen Fall entstehen daraus mit $n = 9$, $\lambda = 5$, $h = 6$, $d = 6{,}5$, $g = 0{,}9$, $g_x = 0{,}3$, $g_z = 0{,}6$, $p = 2{,}1$, $q = 3$ die folgenden Formen:

$$\mathfrak{X}_m = m(9-m)\frac{25}{4},$$

$$\mathfrak{Z}_m = -(2m-1)(19-2m)\frac{25}{16} + \frac{5}{4},$$

$$\mathfrak{Y}_m = 4{,}875\,m - 23{,}562,$$

$$Y_m = \mathfrak{Y}_m - 0{,}632\,(9-m)(10-m),$$

$$Y_m = \mathfrak{Y}_m + 0{,}632\,m(m-1),$$

und hieraus ergeben sich die nachstehenden Werthe der Stabkräfte in Tonnen:

$X_1 = 50{,}00$	$Z_1 = -25{,}31$
$X_2 = 87{,}50$	$Z_2 = -69{,}06$
$X_3 = 112{,}50$	$Z_3 = -100{,}31$
$X_4 = 125{,}00$	$Z_4 = -119{,}06$
	$Z_5 = -125{,}31$

$\mathfrak{Y}_1 = -18{,}69$	$Y_1 = -64{,}19$	$Y_1 = -18{,}69$
$\mathfrak{Y}_2 = -13{,}81$	$Y_2 = -49{,}20$	$Y_2 = -12{,}55$
$\mathfrak{Y}_3 = -8{,}94$	$Y_3 = -35{,}48$	$Y_3 = -5{,}15$
$\mathfrak{Y}_4 = -4{,}06$	$Y_4 = -23{,}02$	$Y_4 = 3{,}52$
$\mathfrak{Y}_5 = 0{,}81$	$Y_5 = -11{,}83$	$Y_5 = 13{,}45$
$\mathfrak{Y}_6 = 5{,}69$	$Y_6 = -1{,}90$	$Y_6 = 24{,}68$
$\mathfrak{Y}_7 = 10{,}56$	$Y_7 = 6{,}77$	$Y_7 = 37{,}11$
$\mathfrak{Y}_8 = 15{,}44$	$Y_8 = 14{,}17$	$Y_8 = 50{,}83$
$\mathfrak{Y}_9 = 20{,}31$	$Y_9 = 20{,}31$	$Y_9 = 65{,}82$.

Werden die punktirten Stäbe angebracht, also die Auflager im Untergurt angeordnet, so hat man nach Aufgabe 19 für jede Belastung $X_0 = 0$ und zufolge A. 19, 5) 9) als Grenzwerthe von V_0

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{g_u v}{2} - \frac{g\,l}{2} = \frac{0{,}3\,.\,2{,}5 - 0{,}9\,.\,45}{2} = -\,19{,}88 \text{ tn},$$

$$V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{p\,l}{2} = -\,19{,}88 - \frac{1{,}05\,.\,45}{2} = -\,67{,}13 \text{ tn}.$$

Damit ist wieder mit Rücksicht auf die Symmetrie des Trägers die Berechnung erledigt. Die Grenzwerthe wurden in Fig. 74 eingetragen.

Anstatt wie oben sämmtliche Y_m zu berechnen und auf die Y'_m aus der Symmetrie zu schliessen, hätte man auch, wie in den zwei nächsten Beispielen, nur die Y_m der ersten Trägerhälfte direct berechnen und die Y'_m aus § 27, 5) erhalten können.

Beispiel 32. Parallelträger. Einfaches System des gleichschenkligen Dreiecks. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Parallelträger einfachen Systems des gleichschenkligen Dreiecks nach Anordnung von Fig. 71 zur Verwendung kommen. Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 9$. Das Eigengewicht von $g = 0{,}9$ tn soll auf die Knotenpunkte des Untergurts allein vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift. Die Berechnung auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so durchzuführen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, entstehen.

Da die X-Gurtung oben liegt, so gelten in allen anzuwendenden Formeln die oberen Vorzeichen. Nach § 27, 5) haben wir wegen $K_x = 0$ allgemein

$$(1) \qquad Y'_m = -\,Y_m,$$

und weil überdies die Stäbe und feste Last zur Verticalen durch die Trägermitte symmetrisch angeordnet sind, so genügt es, eine Trägerhälfte zu berechnen.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 27, 12)

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\,m(n-m)\,\dfrac{g\,\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = [(2m-1)(2n-2m+1)-1]\,\dfrac{g\,\lambda^2}{8h}, \\ \mathfrak{Y}_m = (n-2m+1)\,\dfrac{g\,\lambda\,d}{2h}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen mit den gegebenen Werthen und $d = 6{,}5$ folgende Formen an:

$$\mathfrak{X}_m = -m(9-m)\frac{75}{40},$$

$$\mathfrak{Z}_m = (2m-1)(19-2m)\frac{75}{160} - 0{,}42,$$

$$\mathfrak{Y}_m = (5-m)\frac{39}{8}.$$

Wir erhalten danach folgende Stabkräfte in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -15{,}00$	$\mathfrak{Z}_1 = 7{,}55$	$\mathfrak{Y}_1 = 19{,}50$
$\mathfrak{X}_2 = -26{,}25$	$\mathfrak{Z}_2 = 20{,}65$	$\mathfrak{Y}_2 = 14{,}63$
$\mathfrak{X}_3 = -33{,}75$	$\mathfrak{Z}_3 = 30{,}05$	$\mathfrak{Y}_3 = 9{,}75$
$\mathfrak{X}_4 = -37{,}50$	$\mathfrak{Z}_4 = 35{,}65$	$\mathfrak{Y}_4 = 4{,}88$
	$\mathfrak{Z}_5 = 37{,}55$	$\mathfrak{Y}_5 = 0.$

Die vom Eigengewicht allein herrührenden Stützenreactionen sind

$$\mathfrak{B} = \frac{g\,l}{2} = 0{,}45 \,.\, 45 = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen hat man nach § 28, 6) 7)

$$(3)\qquad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m - m(n-m)\dfrac{p\lambda^2}{2h}, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m + [(2m-1)(2n-2m+1)-1]\dfrac{p\lambda^2}{8h}, \end{cases}$$

also mit Rücksicht auf 2) mit $q = g + p$

$$(4)\qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m.$$

Hierin ist p zufolge Aufgabe 29 dasjenige constante Lastäquivalent, welches für die max M_x eines durch die angenommenen Locomotiven direct befahrenen vollwandigen Trägers von 45 m Spannweite massgebend wäre. Beispiel 8 liefert nach oben abgerundet $p = 2{,}7$, womit $q : g = 4$ und in Tonnen:

$X_1 = -60$	$Z_1 = 30{,}2$
$X_2 = -105$	$Z_2 = 82{,}6$
$X_3 = -135$	$Z_3 = 120{,}2$
$X_4 = -150$	$Z_4 = 142{,}6$
	$Z_5 = 150{,}2.$

Als Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder hat man nach A. 30, 7)

$$(5)\qquad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m + \frac{d}{2lh}(l-v)^2 p_r, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m - \frac{d}{2lh} c^2 p_c, \end{cases}$$

unter p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente verstanden, welche für einen durch die angenommenen Locomotiven direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem pos max V_x bei $x = v = m\lambda$, bezw. dem neg max V_x bei $x = c = (m-1)\lambda$ entsprechen. Dieselben sind der Tabelle des Beispiels 8 zu entnehmen. Wir erhalten damit und wegen $d : 2lh = 13 : 1080$ die nachstehenden Grenzwerthe in Tonnen:

$$Y_1 = 19{,}50 + \frac{13 \,.\, 40^2}{1080}\, 2{,}81 = 73{,}62$$

$$Y_2 = 14{,}63 + \frac{13 \,.\, 35^2}{1080}\, 2{,}84 = 56{,}50$$

$$Y_3 = 9{,}75 + \frac{13 \,.\, 30^2}{1080}\, 2{,}93 = 41{,}49$$

$$Y_4 = 4{,}88 + \frac{13 \,.\, 25^2}{1080}\, 3{,}00 = 27{,}45$$

$$Y_5 = 0 + \frac{13 \,.\, 20^2}{1080}\, 3{,}19 = 15{,}36,$$

$$Y_1 = 19{,}50 - \frac{13 \,.\, 0^2}{1080}\, \infty = 19{,}50$$

$$Y_2 = 14{,}63 - \frac{13 \,.\, 5^2}{1080}\, 5{,}71 = 12{,}91$$

$$Y_3 = 9{,}75 - \frac{13 \,.\, 10^2}{1080}\, 3{,}95 = 5{,}00$$

$$Y_4 = 4{,}88 - \frac{13 \,.\, 15^2}{1080}\, 3{,}39 = -\ 4{,}30$$

$$Y_5 = 0 - \frac{13 \,.\, 20^2}{1080}\, 3{,}19 = -\ 15{,}36.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreaction ergeben sich nach Aufgabe 29 mit $p_v = p_0 = 2{,}76$

$$V = \mathfrak{V} + \frac{p_r l}{2} = 20{,}25 + 1{,}38 \,.\, 45 = 82{,}35 \text{ tn}$$

und (für Eigengewicht allein)

$$V = \mathfrak{V} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Für Y_1 ist $c = 0$ und findet sich aus

$$(6)\qquad Y_1 = \mathfrak{Y}_1 + (l-v)\frac{pd}{2h}$$

mit dem für die Gurtungskräfte verwendeten $p = 2{,}7$ noch etwas un-

günstiger $Y_1 = 78$ tn, sodass man diesen oberen Grenzwerth als massgebend ansehen kann (A. 30).

Bemerkung. Hätten wir das Eigengewicht nicht in den Knotenpunkten der Z-Gurtung allein wirkend angenommen, so würden nur an Stelle von 1) 2) 4) die Formeln § 27, 5) 10) und obige Formeln 3) zu verwenden gewesen sein. Indessen wird die gemachte Annahme gewöhnlich als genügend angesehen (vgl. die Bemerkungen zu Beispiel 26).

Beispiel 33. Parallelträger. System des gleichschenkligen Dreiecks. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Brückenträger des vorigen Beispiels für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, zu berechnen.

Bis zur Ableitung der Grenzwerthe ist wie im vorigen Beispiel zu verfahren. Auch behalten wir als untere Grenzwerthe der Gurtungskräfte die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein. Die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte und beide Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder ergeben sich nach § 30, b) wie folgt.

Belastung durch Zug I (Fig. 23 und 24) von 0 bis l, Rad O bei $v = m\lambda$,

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m - \left[(n-m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{nh},$$

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + \left[(2n-2m+1)\sum_0^c Pa + (n-2m+1)\sum_c^v P(a-z) + (2m-1)\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{2nh}$$

$$\text{mit} \qquad z = -\frac{m-1}{n-2m+1}\,l.$$

Belastung durch Zug II (Fig. 22) von v bis l, Vorderrad O bei $v = m\lambda$,

$$(3) \qquad Y_m = \mathfrak{Y}_m + \frac{d}{lh}\sum_v^l P(l-a),$$

und Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei $c = (m-1)\lambda$,

$$(4) \qquad Y_m = \mathfrak{Y}_m - \frac{d}{lh}\sum_0^c Pa.$$

Auf der zweiten Trägerhälfte würde bei Berechnung von Z_m wegen $z > v$ Rad O bei c stehen müssen, doch haben wir ja nur die erste Hälfte zu berechnen.

Mit Rücksicht auf die in Beispiel 6 gegebenen Tabellen der $\sum$ liefert 1) für den Obergurt bei Annahme der ersten Richtung des Zuges I (die Resultate für die zweite sind in Klammer beigesetzt):

$$X_1 = -15{,}00 - \frac{1}{54}(8 . \ 62{,}2 + 1 . 1947) = - \ 60{,}27 \text{ tn } (- \ 57{,}92)$$

$$X_2 = -26{,}25 - \frac{1}{54}(7 . 167 + 2 . 1499) = -103{,}42 \text{ „ } (-102{,}54)$$

$$X_3 = -33{,}75 - \frac{1}{54}(6 . 348 + 3 . 1089) = -132{,}92 \text{ „ } (-132{,}69)$$

$$X_4 = -37{,}50 - \frac{1}{54}(5 . 580 + 4 . \ 764) = -147{,}80 \text{ „ } (-146{,}83),$$

ferner 2) für den Untergurt bei der zweiten Richtung des Zuges I (Resultate für die erste in Klammer beigesetzt):

$$Z_1 = \ 7{,}55 + [17 . 0 + 8 . 6 . 3{,}7 + 1 . 2140] \frac{1}{108} = \ 29{,}01 \text{ tn } (\ 30{,}18)$$

$$Z_2 = 20{,}65 + [15(117 - 6 . \ 8{,}7) + 6 . 6(\ 8{,}7 + \ 7{,}5) + 3 . 1650] \frac{1}{108} = \ 80{,}88 \text{ „ } (\ 80{,}40)$$

$$Z_3 = 30{,}05 + [13(271 - 6 . 13{,}7) + 4 . 6(13{,}7 + 22{,}5) + 5 . 1239] \frac{1}{108} = 118{,}18 \text{ „ } (117{,}17)$$

$$Z_4 = 35{,}65 + [11(480 - 6 . 18{,}7) + 2 . 6(18{,}7 + 67{,}5) + 7 . \ 876] \frac{1}{108} = 139{,}47 \text{ „ } (138{,}76)$$

$$Z_5 = 37{,}55 + \left[9(764 - 6 . 23{,}7) + 0 . 6\left(23{,}7 + \frac{180}{0}\right) + 9 . \ 580\right] \frac{1}{108} = 147{,}70 \text{ „ } (145{,}37)$$

und schliesslich 3) 4) für die Füllung:

$$Y_1 = 19{,}50 + \frac{13 . 2248}{540} = 73{,}62 \text{ tn}$$

$$Y_2 = 14{,}63 + \frac{13 . 1741}{540} = 56{,}53 \text{ „}$$

$$Y_3 = \ 9{,}75 + \frac{13 . 1321}{540} = 41{,}55 \text{ „}$$

$$Y_4 = 4{,}88 + \frac{13 \cdot 938}{540} = 27{,}46 \text{ tn}$$

$$Y_5 = 0 + \frac{13 \cdot 638}{540} = 15{,}36 \text{ „}$$

$$Y_1 = 19{,}50 - \frac{13 \cdot 0}{540} = 19{,}50 \text{ tn}$$

$$Y_2 = 14{,}63 - \frac{13 \cdot 71{,}4}{540} = 12{,}91 \text{ „}$$

$$Y_3 = 9{,}75 - \frac{13 \cdot 197}{540} = 5{,}01 \text{ „}$$

$$Y_4 = 4{,}88 - \frac{13 \cdot 382}{540} = -4{,}32 \text{ „}$$

$$Y_5 = 0 - \frac{13 \cdot 638}{540} = -15{,}36 \text{ „.}$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen ergeben sich bei Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0, ebenfalls mit Rücksicht auf Beispiel 6,

$$V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) = 20{,}25 + \frac{2794}{45} = 82{,}34 \text{ tn},$$

und (für Eigengewicht allein)

$$V = \mathfrak{V} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Nach § 30 wäre ein noch grösserer oberer Grenzwerth von Y_1 als oben mit Zug II berechnet zu erwarten bei Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei $v = \lambda$. In der That erhalten wir aus der für beliebige Belastung gültigen Gleichung

$$(5) \qquad Y_1 = \mathfrak{Y}_1 + \left[(n-1)\sum_0^v Pa + \sum_v^l P(l-a)\right]\frac{d}{lh}$$

mit den schon für X_1 verwendeten $\sum$

$$Y_1 = 19{,}5 + \frac{8 \cdot 62{,}2 + 1947}{540}\, 13 = 78{,}35 \text{ tn},$$

gegen oben erhaltene 73,62 tn. Die verhältnissmässig grosse Differenz erklärt sich durch die den Radentfernungen gegenüber grosse Feldlänge.

Bemerkungen. Hätten wir das Eigengewicht nicht in den Knotenpunkten des Untergurts allein wirkend angenommen, so würde zwar die Berechnung der $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Y}_m$, $\mathfrak{Z}_m$ nach andern Formeln als in Beispiel 32 (siehe die Bemerkung zu demselben) zu erfolgen haben, das obige Vorgehen aber ungeändert bleiben.

Wären Tabellen der $\sum$ nicht vorhanden, so würden die Summen in 1)—4) wie in Beispiel 27 oder 6 zu berechnen sein. Indessen wurde bereits an letzterer Stelle darauf hingewiesen, dass im Interesse der Zeitersparniss und Einfachheit vor Inangriffnahme der Brückenberechnungen grösserer Bahnen Tabellen der in Beispiel 6 gegebenen Art stets angelegt werden sollten.

Auch im vorliegenden Beispiel hätte es vollständig genügt, nur eine Richtung des Zuges I in Betracht zu ziehen. Bei unsern Lastannahmen wirkt auf der ersten Trägerhälfte von Balkenträgern gewöhnlich die erste Zugrichtung am ungünstigsten.

Aufgabe 31. Parallelträger. Einfaches System des gleichschenkligen Dreiecks. Maximalbedingungen für die Stabkräfte.

Die Bedingung für Maxima und Minima des Moments M_s bei bestimmtem Radlastsystem für die Stabkräfte des Parallelträgers einfachen Systems des gleichschenkligen Dreiecks zu spezialisiren.

Die fragliche Bedingung lautet nach § 25, 9)

$$(1) \qquad \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = \frac{u}{l}\sum_0^l P,$$

und da in unserm Falle nach § 27, 1)—3) jede Stabkraft dem zugehörigen Momente M_s proportional ist, so gilt Bedingung 1) auch für die Maxima und Minima der Stabkräfte. Nun ergaben sich in § 27

für	X_m,	Z_m,	Y_m,
$u =$	$m\lambda$,	$\frac{2m-1}{2}\lambda$,	$\infty\lambda$.

Daher erhalten wir:

a) wenn die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte der X-Gurtung wirkt, mit

$$c = \frac{2m-1}{2}\lambda, \qquad v = \frac{2m+1}{2}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{für } X_m & \sum_0^c P + \frac{1}{2}\sum_c^v P = \frac{m}{n}\sum_0^l P, \\ \ \ \text{„} \ \ Z_m & \sum_0^c P = \frac{2m-1}{2n}\sum_0^l P, \\ \ \ \text{„} \ \ Y_m & \sum_c^v P = \frac{1}{n}\sum_0^l P; \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte der Z-Gurtung wirkt, mit

$$c = (m - 1)\lambda, \qquad v = m\lambda$$

$$(3) \quad \begin{cases} \text{für } X_m & \sum_0^v P = \frac{m}{n} \sum_0^l P, \\ \text{,, } Z_m & \sum_0^c P + \frac{1}{2} \sum_c^v P = \frac{2m-1}{2n} \sum_0^l P, \\ \text{,, } Y_m & \sum_c^v P = \frac{1}{n} \sum_0^l P; \end{cases}$$

c) wenn die Fahrbahnbelastung auf die Knotenpunkte beider Gurtungen wirkt, mit

$$c = \frac{2m-1}{2}\lambda, \qquad v = m\lambda$$

$$(4) \quad \begin{cases} \text{für } X_m & \sum_0^v P = \frac{m}{n} \sum_0^l P, \\ \text{,, } Z_m & \sum_c^c P = \frac{2m-1}{2n} \sum_0^l P, \\ \text{,, } Y_m & \sum_c^v P = \frac{1}{2n} \sum_0^l P. \end{cases}$$

Die Gleichungen 2)—4) könnten nun in gleicher Weise zur Correctur von Laststellungen verwendet werden, wie dies in Beispiel 25 und 28) mit 1) geschehen ist.

Beispiel 34. Dachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Gleichmässig vertheilte Last.

Für den in Fig. 75 angedeuteten Dachbinder seien gegeben: Spannweite $l = 8\lambda = 32$ m, Pfeil des kreisförmigen (einem Kreisbogen eingeschriebenen) Untergurts $f = 8$ m, Längen der mittleren und beiden äussersten Verticalen $h_4 = h_0 = 5$ m. Die Stabkräfte und Stützenreactionen für eine auf die Spannweite gleichmässig vertheilte Last von $q = 1{,}2$ tn zu berechnen, von welcher (etwa mit Rücksicht auf eine als Decke dienende Verschalung) 0,25 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts zu rechnen sind.

Formberechnung. Der Ursprung der Coordinaten werde in das Auflagergelenke links und die Abscissenaxe wie immer horizontal

gelegt. Die Gleichung des Kreisbogens, welcher die Form des Untergurts bestimmt, ist dann nach § 17, 37)

$$(1)\qquad y = -\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right)^2 + x(l-x)},$$

oder mit $l = 32$, $f = 8$,

$$y = -12 + \sqrt{144 + x(32-x)},$$

wonach für	$x = 0$	4	8	12	16 m,
	$y = 0$	4	6,33	7,6	8 m.

Bezeichnen nun $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$ die Ordinaten der Knotenpunkte m in X-Gurtung und Z-Gurtung, so hat man

für					
	$m = 0$	1	2	3	4:
	$\mathfrak{x}_m = 5$	7	9	11	13 m
	$\mathfrak{z}_m = y = 0$	4	6,33	7,6	8 m
	$h_m = \mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m = 5$	3	2,67	3,4	5 m
	$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1})^2} =$	5,66	4,63	4,20	4,02 m
	$d_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_m)^2} =$	4,12	4,06	4,24	5 m
	$\varepsilon = \dfrac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	− 1,5	− 8,09	4,66	3,12
	$\nu = \dfrac{h_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}} =$	− 9,09	3,66	2,12,	

während für alle Stäbe des Obergurts die Länge $\sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47$ m ist.

Beanspruchungen. Bezeichnen q_x, q_z diejenigen Theile von q, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, so hat man nach § 31, 16) für die erste Trägerhälfte bei oben liegender X-Gurtung

$$(2)\qquad \begin{cases} X_m = -\,m(n-m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{q\lambda}{2}, \\[2ex] Z_m = (m-1)(n-m+1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{q\lambda}{2}, \\[2ex] D_m = \left(n - 2m + 1 - m\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{q\lambda}{2}, \\[2ex] V_m = -\left(n - 2m + \dfrac{q_x - q_z}{q} - m\dfrac{n-m}{\nu}\right)\dfrac{q\lambda}{2}. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung setzt voraus, dass der Verticale m beiderseits Felder mit Diagonalen gleicher Stellung anliegen, sie gilt also nicht

für h_0 und h_4. Mit $n = 8$, $\lambda = 4$, $x_m = 4{,}47$, $q = 1{,}2$, $q_x = 0{,}95$, $q_s = 0{,}25$ nehmen vorstehende Gleichungen folgende Formen an:

$$X_m = -\ 10{,}728\ m(8 - m)\frac{1}{h_m},$$

$$Z_m = 2{,}4\ (m - 1)\ (9 - m)\frac{z_m}{h_{m-1}},$$

$$D_m = 2{,}4\left(9 - 2m - m\frac{n - m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$V_m = -\ 20{,}6 + 2{,}4\,m\left(2 + \frac{8 - m}{\nu}\right).$$

Hieraus ergeben sich die nachstehenden Stabkräfte in Tonnen:

$X_1 = -\ 25{,}03$	$Z_1 = 0$	$D_1 = 23{,}07$	$V_1 = -\ 17{,}65$
$X_2 = -\ 48{,}22$	$Z_2 = 29{,}63$	$D_2 = 21{,}06$	$V_2 = -\ 3{,}13$
$X_3 = -\ 47{,}33$	$Z_3 = 52{,}85$	$D_3 = -\ 0{,}83$	$V_3 = 10{,}78.$
$X_4 = -\ 34{,}33$	$Z_4 = 51{,}08$	$D_4 = -\ 14{,}57$	

Für die Stützenreactionen hat man nach § 23, 7)

$$V = \frac{q\,l}{2} = 19{,}2\ \text{tn},$$

während die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf die Knotenpunkte 0 des Untergurts und 4 des Obergurts liefert

$$V + V_0 + Z_1\frac{4}{5{,}66} - 0{,}25\,.\,2 = 0,$$

$$2\,X_4\frac{2}{4{,}47} + V_4 + 0{,}95\,.\,4 = 0,$$

woraus die noch fehlenden Stabkräfte folgen

$$V_0 = -\ 18{,}7\ \text{tn},\qquad V_4 = 26{,}92\ \text{tn}.$$

Die vollständige Berechnung des hier behandelten Dachbinders ist in Beispiel 39 gezeigt.

Beispiel 35. Einfaches System mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen (Ellipsenträger). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Fachwerkträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks mit horizontalem Untergurte und elliptischem Obergurte zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe in der Mitte $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$. Eigengewicht per Längeneinheit Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast

$p = 2{,}7$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und 0,3 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Formberechnung. Da der Ellipsenträger gegenüber dem Parabelträger besonders dann in Betracht kommen könnte, wenn die Trägerhöhe nach den Enden zu grösser als bei letzterem werden soll, so denken wir uns den Obergurt einer Halbellipse eingeschrieben. Die Gleichung derselben lautet nach § 17, 41), wenn der Ursprung der Coordinaten in einem Auflagerpunkt liegt und l, f die beiden Halbaxen bedeuten,

(1) $$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l - x)}.$$

Mit $x = m\lambda$, $l = n\lambda$ folgt hieraus die Länge der Verticale m

(2) $$h_m = \frac{2f}{n} \sqrt{m(n - m)}.$$

Da im vorliegenden Falle $f = h = 6$, $n = 10$, $2f : n = 1{,}2$, $h_0 = 0$ sind, so ergeben sich (Fig. 76)

für					
$m =$	1	2	3	4	5:
$h_m =$	3,6	4,8	5,5	5,88	6
$v = \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	4	7,86	15,47	50
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$	4,5	5,76	6,58	7,12	7,4 m
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$	5,76	4,66	4,55	4,52	4,50 m.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 31, 16) bei oben liegender X-Gurtung

(3) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_m &= -\, m(n-m) \frac{x_m}{h_m} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m &= (m-1)(n-m+1) \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m &= \left(n - 2m + 1 - m\frac{n-m}{\varepsilon}\right) \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m &= -\left(n - 2m + \frac{g_x - g_z}{g} - m\frac{n-m}{v}\right) \frac{g\lambda}{2}. \end{aligned}\right.$$

Die letzte Gleichung setzt voraus (wie alle übrigen Formeln für V_m), dass zu beiden Seiten der Verticale m Felder mit Diagonalen gleicher

Stellung liegen, sie gilt nicht für V_5, wohl aber für V_1, da man sich im ersten Felde die Diagonale mit dem Untergurte zusammenfallend denken kann. Nach Einsetzen von $n = 10$, $\lambda = 4{,}5 = z_m$, $g = 0{,}9$, $g_x = 0{,}3$, $g_z = 0{,}6$ ergeben sich aus 3) die Formeln

$$\mathfrak{X}_m = -2{,}025\, m\,(10 - m)\,\frac{x_m}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = 9{,}112\,(m-1)\,(11-m)\,\frac{1}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = 2{,}025\left(11 - 2m - m\,\frac{10-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = 2{,}025\, m\left(2 + \frac{10-m}{v}\right) - 19{,}575,$$

woraus nachstehende Stabkräfte in Tonnen folgen.

$\mathfrak{X}_1 = -29{,}16$			$\mathfrak{V}_1 = 2{,}70$
$\mathfrak{X}_2 = -31{,}46$	$\mathfrak{Z}_2 = 22{,}78$	$\mathfrak{D}_2 = 9{,}72$	$\mathfrak{V}_2 = -3{,}37$
$\mathfrak{X}_3 = -35{,}18$	$\mathfrak{Z}_3 = 30{,}37$	$\mathfrak{D}_3 = 6{,}46$	$\mathfrak{V}_3 = -2{,}01$
$\mathfrak{X}_4 = -37{,}36$	$\mathfrak{Z}_4 = 34{,}79$	$\mathfrak{D}_4 = 3{,}80$	$\mathfrak{V}_4 = -0{,}23.$
$\mathfrak{X}_5 = -37{,}97$	$\mathfrak{Z}_5 = 37{,}19$	$\mathfrak{D}_5 = 1{,}27$	

Für $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{D}_1$ entsteht der unbestimmte Ausdruck $0:0$. Indessen liefert die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den Knotenpunkt 1 des Untergurts die ganze Beanspruchung des anliegenden Gurtungsstabes 1

(4) $$Z_1 = Z_2.$$

Die Anwendung derselben Bedingung auf den Knotenpunkt 5 des Obergurts ergiebt, dass die beiden mittleren Stäbe des Letzteren gleich stark beansprucht sind, wonach die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ liefert

(5) $$V_5 + 0{,}3 \,.\, 4{,}5 + \frac{0{,}12}{4{,}50}\,2X_5 = 0, \qquad V_5 = -\frac{4}{75}\,X_5 - 1{,}35.$$

Die Gleichungen 4) 5) gelten für beliebige Belastung, speziell für Eigengewicht allein folgen

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = 22{,}78 \text{ tn},$$

$$\mathfrak{V}_5 = \frac{4}{75}\,37{,}97 - 1{,}35 = 0{,}67 \text{ tn}.$$

Grenzbeanspruchungen. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben gefundenen Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen hat man nach § 32, 6)

$$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m,$$

also wegen $q:g = 4$ in Tonnen

$$X_1 = -116{,}64 \qquad Z_1 = Z_2$$
$$X_2 = -125{,}84 \qquad Z_2 = 91{,}12$$
$$X_3 = -140{,}72 \qquad Z_3 = 121{,}58$$
$$X_4 = -149{,}44 \qquad Z_4 = 139{,}16$$
$$X_5 = -151{,}88 \qquad Z_5 = 148{,}76.$$

Da die Schnittpunkte der Richtungslinien aller Stäbe des Obergurts mit denjenigen des Untergurts ausserhalb der Spannweite liegen (gewöhnliche Gurtungsformen), so sind nach § 32, 7) die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

$$(6)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(\varepsilon - m)(n-m)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(\varepsilon - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

und nach § 32, 9) die Grenzbeanspruchungen der Verticalen

$$(7)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{(\nu - m)(n - m - 1)^2}{(n-1)\nu + m}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{(\nu - m + n)\,m^2}{(n-1)\nu + m}\,\dfrac{\nu + 1}{\nu}\,\dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist

$$\frac{p\lambda}{2} = 1{,}35 \,.\, 4{,}5 = 6{,}075$$

und es ergeben sich demnach die Grenzwerthe in Tonnen für die Diagonalen:

$$D_2 = 9{,}72 + 6{,}075\,\frac{2\,.\,64\,.\,3\,.\,5{,}76}{28\,.\,4\,.\,3{,}6} = 43{,}05$$
$$D_3 = 6{,}46 + 6{,}075\,\frac{4{,}86\,.\,49\,.\,6{,}86\,.\,6{,}58}{63{,}74\,.\,7{,}86\,.\,4{,}8} = 33{,}62$$
$$D_4 = 3{,}80 + 6{,}075\,\frac{11{,}47\,.\,36\,.\,14{,}47\,.\,7{,}12}{133{,}23\,.\,15{,}47\,.\,5{,}5} = 26{,}60$$
$$D_5 = 1{,}27 + 6{,}075\,\frac{45\,.\,25\,.\,49\,.\,7{,}4}{445\,.\,50\,.\,5{,}88} = 20{,}21,$$

$$D_2 = 9{,}72 - 6{,}075\,\frac{12\,.\,1\,.\,5{,}76}{28\,.\,3{,}6} = 4{,}55$$
$$D_3 = 6{,}46 - 6{,}075\,\frac{14{,}86\,.\,4\,.\,6{,}58}{63{,}74\,.\,4{,}8} = -1{,}31$$
$$D_4 = 3{,}80 - 6{,}075\,\frac{21{,}47\,.\,9\,.\,7{,}12}{133{,}23\,.\,5{,}5} = -7{,}61$$
$$D_5 = 1{,}27 - 6{,}075\,\frac{55\,.\,16\,.\,7{,}4}{445\,.\,5{,}88} = -13{,}85;$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = \quad 2{,}70 - 6{,}075 \frac{0\,.\,64}{10} = \quad 2{,}70$$

$$V_2 = -\,3{,}37 - 6{,}075 \frac{2\,.\,49}{38} = -\,19{,}04$$

$$V_3 = -\,2{,}01 - 6{,}075 \frac{4{,}86\,.\,36}{73{,}74} = -\,16{,}42$$

$$V_4 = -\,0{,}23 - 6{,}075 \frac{11{,}47\,.\,25}{143{,}23} = -\,12{,}39,$$

$$V_1 = \quad 2{,}70 + 6{,}075 \frac{10\,.\,1\,.\,2}{10\,.\,1} = 14{,}85$$

$$V_2 = -\,3{,}37 + 6{,}075 \frac{12\,.\,4\,.\,5}{38\,.\,4} = \quad 6{,}17$$

$$V_3 = -\,2{,}01 + 6{,}075 \frac{14{,}86\,.\,9\,.\,8{,}86}{73{,}74\,.\,7{,}86} = 10{,}41$$

$$V_4 = -\,0{,}23 + 6{,}075 \frac{21{,}47\,.\,16\,.\,16{,}47}{143{,}23\,.\,15{,}47} = 15{,}28.$$

Schliesslich liefert 5) die Grenzwerthe von V_5

$$V_5 = \mathfrak{V}_5 = 0{,}67 \text{ tn}, \qquad V_5 = \frac{4}{75}\, 151{,}88 - 1{,}35 = 6{,}75 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen ergeben sich wie in Beispiel 26 und 31

$$V = 79{,}42, \qquad \mathfrak{V} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Bemerkungen. Anstatt beide Grenzwerthe von D_m und V_m aus 6) 7) zu berechnen, ist es bequemer, die eine derselben nach Kenntniss der andern entsprechend § 19, 4) 9) aus

$$D_m = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{D}_m - (D_m), \tag{8}$$

$$V_m = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{V}_m + \frac{p\lambda}{g}\, g_x - (V_m) \tag{9}$$

zu entnehmen. Man wird dann natürlich denjenigen Grenzwerth zuerst berechnen, für welchen der einfachste Ausdruck besteht. Indessen kann man vorziehen, die Gleichungen 8) 9) (in welchen der eine Grenzwerth zur Unterscheidung vom andern durch eine Klammer ausgezeichnet ist) zu Proberechnungen zu verwenden. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 71.

Nach den am Schlusse des § 32 gegebenen Näherungsformeln (der Berechnung mittelst vorausbestimmter Knotenpunktslasten entsprechend) hätten wir die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

$$(10)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n-m)(n-m+1)\dfrac{\varepsilon - m}{\varepsilon}\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - m(m-1)\dfrac{\varepsilon - m + n}{\varepsilon}\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

und diejenigen der Verticalen

$$(11)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - (n-m)(n-m-1)\dfrac{\nu - m}{\nu}\dfrac{p\lambda}{2n}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + m(m+1)\dfrac{\nu - m + n}{\nu}\dfrac{p\lambda}{2n}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen ergeben folgende Grenzwerthe:

$$D_2 = 9{,}72 + 0{,}607\,\frac{72\,.\,2\,.\,5{,}76}{4\,.\,3{,}6} = 44{,}68$$
$$D_3 = 6{,}46 + 0{,}607\,\frac{56\,.\,4{,}86\,.\,6{,}58}{7{,}86\,.\,4{,}8} = 35{,}27$$
$$D_4 = 3{,}80 + 0{,}607\,\frac{42\,.\,11{,}47\,.\,7{,}12}{15{,}47\,.\,5{,}5} = 28{,}27$$
$$D_5 = 1{,}27 + 0{,}607\,\frac{30\,.\,45\,.\,7{,}4}{50\,.\,5{,}88} = 21{,}89,$$

$$D_2 = 9{,}72 - 0{,}607\,\frac{2\,.\,18\,.\,5{,}76}{4\,.\,3{,}6} = 3{,}89$$
$$D_3 = 6{,}46 - 0{,}607\,\frac{6\,.\,14{,}86\,.\,6{,}58}{7{,}86\,.\,4{,}8} = -\,2{,}98$$
$$D_4 = 3{,}80 - 0{,}607\,\frac{12\,.\,21{,}47\,.\,7{,}12}{15{,}47\,.\,5{,}5} = -\,9{,}29$$
$$D_5 = 1{,}27 - 0{,}607\,\frac{20\,.\,55\,.\,7{,}4}{50\,.\,5{,}88} = -\,15{,}53;$$

$$V_1 = 2{,}70 - 0{,}607\,\frac{72\,.\,0}{1} = 2{,}70$$
$$V_2 = -\,3{,}37 - 0{,}607\,\frac{56\,.\,2}{4} = -\,20{,}37$$
$$V_3 = -\,2{,}01 - 0{,}607\,\frac{42\,.\,4{,}86}{7{,}86} = -\,17{,}77$$
$$V_4 = -\,0{,}23 - 0{,}607\,\frac{6\,.\,5\,.\,11{,}47}{15{,}47} = -\,13{,}73,$$

$$V_1 = 2{,}70 + 0{,}607\,\frac{2\,.\,10}{1} = 14{,}84$$
$$V_2 = -\,3{,}37 + 0{,}607\,\frac{6\,.\,12}{4} = 7{,}56$$
$$V_3 = -\,2{,}01 + 0{,}607\,\frac{12\,.\,14{,}86}{7{,}86} = 11{,}76$$
$$V_4 = -\,0{,}23 + 0{,}607\,\frac{20\,.\,21{,}47}{15{,}47} = 16{,}62.$$

Die Grenzwerthe von V_5 bleiben wie oben bestimmt.

Wäre bei gegebener Trägerhöhe h eine ungerade Felderzahl n verlangt gewesen, so würde zunächst der Bogenpfeil (die Ellipsenhalbaxe) f festzustellen gewesen sein. Nach 2) hat man

$$h_{\frac{n-1}{2}} = h = \frac{2f}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2}\left(n - \frac{n-1}{2}\right)},$$

woraus der in 2) zu verwendende Pfeil

$$(12) \qquad f = \frac{nh}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Beispielsweise erhält man für $h = 6$, $n = 9$ den Pfeil $f = 6{,}037$ und aus 2)

für $m =$	1	2	3	4,
$h_m =$	3,793	5,018	5,689	6 m.

Soll die Trägerhöhe auch nach den Enden hin grösser als oben gefunden bleiben (etwa damit die Diagonalen daselbst wie beim Schwedlerträger nur Zug erhalten), so kann dies durch Einschalten eines Stückes Parallelträger erreicht werden. Erhalten beispielsweise die zwei mittleren Felder horizontale Gurtungen, so liefert 2) für den übrigen Theil des Trägers mit $f = h = 6$, $n = 8$

$$h_m = \frac{3}{2}\sqrt{m(8-m)},$$

woraus

für $m =$	1	2	3	4,
$h_m =$	3,969	5,196	5,809	6 m.

Werden vier Felder Parallelträger eingeschaltet, so entsteht die in Fig. 77 angedeutete Trägerform.

Schliesslich bemerken wir, dass wenn oben und anderwärts die Stablängen nur bis auf zwei Decimalen genau angegeben wurden, dies als genügend für die Berechnung der Beanspruchungen und im Interesse der Vereinfachung des Drucks geschah, während die Stablängen für die Ausführung zweckmässig bis auf Millimeter genau gerechnet werden, wie es auch in den Constructionswerkstätten üblich ist.

Beispiel 36. Einfaches System mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen (Ellipsenträger). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Ableitung der Grenzbeanspruchungen ist wie im vorigen Beispiele zu verfahren. Als untere Grenzwerthe der Gurtungskräfte hat man die dort berechneten Beanspruchungen durch Eigengewicht allein. Setzen wir für Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis l, Rad O bei Verticale m,

(1) $$C_m = (n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a),$$

so sind nach § 33, 1) 2) die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte

(2) $$X_m = \mathfrak{X}_m - C_m\frac{x_m}{lh_m},$$

(3) $$Z_m = \mathfrak{Z}_m + C_{m-1}\frac{z_m}{lh_{m-1}} = -\frac{z_m}{x_{m-1}}X_{m-1}.$$

Da die Schnittpunkte der Richtungslinien aller Stäbe des Obergurts mit denjenigen des Untergurts ausserhalb der Spannweite liegen (gewöhnliche Gurtungsformen), so ergeben sich nach § 33, 7) 8) 11) 12) die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen wie folgt. Belastung durch Zug II (Fig. 22) von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

(4) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon l}\sum_m^n P(l-a),$$

Belastung durch Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

(5) $$D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{\varepsilon-m+n}{\varepsilon l}\sum_0^{m-1} Pa;$$

Belastung durch Zug II von $m+1$ bis n, Vorderrad O bei Verticale $m+1$,

(6) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{\nu-m}{\nu l}\sum_{m+1}^n P(l-a),$$

Belastung durch Zug II von 0 bis m, Vorderrad O bei Verticale m,

(7) $$V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\nu-m+n}{\nu l}\sum_0^m Pa.$$

Mit Rücksicht auf die in Beispiel 6 berechneten Werthe der $\sum$ liefern vorstehende Gleichungen bei der ersten Richtung des Zuges I (die der zweiten entsprechenden Resultate sind in Klammern beigesetzt) für den Obergurt:

$$X_1 = -29{,}16 - (9 . 54{,}2 + 1 . 1996)\frac{5{,}76}{45 . 3{,}6} = -117{,}47 \text{ tn} (-113{,}19)$$

$$X_2 = -31{,}46 - (8 . 144 + 2 . 1586)\frac{4{,}66}{45 . 4{,}8} = -124{,}74 \text{ „ } (-122{,}19)$$

$$X_3 = -35{,}18 - (7 . 285 + 3 . 1208)\frac{4{,}55}{45 . 5{,}5} = -138{,}48 \text{ „ } (-138{,}31)$$

$$X_4 = -37{,}36 - (6 . 490 + 4 . 884)\frac{4{,}52}{45 . 5{,}88} = -147{,}98 \text{ „ } (-146{,}04)$$

$$X_5 = -37{,}97 - (5 . 714 + 5 . 617)\frac{4{,}50}{45 . 6} = -148{,}89 \text{ „ } (-148{,}89),$$

und für den Untergurt:

$$Z_1 = Z_2 = 22{,}78 + (9 . 54{,}2 + 1 . 1996)\frac{1}{36} = 91{,}77 \text{ tn} (88{,}43)$$

$$Z_3 = 30{,}37 + (8 . 144 + 2 . 1586)\frac{1}{48} = 120{,}45 \text{ „ } (117{,}98)$$

$$Z_4 = 34{,}79 + (7 . 285 + 3 . 1208)\frac{1}{55} = 136{,}95 \text{ „ } (136{,}79)$$

$$Z_5 = 37{,}19 + (6 . 490 + 4 . 884)\frac{1}{58{,}8} = 147{,}32 \text{ „ } (145{,}39).$$

Wie man sieht hätte es genügt, die erste Zugrichtung allein zu berücksichtigen, was bei einfachen Balkenfachwerken gewöhnlich zutrifft. Natürlich hat man eventuell nur die C_m für beide Zugrichtungen zu berechnen. Weiter folgen in Tonnen die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_2 = 9{,}72 + \frac{5{,}76 . 2 . 1836}{3{,}6 . 4 . 45} = 42{,}36$$

$$D_3 = 6{,}46 + \frac{6{,}58 . 4{,}86 . 1442}{4{,}8 . 7{,}86 . 45} = 33{,}62$$

$$D_4 = 3{,}80 + \frac{7{,}12 . 11{,}47 . 1087}{5{,}5 . 15{,}47 . 45} = 26{,}98$$

$$D_5 = 1{,}27 + \frac{7{,}4 . 45 . 776}{5{,}88 . 50 . 45} = 20{,}80,$$

$$D_2 = 9{,}72 - \frac{5{,}76 . 12 . 60{,}4}{3{,}6 . 4 . 45} = 3{,}28$$

$$D_3 = 6{,}46 - \frac{6{,}58 . 14{,}86 . 170}{4{,}8 . 7{,}86 . 45} = -3{,}35$$

$$D_4 = 3{,}80 - \frac{7{,}12 . 21{,}47 . 316}{3{,}5 . 15{,}47 . 45} = -8{,}82$$

$$D_5 = 1{,}27 - \frac{7{,}4 . 55 . 530}{5{,}88 . 50 . 45} = -15{,}03;$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = 2{,}70 - \frac{0 \,.\, 1836}{1 \,.\, 45} = 2{,}70$$

$$V_2 = -3{,}37 - \frac{2 \,.\, 1442}{4 \,.\, 45} = -19{,}39$$

$$V_3 = -2{,}01 - \frac{4{,}86 \,.\, 1087}{7{,}86 \,.\, 45} = -16{,}95$$

$$V_4 = -0{,}23 - \frac{11{,}47 \,.\, 776}{15{,}47 \,.\, 45} = -13{,}02,$$

$$V_1 = 2{,}70 + \frac{10 \,.\, 60{,}4}{1 \,.\, 45} = 16{,}12$$

$$V_2 = -3{,}37 + \frac{12 \,.\, 170}{4 \,.\, 45} = 7{,}99$$

$$V_3 = -2{,}01 + \frac{14{,}86 \,.\, 316}{7{,}86 \,.\, 45} = 11{,}27$$

$$V_4 = -0{,}23 + \frac{21{,}47 \,.\, 530}{15{,}47 \,.\, 45} = 16{,}11\,.$$

Der obere Grenzwerth von V_1 wird mit Zug I noch grösser als mit Zug II. Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Untergurts ergiebt für beliebige Belastung

(8) $$V_1 = K_u\,,$$

unter K_u die Belastung jenes Knotenpunkts verstanden. Das grösste K_u und damit auch die grösste Beanspruchung der Verticale 1 folgt danach für die in Fig. 78 angedeutete Stellung von Zug I mit Rad O bei Verticale 1

$$V_1 = 2{,}70 + 6 + 2 \,.\, 6\,\frac{3{,}2}{4{,}5} + 4\,\frac{2}{4{,}5} = 19{,}01 \text{ tn}\,.$$

Die Grenzwerthe von V_5 folgen aus B. 35, 5)

$$V_5 = \mathfrak{B}_5 = 0{,}67 \text{ tn},$$

$$V_5 = \frac{4}{75}\,148{,}89 - 1{,}35 = 6{,}59 \text{ tn}\,.$$

Als Grenzwerthe der Stützenreactionen schliesslich erhält man wie in Beispiel 27 und 33

$$V = 82{,}34 \text{ tn},$$

$$\mathfrak{B} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 71.

Aufgabe 32. Einfaches System mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Anwendung von Lastäquivalenten.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte von Fachwerken einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen mit Rücksicht auf die Lastäquivalente direct befahrener vollwandiger Träger anzugeben.

Gurtungsstäbe. Wir machen von den Resultaten der Aufgabe 29 Gebrauch. Da die Drehpunkte u für die Berechnung der Gurtungskräfte stets bei c oder v liegen, so ergeben sich die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen nach den Gleichungen des § 32 mit demjenigen constanten p, welches für einen durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem max M_x bei der Trägermitte entspricht. Man kann dies p etwas nach oben abrunden.

Füllungsglieder. Gewöhnliche Gurtungsformen. Für die Beanspruchungen der Diagonalen und Verticalen hat man nach § 31, 3) 4) in allen Fällen

$$D_m = \mp M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} \quad \text{mit} \quad u = (m - \varepsilon)\lambda,$$

$$V_m = \pm M_s \frac{1}{\nu \lambda} \quad \text{mit} \quad u = (m - \nu)\lambda.$$

Liegt nun $m - \varepsilon$ nicht zwischen 0 und n, d. h. schneiden sich die Richtungslinien der Gurtungsstäbe x_m, z_m ausserhalb der Spannweite l, dann ergeben sich mit A. 29, 2) 4) die Grenzwerthe von D_m

$$(1) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{\varepsilon - m}{2\varepsilon l} (l - v)^2 p_v, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{\varepsilon - m + n}{2\varepsilon l} c^2 p_c, \end{cases}$$

worin nach § 31, 13)

$$(2) \qquad c = (m - 1)\lambda, \qquad v = m\lambda.$$

Liegt $m - \nu$ nicht zwischen 0 und n, d. h. schneiden sich die Richtungslinien der Gurtungsstäbe x_m, z_{m+1} ausserhalb der Spannweite l, so folgen mit A. 29, 2) 4) die Grenzwerthe von V_m

$$(3) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{\nu - m}{2\nu l} (l - v)^2 p_v, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{\nu - m + n}{2\nu l} c^2 p_c, \end{cases}$$

worin, wenn die Fahrbahnlast angreift

(4) a) im Knotenpunkte m der X-Gurtung, $c=(m-1)\lambda$, $v=m\lambda$,

(5) b) „ „ m „ Z-Gurtung, $c=m\lambda$, $v=(m+1)\lambda$.

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so sind bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Werthe 4), bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung die Werthe 5) massgebend. In 1) 3) bezeichnen p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente, welche für einen durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem pos max V_x bei $x=v$ bezw. dem neg max V_x bei $x=c$ entsprechen.

Wir wollen noch einige Ausnahmen erwähnen, welche jedoch bis zu ihrem Auftreten in Beispielen übergangen werden können.

Für $c=0$ oder $v=l$ tritt die untere Grenzbeanspruchung für Eigengewicht allein ein. Die obere findet sich zufolge A. 29 meist noch etwas ungünstiger als aus vorstehenden Gleichungen, wenn (der Berechnung mit Zug I bei bewegten Radlastzügen entsprechend) nach den für gleichmässig vertheilte bewegte Last bestehenden Formeln des § 32 mit dem für die Gurtungsstäbe gültigen p gerechnet wird, also beispielsweise für D_1 nach

$$D_1 = \mathfrak{D}_1 \pm (n-1)\frac{d_1}{h_1}\frac{p\lambda}{2} \tag{6}$$

und für V_1 im Falle a) nach

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 \mp (n-1)\frac{v-1}{v}\frac{p\lambda}{2}. \tag{7}$$

Für D_n und für V_{n-1} im Falle b) tritt $v=l$ ein, doch hat man diese Stabkräfte der Symmetrie zur Trägermitte wegen gewöhnlich nicht zu berechnen. Auch abgesehen von den Fällen $c=0$ und $v=l$ kann Zug I und damit das entsprechende Lastäquivalent ungünstiger als Zug II wirken, was man, wenn man will, wie in Beispiel 67 berücksichtigen kann.

Für den häufig vorkommenden Grenzfall (Dreiecksträger, Trägerenden etc.), dass $m-\varepsilon$ oder $m-v$ gerade gleich Null oder n ist, tritt der untere Grenzwerth von D_m oder V_m für Eigengewicht allein ein, den oberen wird man zufolge A. 29, c) gewöhnlich aus den für gleichmässig vertheilte bewegte Last gültigen Gleichungen mit dem durch A. 29, c) bestimmten p erhalten, wozu die c, v wie oben bestimmt sind. Analoges gilt für V_1 im Falle b) und V_{n-1} im Falle a)

bei Linsenträgern, für welche $m - v$ nur wenig von 0 oder n verschieden ist (Beispiel 67). Mittelst der Formeln 1) 4) würde man die oberen Grenzwerthe fast immer weniger ungünstig erhalten.

Füllungsglieder. Ungewöhnliche Gurtungsformen. Liegt $m - \varepsilon$ zwischen 0 und n, so tritt der untere Grenzwerth von D_m für Eigengewicht allein ein, und liegt $m - v$ zwischen 0 und n, so gilt das Gleiche für V_m. Abgesehen von dem bereits erwähnten Grenzfalle kommen jedoch solche Fälle bei Balken*brücken* (für Dachbinder brauchen wir keine Lastäquivalente) kaum vor. Es würde also selbst dann keinen Zweck haben, genaue Lastäquivalente festzustellen, wenn die Berechnung mit Radlastzügen nach den von uns gegebenen Methoden und Formeln nicht ebenso einfach oder noch einfacher wie die Berechnung mit Lastäquivalenten wäre, obschon auch die Letztere durch die oben und in Aufgabe 29 entwickelten Regeln wesentlich einfacher und genauer wie bisher wird. Bei ungewöhnlichen Gurtungsformeln wird man also stets mit den wirklichen Lasten rechnen, wenn grössere Genauigkeit als mit constantem (den Gurtungskräften entsprechendem) p erreicht werden soll.

Bemerkungen. Wir hätten die Gleichungen 1) 3) auch aus § 33, 7) — 12) in analoger Weise wie am Schlusse von Aufgabe 29 angegeben erhalten können und ebenso aus § 32, 7)—9) mit den durch A. 29, 1) 3) bestimmten Werthen von p.

Die Gleichungen 1) 3) nehmen speziell für den Parallelträger mit horizontalen Gurtungen wegen $h_m = h$, $d_m = d$, $\varepsilon = v = \infty$ folgende Formen an:

$$(8) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \pm (l - v)^2 \frac{p_v d}{2lh}, \quad D_m = \mathfrak{D}_m \mp c^2 \frac{p_c d}{2lh},$$

$$(9) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp (l - v)^2 \frac{p_v}{2l}, \quad V_m = \mathfrak{V}_m \pm c^2 \frac{p_c}{2l},$$

übereinstimmend mit A. 30, 7).

Nach 1) 3) und den daraus entstehenden Spezialformeln müssen sich ihrer Herleitung gemäss genau dieselben Grenzwerthe ergeben wie bei directer Berechnung mit Lastzug II. Bezüglich der Gültigkeit der Formeln bei wechselnder Stellung der Diagonalen bleibt es bei dem in § 31 Gesagten.

Beispiel 37. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen (Ellipsenträger). Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des Beispiels 35 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen

der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den Radlastzügen des Beispiels 36 entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzbeanspruchungen bleibt alles in Beispiel 35 Gesagte gültig. Als untere Grenzwerthe der Gurtungskräfte hat man deren dort berechnete Werthe für Eigengewicht allein, die oberen Grenzwerthe sind mit constantem p zu berechnen und zwar wäre wie für die max M_x eines durch den gewählten Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m zu setzen $p = 2{,}63$ tn (Beispiel 8) und eventuell nach oben abzurunden (Beispiel 29). Wählt man $p = 2{,}7$, so ergeben sich die in Beispiel 35 gefundenen Werthe.

Nach Aufgabe 32 hat man als Grenzbeanspruchungen der Diagonalen mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(1)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{\varepsilon - m}{2n\varepsilon} \lambda (n-m)^2 p_v, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{\varepsilon - m + n}{2n\varepsilon} \lambda (m-1)^2 p_c, \end{cases}$$

und als Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit $c = m\lambda$, $v = (m+1)\lambda$,

$$(2)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{B}_m - \dfrac{\nu - m}{2n\nu} \lambda (n-m-1)^2 p_v, \\ V_m = \mathfrak{B}_m + \dfrac{\nu - m + n}{2n\nu} \lambda m^2 p_c, \end{cases}$$

unter p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente verstanden, welche für einen durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem pos max V_x bei $x = v$ bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen. Dieselben lassen sich der Tabelle des Beispiels 8 entnehmen und wir erhalten damit in Tonnen für die Diagonalen:

$$D_2 = 9{,}72 + \frac{5{,}76 \,.\, 2 \,.\, 4{,}5 \,.\, 64}{3{,}6 \,.\, 20 \,.\, 4}\, 2{,}83 = 42{,}32$$

$$D_3 = 6{,}46 + \frac{6{,}58 \,.\, 4{,}86 \,.\, 4{,}5 \,.\, 49}{4{,}8 \,.\, 20 \,.\, 7{,}86}\, 2{,}90 = 33{,}56$$

$$D_4 = 3{,}80 + \frac{7{,}12 \,.\, 11{,}47 \,.\, 4{,}5 \,.\, 36}{5{,}5 \,.\, 20 \,.\, 15{,}47}\, 2{,}98 = 26{,}97$$

$$D_5 = 1{,}27 + \frac{7{,}4 \,.\, 45 \,.\, 4{,}5 \,.\, 25}{5{,}88 \,.\, 20 \,.\, 50}\, 3{,}06 = 20{,}76,$$

$$D_2 = 9{,}72 - \frac{5{,}76 \,.\, 12 \,.\, 4{,}5 \,.\, 1}{3{,}6 \,.\, 20 \,.\, 4}\, 5{,}94 = \quad 3{,}31$$

$$D_3 = 6{,}46 - \frac{6{,}58 \,.\, 14{,}86 \,.\, 4{,}5 \,.\, 4}{4{,}8 \,.\, 20 \,.\, 7{,}86}\, 4{,}21 = -\ 3{,}38$$

$$D_4 = 3{,}80 - \frac{7{,}12 \cdot 21{,}47 \quad 4{,}5 \cdot 9}{5{,}5 \cdot 20 \cdot 15{,}47} \, 3{,}46 = - \quad 8{,}79$$

$$D_5 = 1{,}27 - \frac{7{,}4 \cdot 56 \cdot 4{,}5 \cdot 16}{5{,}88 \cdot 20 \cdot 50} \, 3{,}27 = - \, 15{,}01 \, ,$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = \quad 2{,}70 - \frac{0 \cdot 4{,}5 \cdot 64}{20 \cdot 1} \, 2{,}83 = \quad 2{,}70$$

$$V_2 = - \, 3{,}37 - \frac{2 \cdot 4{,}5 \cdot 49}{20 \cdot 4} \, 2{,}90 = - \, 19{,}36$$

$$V_3 = - \, 2{,}01 - \frac{4{,}86 \cdot 4{,}5 \cdot 36}{20 \cdot 7{,}86} \, 2{,}98 = - \, 16{,}94$$

$$V_4 = - \, 0{,}23 - \frac{11{,}47 \cdot 4{,}5 \cdot 25}{20 \cdot 15{,}47} \, 3{,}06 = - \, 12{,}99 \, ,$$

$$V_1 = \quad 2{,}70 + \frac{10 \cdot 4{,}5 \cdot 1}{20 \cdot 1} \, 5{,}94 = 16{,}07$$

$$V_2 = - \, 3{,}37 + \frac{12 \cdot 4{,}5 \cdot 4}{20 \cdot 4} \, 4{,}21 = \quad 8{,}00$$

$$V_3 = - \, 2{,}01 + \frac{14{,}86 \cdot 4{,}5 \cdot 9}{20 \cdot 7{,}86} \, 3{,}46 = 11{,}26$$

$$V_4 = - \, 0{,}23 + \frac{21{,}47 \cdot 4{,}5 \cdot 16}{20 \cdot 15{,}47} \, 3{,}27 = 16{,}11 \, .$$

Die Grenzwerthe von V_5 bleiben wie in Beispiel 35 bestimmt und als Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man wie in Beispiel 30 und 32

$$V = 82{,}35 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{B} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Wie im vorigen Beispiele mit Zug I ein grösseres V_1 als mit Zug II zu erreichen war, so gilt das Gleiche für die entsprechenden Lastäquivalente. Wir erhalten aus

(3) $$V_1 = K_ü$$

zufolge A. 29, c) den oberen Grenzwerth von V_1 mit demjenigen p, welches für einen durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite $v = 9\,m$ dem max M_x bei der Trägermitte entspricht

$$V_1 = \mathfrak{B}_1 + p\lambda = 2{,}70 + 3{,}62 \cdot 4{,}5 = 18{,}99 \text{ tn}.$$

Die hier berechneten Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder müssen, soweit nicht kleine Differenzen durch Vernachlässigung von Decimalstellen und Interpolationen entstehen, genau mit den im vorigen Beispiele erhaltenen übereinstimmen. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 71.

Beispiel 38. Dachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen (Kreissichelträger). Grenzwerthe der Stabkräfte.

Für den in Fig. 79 angedeuteten Dachbinder, dessen Gurtungen Kreisbogen eingeschrieben sind, seien gegeben: Spannweite $l = 32$ m, grösste Trägerhöhe $h = 4$ m, Pfeil des Obergurts 5,1174 m, Pfeil des Untergurts 1,1174 m, sowie per laufenden Meter Träger feste Last $g = 0{,}5$ tn, Belastung durch Schnee und Winddruck $p = 0{,}55$ tn. Von der festen Last sind 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,1 tn auf diejenigen des Untergurts zu rechnen. Die bewegte Last soll beliebige Theile der Dachfläche treffen können. Es sind die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen (vergl. Beispiel 75).

Formberechnung. Wird der Ursprung der Coordinaten in das Auflager links gelegt, so hat man als Gleichung der Kreisbogen, welche die Gurtungen bestimmen, nach § 17, 37)

$$(1) \qquad y = -\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right)^2 + x(l - x)},$$

also für den Obergurt mit $l = 32$, $f = 5{,}1174$,

$$y = -\,22{,}454 + \sqrt{504{,}182 + x(32 - x)},$$

und für den Untergurt mit $l = 32$, $f = 1{,}1174$,

$$y = -\,113{,}993 + \sqrt{12994{,}4 + x(32 - x)}.$$

Wir erhalten danach, wenn $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$ die Ordinaten des Knotenpunkts m im Obergurte und Untergurte bezeichnen,

für	1	2	3	4:
$m =$	1	2	3	4:
$\mathfrak{x}_m =$	2,369	3,931	4,825	5,117
$\mathfrak{z}_m =$	0,490	0,839	1,048	1,117
$h_m = \mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m =$	1,879	3,092	3,777	4
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1})^2} =$	4,649	4,294	4,099	4,011
$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1})^2} =$	4,030	4,015	4,006	4,001
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_m)^2} =$	4,030	4,283	4,931	5,454
$\varepsilon = \dfrac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	2,55	5,51	17,94
$\nu = \dfrac{h_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}} =$	0,93	2,29	4,58.	

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 31, 16) auf der ersten Trägerhälfte

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -m(n-m)\frac{x_m}{h_m}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = (m-1)(n-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \left(n-2m+1-m\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(n-2m+\frac{g_x-g_s}{g}-m\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen mit $n = 8$, $\lambda = 4$, $g = 0{,}5$, $g_x = 0{,}4$, $g_s = 0{,}1$ folgende Formen an:

$$\mathfrak{X}_m = -m(8-m)\frac{x_m}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = (m-1)(9-m)\frac{z_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = \left(9-2m-m\frac{8-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = m\left(2+\frac{8-m}{\nu}\right)-8{,}6,$$

und wir erhalten danach mit den oben zusammengestellten Werthen die Eigengewichtsbeanspruchungen in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -17{,}32$			$\mathfrak{V}_1 = 0{,}93$
$\mathfrak{X}_2 = -16{,}66$	$\mathfrak{Z}_2 = 14{,}96$	$\mathfrak{D}_2 = 0{,}67$	$\mathfrak{V}_2 = 0{,}64$
$\mathfrak{X}_3 = -16{,}28$	$\mathfrak{Z}_3 = 15{,}55$	$\mathfrak{D}_3 = 0{,}44$	$\mathfrak{V}_3 = 0{,}68.$
$\mathfrak{X}_4 = -16{,}04$	$\mathfrak{Z}_4 = 15{,}89$	$\mathfrak{D}_4 = 0{,}16$	

Für $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{D}_1$ liefern die Gleichungen den unbestimmten Ausdruck 0 : 0. Indessen ergibt die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Untergurts für jede Belastung

$$(3)\qquad Z_1 = \frac{z_1}{z_2}Z_2,$$

also für Eigengewicht allein $\mathfrak{Z}_1 = 15{,}01$ tn. Für die mittlere Verticale hat man nach A. 28, 5)

$$(4)\qquad \mathfrak{V}_0 = \left(\frac{gn^2}{4h}\Delta - g_x\right)\lambda,$$

woraus mit $\Delta = \mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_{\sigma-1} = 0{,}292$ folgt $\mathfrak{V}_4 = 0{,}74$ tn. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stützenreactionen schliesslich sind

$$\mathfrak{V} = \frac{gl}{2} = 8 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben berechneten Beanspruchungen durch Eigengewicht allein. Für die oberen hat man nach § 32, 6)

$$(5) \qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m,$$

also wegen $q : g = 1{,}05 : 0{,}5 = 2{,}1$ in Tonnen

$$\begin{aligned} X_1 &= -\,36{,}37 & Z_1 &= 31{,}52 \\ X_2 &= -\,34{,}99 & Z_2 &= 31{,}42 \\ X_3 &= -\,34{,}19 & Z_3 &= 32{,}66 \\ X_4 &= -\,33{,}68 & Z_4 &= 33{,}57. \end{aligned}$$

Da für sämmtliche Diagonalen $m - \varepsilon$ nicht zwischen 0 und n liegt, so sind deren Grenzbeanspruchungen nach § 32, 7) und § 19, 4)

$$(6) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(m-1)^2\,(\varepsilon - m + n)}{(n-1)\,\varepsilon - n + m}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] D_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{D}_m - (D_m), \end{cases}$$

worin wie in 8) der erste Grenzwerth im Ausdrucke für den zweiten durch eine Klammer ausgezeichnet ist. Für die Verticale 1 ist $0 < m - v < n$ und damit nach § 32, 11) und § 19, 10)

$$(7) \qquad V_1 = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_1 - \frac{p\lambda}{g}\,g_z, \qquad V_1 = \mathfrak{V}_1.$$

Für die Verticalen 2 und 3 liegt $m - v$ nicht zwischen 0 und n und sind nach § 32, 8) und § 19, 8) die Grenzbeanspruchungen

$$(8) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{(m-1)^2\,(v - m + n)}{(n-1)\,v - n + m}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] V_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{V}_m - \dfrac{p\lambda}{g}\,g_z - (V_m). \end{cases}$$

Die Grenzbeanspruchungen der mittleren Verticale liefert A. 28, 8)

$$(9) \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{n-2}{4h}\,p\lambda\Delta, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma - \left(1 - \frac{n\Delta}{2h}\right)p\lambda.$$

Nach vorstehenden Gleichungen erhalten wir für die Diagonalen:

$$D_2 = 0{,}67 - \frac{1 \,.\, 8{,}56 \,.\, 4{,}28}{11{,}85 \,.\, 1{,}88}\,1{,}1 = -\,1{,}14, \quad D_2 = 3{,}1 \,.\, 0{,}67 + 1{,}14 = 3{,}22$$

$$D_3 = 0{,}44 - \frac{4\,.\,10{,}51\,.\,4{,}93}{33{,}57\,.\,3{,}09}\,1{,}1 = -\,1{,}76, \quad D_3 = 3{,}1\,.\,0{,}44 + 1{,}76 = 3{,}12$$

$$D_4 = 0{,}16 - \frac{9\,.\,21{,}94\,.\,5{,}45}{121{,}58\,.\,3{,}78}\,1{,}1 = -\,2{,}42 \quad D_4 = 3{,}1\,.\,0{,}16 + 2{,}42 = 2{,}92,$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = 0{,}93\,.\,2{,}1 - 0{,}44 \quad = 1{,}51, \quad V_1 = \quad 0{,}93$$

$$V_2 = 0{,}64 + \frac{1\,.\,8{,}29}{10{,}03}\,1{,}1 = 1{,}55 \quad V_2 = 3{,}1\,.\,0{,}64 - 1{,}55 = \quad 0{,}43$$

$$V_3 = 0{,}68 + \frac{4\,.\,9{,}58}{27{,}06}\,1{,}1 = 2{,}24 \quad V_3 = 3{,}1\,.\,0{,}68 - 2{,}24 = -\,0{,}13$$

$$V_4 = 0{,}74 + \frac{6\,.\,0{,}292}{2\,.\,4}\,1{,}1 = 0{,}98 \quad V_4 = 0{,}74 - 0{,}708\,.\,2{,}2 = -\,0{,}82\,.$$

Als Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man nach § 24 den Werth für Eigengewicht allein $\mathfrak{V} = 8$ tn und

$$V = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V} = 16{,}8 \text{ tn}.$$

Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt. Dieselben findet man in Fig. 134 für eine Trägerhälfte eingetragen.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass wir oben nur der Allgemeinheit wegen g_z von Null verschieden angenommen haben. Gewöhnlich denkt man sich bei Dachbindern die Belastung nur in den Knotenpunkten des Obergurts angreifend. — Eine genauere Berücksichtigung des einseitigen Winddrucks würde wie in Beispiel 57 und 58 vorzunehmen sein.

Beispiel 39. Dachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Grenzwerthe der Stabkräfte mit Rücksicht auf schiefen Winddruck.

Für den in Fig. 75 angedeuteten Dachbinder betrage die feste Last per Längeneinheit $g = 0{,}6$ tn, wovon 0,35 auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,25 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. Der Schneedruck, welcher auf beliebige Theile der Dachfläche wirksam angenommen werden soll, ist mit $p = 0{,}35$ tn per Längeneinheit Träger in Rechnung zu ziehen. Winddruck per qm normal getroffener Fläche 150 kg, Windrichtung um 10° gegen den Horizont fallend parallel der Trägerebene. Die Grenzwerthe der Stabkräfte zu berechnen, wenn einmal die erste, einmal die zweite Dachhälfte vom Winde getroffen wird.

Eigengewicht allein. Für die von der festen Last allein her-

rührenden Stabkräfte hat man nach § 31, 16) bei oben liegender X-Gurtung

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -m(n-m)\frac{x_m}{h_m}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = (m-1)(n-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \left(n-2m+1-m\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(n-2m+\frac{g_x-g_z}{g}-m\frac{n-m}{v}\right)\frac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

und im vorliegenden Falle mit $n = 8$, $\lambda = 4$, $g = 0{,}6$, $g_x = 0{,}35$, $g_z = 0{,}25$, $x_m = 4{,}47$,

$$\mathfrak{X}_m = -5{,}364\, m(8-m)\frac{1}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = 1{,}2\,(m-1)(9-m)\frac{z_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = 1{,}2\left(9-2m-m\frac{8-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = -9{,}8+1{,}2\,m\left(2+\frac{8-m}{v}\right).$$

Diese Gleichungen liefern mit Rücksicht auf die in Beispiel 34 zusammengestellten Werthe von z_m, h_m, d_m, ε, v folgende Stabkräfte in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -12{,}51$	$\mathfrak{Z}_1 = 0$	$\mathfrak{D}_1 = 11{,}53$	$\mathfrak{V}_1 = -8{,}32$
$\mathfrak{X}_2 = -24{,}11$	$\mathfrak{Z}_2 = 14{,}81$	$\mathfrak{D}_2 = 10{,}53$	$\mathfrak{V}_2 = -1{,}06$
$\mathfrak{X}_3 = -23{,}66$	$\mathfrak{Z}_3 = 26{,}42$	$\mathfrak{D}_3 = -0{,}41$	$\mathfrak{V}_3 = 5{,}89$.
$\mathfrak{X}_4 = -17{,}16$	$\mathfrak{Z}_4 = 25{,}54$	$\mathfrak{D}_4 = -7{,}28$	

Die für einfaches System mit Verticalen abgeleiteten Formeln für V_m haben für V_0 und V_4 keine Gültigkeit; dagegen ergibt die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 0 des Untergurts und 4 des Obergurts, dass $Z_1 = 0$ ist und die beiden mittleren Stäbe des Obergurts gleich stark beansprucht sind, wonach die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf dieselben Knotenpunkte für jede Belastung liefert

$$(2)\quad V + V_0 - 0{,}25\,.\,2 = 0, \qquad V_4 + K_4 + 2X_4\frac{2}{4{,}47} = 0,$$

unter K_4 die Belastung des Knotenpunkts 4 im Obergurt verstanden. Für Eigengewicht allein erhält man mit $V = \mathfrak{V} = 0{,}6 \,.\, 16 = 9{,}6$

$$\mathfrak{V}_0 = 0{,}5 - 9{,}6 = -9{,}1 \text{ tn},$$

$$\mathfrak{V}_4 = -0{,}35 \,.\, 4 + 17{,}16 \frac{4}{4{,}47} = 13{,}95 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe ohne Winddruck. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die oben berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen hat man nach § 32, 6)

(3) $$X_m = \frac{q}{g} \mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g} \mathfrak{Z}_m,$$

worin nun

$$\frac{q}{g} = \frac{0{,}95}{0{,}6} = 1{,}583.$$

Die so entstehenden Grenzwerthe wie alle weiter folgenden sind unten in einer Tabelle zusammengestellt. Da für

$m =$	1	2	3	4:
$m - \varepsilon =$	**2,5**	10,09	$-1{,}66$	**0,88**
$m - \nu =$	10,09	$-1{,}66$	**0,88**,	

also die fett gedruckten Werthe zwischen 0 und n liegen, so treten auch die Grenzwerthe von D_1, D_4, V_3 für Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein ein (ungewöhnliche Gurtungsformen, § 32), die oberen Grenzwerthe von D_1, D_4 sind nach § 32, 13)

(4) $$D_m = \frac{q}{g} \mathfrak{D}_m,$$

das heisst 1,583 mal so gross als die unteren, für den oberen Grenzwerth von V_3 hat man nach § 32, 11)

(5) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \left(n - 2m + 1 - m \frac{n-m}{\nu}\right) \frac{g\lambda}{2},$$

$$V_3 = 5{,}89 - \left(3 - \frac{15}{2{,}12}\right) 0{,}7 = 8{,}74 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe von D_2, D_3, V_1, V_2 sind nach § 32, 7) 8) bestimmt durch die Gleichungen

(6) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(\varepsilon - m)(n-m)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m} \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(\varepsilon - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m} \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}; \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{(\nu - m)(n-m)^2}{(n-1)\nu - n + m} \dfrac{\nu - 1}{\nu} \dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{(\nu - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\nu - n + m} \dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Wir erhalten in Tonnen:

$$D_2 = \quad 10{,}53 + \frac{10{,}09\,.\,36\,.\,9{,}09\,.\,4{,}06}{62{,}63\,.\,8{,}09\,.\,3}\,0{,}7 = 16{,}66$$

$$D_3 = -\,0{,}41 + \frac{1{,}66\,.\,25\,.\,3{,}66\,.\,4{,}24}{27{,}62\,.\,4{,}66\,.\,2{,}67}\,0{,}7 = \quad 0{,}90,$$

$$D_2 = \quad 10{,}53 - \frac{2{,}09\,.\,1\,.\,4{,}06}{62{,}63\,.\,3}\,0{,}7 = \quad 10{,}21$$

$$D_3 = -\,0{,}41 - \frac{9{,}66\,.\,4\,.\,4{,}24}{27{,}62\,.\,2{,}67}\,0{,}7 = -\,1{,}97;$$

$$V_1 = -\,8{,}32 - \frac{10{,}09\,.\,49\,.\,10{,}09}{70{,}63\,.\,9{,}09}\,0{,}7 = -\,13{,}76$$

$$V_2 = -\,1{,}06 - \frac{1{,}66\,.\,36\,.\,2{,}66}{19{,}62\,.\,3{,}66}\,0{,}7 = -\,2{,}61,$$

$$V_1 = -\,8{,}32 + \frac{2{,}09\,.\,0}{70{,}63}\,0{,}7 = -\,8{,}32$$

$$V_2 = -\,1{,}06 + \frac{9{,}66\,.\,1}{19{,}62}\,0{,}7 = -\,0{,}72.$$

Nach 2) entstehen die Grenzwerthe von V_0 zugleich mit denjenigen von V, das heisst für Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein. Der obere Grenzwerth folgt mit $V = 0{,}95\,.\,16 = 15{,}2$

$$V_0 = 0{,}5 - 15{,}2 = -\,14{,}70 \text{ tn}.$$

Um schliesslich zu entscheiden, für welche Belastung die Grenzwerthe von V_4 eintreten, bilden wir für den Trägertheil links eines Schnittes s durch Feld 4 die der „Verkehrslast" allein entsprechende Momentengleichung für X_4, ausgedrückt durch die Knotenpunktslasten,

$$(V - K_0)\,16 - K_1\,.\,12 - K_2\,.\,8 - K_3\,.\,4 + X_4\,\frac{5\,.\,4}{4{,}47} = 0.$$

Nach Einsetzen von

$$V = K_0 + \frac{7}{8}\,K_1 + \frac{6}{8}\,K_2 + \frac{5}{8}\,K_3 + \frac{4}{8}\,K_4 + \frac{3}{8}\,K_5 + \frac{2}{8}\,K_6 + \frac{1}{8}\,K_7$$

wird daraus

$$\frac{10}{4{,}47}\,X_4 = -\,K_1 - 2K_2 - 3K_3 - 4K_4 - 3K_5 - 2K_6 - K_7,$$

sodass der Beitrag der Verkehrslast zu V_4 aus 2) folgt

$$V_4 = \frac{2}{5}\,(K_1 + 2K_2 + 3K_3 + 1{,}5K_4 + 3K_5 + 2K_6 + K_7).$$

Hiernach tragen alle K in gleichem Sinne zu V_4 bei, die Grenzwerthe von V_4 treten für Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein ein und 2) liefert als oberen Grenzwerth

$$V_4 = -\,0{,}7\,.\,4 + 27{,}16\,\frac{4}{4{,}47} = 21{,}50 \text{ tn}.$$

	Grenzwerthe ohne Winddruck		Einfluss des Winddrucks				Grenzwerthe im Ganzen				Beispiel 34
			I. Binderhälfte		II. Binderhälfte		I. Binderhälfte		II. Binderhälfte		
X_1	— 12,51	— 19,80	4,71	— 7,78	— 0,63	— 2,44	— 7,80	— 27,58	— 12,51	— 22,24	— 25,03
X_2	— 24,11	— 38,17	7,23	— 11,46	1,26	— 5,49	— 16,88	— 49,63	— 22,85	— 43,66	— 48,22
X_3	— 23,66	— 37,45	5,52	— 9,28	2,70	— 6,47	— 18,14	— 46,73	— 20,96	— 43,92	— 47,33
X_4	— 17,16	— 27,16	2,72	— 5,53	3,05	— 4,40	— 14,44	— 32,69	— 14,11	— 31,56	— 34,33
Z_1	0	0	4,67	— 6,79	0	— 2,12	4,67	— 6,79	0	— 2,12	0
Z_2	23,44	14,81	9,91	— 10,43	2,53	— 3,05	33,35	4,38	25,97	11,76	29,63
Z_3	41,82	26,42	11,95	— 11,83	5,16	— 5,04	53,77	14,59	46,98	21,38	52,85
Z_4	40,43	25,54	9,04	— 9,79	5,82	— 6,57	49,47	15,75	46,25	18,97	51,08
D_1	18,25	11,53	5,42	— 4,34	2,25	— 1,17	23,67	7,19	20,25	10,36	23,07
D_2	16,66	10,21	2,58	— 2,28	2,77	— 2,47	19,24	7,93	19,43	7,74	21,06
D_3	0,90	— 1,97	1,61	— 2,53	0,93	— 1,84	2,51	— 4,50	1,83	— 3,81	— 0,83
D_4	— 7,28	— 11,52	3,15	— 4,67	— 0,68	— 0,85	— 4,13	— 16,19	— 7,28	— 12,37	— 14,57
V_0	— 9,10	— 14,70	3,16	— 5,26	— 0,46	— 1,64	— 5,94	— 19,96	— 9,10	— 16,34	— 18,70
V_1	— 8,32	— 13,76	1,50	— 3,00	0,32	— 1,82	— 6,82	— 16,76	— 8,00	— 11,94	— 17,65
V_2	— 0,72	— 2,61	0,90	— 1,30	0,35	— 0,74	— 0,18	— 3,91	— 0,37	— 3,35	— 3,13
V_3	8,74	5,89	3,55	— 3,14	0,68	— 0,27	14,63	2,75	9,42	5,62	10,78
V_4	21,50	13,95	3,99	— 3,03	3,99	— 3,03	25,49	10,92	25,49	10,92	26,92
V, V'	15,20	9,60	1,96	1,64	1,96	1,64	17,16	9,60	17,16	9,60	19,20
H	0	0	4,80	— 4,80	0	0	4,80	— 4,80	0	0	0

Uebrigens hätten wir die Beanspruchungen V_0, V_4 auch nach den allgemeinen Formeln A. 19, 5) 9) und A. 28, 5) 6) berechnen können.

Grenzwerthe mit Winddruck. Die vom Winddrucke allein herrührenden Stabkräfte und Stützenreactionen sind im nächsten Beispiel berechnet. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen mit Rücksicht auf Winddruck ergeben sich wie in Beispiel 21 und 22 durch Combination jener Beanspruchungen mit den oben erhaltenen Grenzwerthen für Eigengewicht und Schneedruck. Alles Weitere ist aus der Tabelle S. 193 zu ersehen.

Die Tabellenwerthe zeigen, dass symmetrisch zur Verticalen durch die Trägermitte liegende Stäbe beider Trägerhälften wesentlich verschieden beansprucht werden können. Will man den Binder symmetrisch dimensioniren, so sind natürlich die ungünstigsten Beanspruchungen zu Grunde zu legen. In der letzten Columne der Tabelle sind diejenigen Beanspruchungen aufgeführt, welche sich in Beispiel 34 für Totalbelastung des ganzen Trägers mit Berücksichtigung des Winddrucks durch einen gleichmässig über die schiefe Dachfläche vertheilten Verticaldruck von 1 tn per Knotenpunkt ergeben haben (Vergl. am Schlusse des Beispiels 21).

Beispiel 40. Dachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Einfluss schiefen Winddrucks.

Den Einfluss des Winddrucks auf die Beanspruchungen des in Fig. 75 angedeuteten Dachbinders unter folgenden Voraussetzungen zu berechnen. Binderweite 4 m, Winddruck bei normal getroffener Fläche $\mathfrak{w} = 150$ kg per qm, Windrichtung um $\beta = 10^0$ gegen die Horizontale fallend parallel der Trägerebene. Es ist einmal die dem festen Auflager anliegende, einmal die abstehende Dachhälfte vom Winde getroffen anzunehmen.

Für eine Ebene, welche den Winkel α mit der Horizontalen bildet (Fig. 53), hat man nach Beispiel 21 den für die Berechnung allein in Betracht kommenden Normaldruck des Windes per qm

$$(1) \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{w} \sin^2 (\alpha + \beta),$$

woraus sich wie dort für die drei innern Knotenpunkte der getroffenen schiefen Dachfläche abgerundet je $N = 1$ tn oder

$$N \frac{4}{4,47} = 0,90 \text{ tn Verticaldruck,}$$

$$N \frac{2}{4,47} = 0,45 \text{ tn Horizontaldruck}$$

ergeben, für die beiden äussersten Knotenpunkte halb soviel. Auf die Verticalfläche durch die Endverticale der getroffenen Dachhälfte kommt ein Normaldruck von

$$\mathfrak{n} = 150 \sin^2 (90 + 10) = 145{,}48 \text{ kg}$$

per qm, was für die beiden Knotenpunkte jener Verticalen

$$145{,}48 \,.\, 4 \,.\, 2{,}5 = 1455 \text{ kg}$$

ausmacht, wofür wir rund

$$L = 1{,}5 \text{ tn}$$

setzen wollen.

Greifen am Träger zwischen den Schnitten 0 und s beliebige Verticalkräfte K bei Abscissen e und beliebige Horizontalkräfte L bei Ordinaten c an, so hat man nach A. 5, 1) das Moment der äussern Kräfte links von s hinsichtlich irgend eines Drehpunkts der Coordinaten u, w

$$(2) \qquad M_s = Vu - Hw - \sum_0^s K(u-e) - \sum_0^s L(w-c),$$

worin die letzte Summe das negative Vorzeichen erhielt, weil wir jetzt von links nach rechts wirkende L als positiv ansehen wollen. Wird der Schnitt s für X_m, D_m, Z_m durch x_m, d_m, z_m und für V_m durch x_m, h_m, z_{m+1} gelegt, so hat man nach § 16, 3)—6) bei oben liegender X-Gurtung:

$$(3) \quad \begin{cases} X_m = -M_s \dfrac{x_m}{\lambda h_m} & \text{mit } u = m\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_m, \\[2ex] Z_m = M_s \dfrac{z_m}{\lambda h_{m-1}} & \text{„} \quad u = (m-1)\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_{m-1}, \\[2ex] D_m = -M_s \dfrac{d_m}{\lambda \varepsilon h_{m-1}} & \text{„} \quad u = (m-\varepsilon)\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_m - \varepsilon(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}), \\[2ex] V_m = M_s \dfrac{1}{\lambda \nu} & \text{„} \quad u = (m-\nu)\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_m - \nu(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}). \end{cases}$$

Die Gleichung für V_m setzt voraus, dass der Verticale m zu beiden Seiten Felder mit Diagonalen gleicher Stellung anliegen, sie gilt also nicht für V_0 und V_4.

Nach 3) erhält man mit Rücksicht auf die Formberechnung in Beispiel 34

im Falle	$m =$	1	2	3	4:
für X_m	$u =$	4	8	12	16 m
	$w =$	4	6 33	7,6	8 m
„ Z_m	$u =$	0	4	8	12 m
	$w =$	5	7	9	11 m
„ D_m	$u =$	10	40,36	—6,64	3,52 m
	$w =$	10	25,18	1,68	6,76 m
„ V_m	$u =$	40,36	—6,64	3,52 m	
	$w =$	25,18	1,68	6,76 m,	

und zufolge 2) 3) ergeben sich (Fig. 80) bei beliebigen Werthen der K, L für die erste Trägerhälfte die Beanspruchungen des Obergurts:

$$X_1 = -(4V - 4H - 4K_0 - 4L + 1L_0)\frac{4,47}{4 . 3},$$

$$X_2 = -(8V - 6,33H - 8K_0 - 4K_1 - 6,33L - 1,33L_0 + 0,67L_1)\frac{4,47}{4 . 2,67},$$

$$X_3 = -(12V - 7,6H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 7,6L - 2,6L_0 - 0,6L_1 + 1,4L_2)\frac{4,47}{4 . 3,4},$$

$$X_4 = -(16V - 8H - 16K_0 - 12K_1 - 8K_2 - 4K_3 - 8L - 3L_0 - 1L_1 + 1L_2 + 3L_3)\frac{4,47}{4 . 5},$$

die Beanspruchungen des Untergurts:

$$Z_1 = (0V - 5H - 5L)\frac{5,66}{4 . 5},$$

$$Z_2 = (4V - 7H - 4K_0 - 7L - 2L_0)\frac{4,63}{4 . 3},$$

$$Z_3 = (8V - 9H - 8K_0 - 4K_1 - 9L - 4L_0 - 2L_1)\frac{4,2}{4 . 2,67},$$

$$Z_4 = (12V - 11H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 11L - 6L_0 - 4L_1 - 2L_2)\frac{4,02}{4 . 3,4},$$

die Beanspruchungen der Diagonalen:

$$D_1 = (10V - 10H - 10K_0 - 10L - 5L_0)\frac{4,12}{4 . 1,5 . 5},$$

$$D_2 = (40,36V - 25,18H - 40,36K_0 - 36,36K_1 - 25,18L - 20,18L_0 - 18,18L_1)\frac{4,06}{4 . 8,09 . 8},$$

$$D_3 = -(-6{,}64\,V - 1{,}68\,H + 6{,}64\,K_0 + 10{,}64\,K_1 + 14{,}64\,K_2$$
$$- 1{,}68\,L + 3{,}32\,L_0 + 5{,}32\,L_1 + 7{,}32\,L_2)\frac{4{,}24}{4\,.\,4{,}66\,.\,2{,}67},$$
$$D_4 = -(3{,}52\,V - 6{,}76\,H - 3{,}52\,K_0 + 0{,}48\,K_1 + 4{,}48\,K_2 + 8{,}48\,K_3$$
$$- 6{,}76\,L - 1{,}76\,L_0 + 0{,}24\,L_1 + 2{,}24\,L_2$$
$$+ 4{,}24\,L_3)\frac{5}{4\,.\,3{,}12\,.\,3{,}4},$$

und die Beanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = -(40{,}36\,V - 25{,}18\,H - 40{,}36\,K_0 - 25{,}18\,L - 20{,}18\,L_0)\frac{1}{4\,.\,9{,}09},$$
$$V_2 = (-6{,}64\,V - 1{,}68\,H + 6{,}64\,K_0 + 10{,}64\,K_1 - 1{,}68\,L$$
$$+ 3{,}32\,L_0 + 5{,}32\,L_1)\frac{1}{4\,.\,3{,}66},$$
$$V_3 = (3{,}52\,V - 6{,}76\,H - 3{,}52\,K_0 + 0{,}48\,K_1 + 4{,}48\,K_2 - 6{,}76\,L$$
$$- 1{,}76\,L_0 + 0{,}24\,L_1 + 2{,}24\,L_2)\frac{1}{4\,.\,2{,}12}.$$

Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den Knotenpunkt 0 des Untergurts liefert zur Bestimmung von V_0

$$V + V_0 + Z_1\frac{4}{5{,}66} = 0.$$

Denkt man sich den ganzen Träger um die mittlere Verticale gedreht bis die Auflager vertauscht sind, so erkennt man, dass vorstehende Gleichungen auch für die zweite Trägerhälfte gelten, wenn V' und 0 an Stelle von V und H gesetzt werden. Schliesslich folgt aus der auf Knotenpunkt 4 des Obergurts angewandten Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ zur Bestimmung von V_4

$$V_4 + K_4 + (X_4 + X_4')\frac{2}{4{,}47} = 0,$$

unter X_4, X_4' die beiden mittleren Stabkräfte des Obergurts verstanden.

Dachfläche beim verschiebbaren Auflager getroffen. Für die Stützenreactionen hat man

$$V\,.\,32 - 0{,}9\left(\frac{16}{2} + 12 + 8 + 4\right)$$
$$- 0{,}45\left(\frac{13}{2} + 11 + 9 + 7 + \frac{5}{2}\right) - 1{,}5\,.\,5 = 0,$$
$$-V'\,.\,32 + 0{,}9\left(\frac{32}{2} + 28 + 24 + 20 + \frac{16}{2}\right)$$
$$- 0{,}45\left(\frac{5}{2} + 7 + 9 + 11 + \frac{13}{2}\right) + 1{,}5\,.\,5 = 0,$$
$$H - 4\,.\,0{,}45 - 2\,.\,1{,}5 = 0,$$

woraus

$$V = 1{,}64, \qquad V' = 1{,}96, \qquad H = 4{,}7 \text{ tn}.$$

Obige Gleichungen für die Stabkräfte liefern in Tonnen für die erste Trägerhälfte (beim festen Auflager) mit $V = 1{,}64$, $H = 4{,}8$ und verschwindenden K, L,

$X_1 = 4{,}71$	$Z_1 = -\ 6{,}79$	$D_1 = -\ 4{,}34$	$V_0 = 3{,}16$
$X_2 = 7{,}23$	$Z_2 = -\ 10{,}43$	$D_2 = -\ 2{,}28$	$V_1 = 1{,}50$
$X_3 = 5{,}52$	$Z_3 = -\ 11{,}83$	$D_3 = 1{,}61$	$V_2 = -\ 1{,}30$
$X_4 = 2{,}72$	$Z_4 = -\ 9{,}79$	$D_4 = 3{,}15$	$V_3 = -\ 3{,}14$,

sowie für die zweite Trägerhälfte (beim beweglichen Auflager), mit $V = 1{,}96$, $H = 0$, $2K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = 2K_4 = 0{,}9$, $L = 1{,}5$, $L_0 = 1{,}5 + 0{,}225$, $L_1 = L_2 = L_3 = 2L_4 = 0{,}45$,

$X_1 = -\ 0{,}63$	$Z_1 = -\ 2{,}12$	$D_1 = -\ 1{,}17$	$V_0 = -\ 0{,}46$
$X_2 = 1{,}26$	$Z_2 = -\ 3{,}05$	$D_2 = -\ 2{,}47$	$V_1 = 0{,}32$
$X_3 = 2{,}70$	$Z_3 = -\ 5{,}04$	$D_3 = -\ 1{,}84$	$V_2 = 0{,}35$
$X_4 = 3{,}05$	$Z_4 = -\ 6{,}57$	$D_4 = -\ 0{,}85$	$V_3 = -\ 0{,}27$,

wonach für die mittlere Verticale

$$V_4 = -\ 0{,}45 - (2{,}72 + 3{,}05)\frac{2}{4{,}47} = -\ 3{,}03 \text{ tn}.$$

Dachfläche beim unverschiebbaren Auflager getroffen. Für die Stützenreactionen hat man

$$V\,.\,32 - 0{,}9\left(\frac{32}{2} + 28 + 24 + 20 + \frac{16}{2}\right)$$
$$+ 0{,}45\left(\frac{5}{2} + 7 + 9 + 11 + \frac{13}{2}\right) + 1{,}5\,.\,5 = 0,$$

$$-\ V'.\,32 + 0.9\left(\frac{16}{2} + 12 + 8 + 4\right)$$
$$+ 0{,}45\left(\frac{13}{2} + 11 + 9 + 7 + \frac{5}{2}\right) + 1{,}5\,.\,5 = 0,$$

$$H + 4\,.\,0{,}45 + 2\,.\,1{,}5 = 0,$$

woraus

$$V = 1{,}96, \qquad V' = 1{,}64, \qquad H = -\ 4{,}8 \text{ tn}.$$

Obige Gleichungen für die Stabkräfte liefern in Tonnen für die erste Binderhälfte, mit $V = 1{,}96$, $H = -\ 4{,}8$, $2K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = 2K_4 = 0{,}9$, $L = 1{,}5$, $L_0 = 1{,}5 + 0{,}225$, $L_1 = L_2 = L_3 = 2L_4 = 0{,}45$,

$$\begin{array}{llll} X_1 = -\ \ 7{,}78 & Z_1 = \ \ 4{,}67 & D_1 = \ \ \ 5{,}42 & V_0 = -5{,}26 \\ X_2 = -11{,}46 & Z_2 = \ \ 9{,}91 & D_2 = \ \ \ 2{,}58 & V_1 = -3{,}00 \\ X_3 = -\ \ 9{,}28 & Z_3 = 11{,}95 & D_3 = -2{,}53 & V_2 = \ \ \ 0{,}90 \\ X_4 = -\ \ 5{,}53 & Z_4 = \ \ 9{,}04 & D_4 = -4{,}67 & V_3 = \ \ \ 3{,}55, \end{array}$$

sowie für die zweite Binderhälfte, mit $V = 1{,}64$, $H = 0$ und verschwindenden K, L,

$$\begin{array}{llll} X_1 = -2{,}44 & Z_1 = 0 & D_1 = \ \ \ 2{,}25 & V_0 = -1{,}64 \\ X_2 = -5{,}49 & Z_2 = 2{,}53 & D_2 = \ \ \ 2{,}77 & V_1 = -1{,}82 \\ X_3 = -6{,}47 & Z_3 = 5{,}16 & D_3 = \ \ \ 0{,}93 & V_2 = -0{,}74 \\ X_4 = -4{,}40 & Z_4 = 5{,}82 & D_4 = -0{,}68 & V_3 = \ \ \ 0{,}68, \end{array}$$

wonach für die mittlere Verticale

$$V_4 = -0{,}45 + (5{,}53 + 4{,}4)\frac{2}{4{,}47} = 3{,}99 \text{ tn.}$$

Bemerkungen. Anstatt die Reactionen V, V', H wie oben direct zu berechnen, hätten wir sie natürlich auch aus den Formeln A. 5, 4)—6) erhalten können. Die Berechnung der Beanspruchungen für die erste Trägerhälfte im zweiten Belastungsfalle vereinfacht sich, wenn man beachtet, dass für ihn die erste Trägerhälfte gerade so belastet ist wie die zweite Trägerhälfte im ersten Falle, dass also gegenüber den hierfür gültigen Beanspruchungen nur der Beitrag von H hinzukommt. Proben der Richtigkeit obiger Stabkräfte können die Bedingungen „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ und „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf die einzelnen Knotenpunkte liefern. Wäre die vom Winde getroffene Dachfläche mehr als einfach gebrochen gewesen, so würde nur die Berechnung der Knotenpunktskräfte K, L etwas umständlicher geworden, die Berechnung der Stabkräfte aber ganz wie oben geblieben sein (Beispiel 58).

Aufgabe 33. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Maximalbedingungen für die Stabkräfte.

Die Bedingungen für Maxima und Minima der Stabkräfte beim Befahren eines Balkenfachwerks einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen anzugeben.

Da nach § 31, 1)—4) die Maxima und Minima der Stabkräfte zugleich mit den Maximis und Minimis der entsprechenden Momente M_s eintreten, so lautet die fragliche Bedingung nach § 25, 9) für jedes System gleichzeitig auf dem Träger Platz findender Radlasten

$$(1) \qquad \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = \frac{u}{l}\sum_0^l P.$$

Diese Gleichung nimmt mit den in § 31 gegebenen Werthen von u, c, v folgende spezielle Formen an:

$$(2) \quad \text{für } X_m \qquad \sum_0^m P = \frac{m}{n}\sum_0^l P,$$

$$(3) \quad „ \ Z_m \qquad \sum_0^{m-1} P = \frac{m-1}{n}\sum_0^l P,$$

$$(4) \quad „ \ D_m \qquad -\sum_0^{m-1} P + (\varepsilon - 1)\sum_{m-1}^m P = \frac{\varepsilon - m}{n}\sum_0^l P,$$

„ V_m a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(5) \qquad -\sum_0^{m-1} P + (\nu - 1)\sum_{m-1}^m P = \frac{\nu - m}{n}\sum_0^l P,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(6) \qquad -\sum_0^m P + \nu\sum_m^{m+1} P = \frac{\nu - m}{n}\sum_0^l P.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurtungen in Verticale m an, so gilt für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Bedingung 5), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Bedingung 6).

Die Gleichungen 4)—6) lassen sich für besondere Trägerformen noch spezialisiren. So erhält man beim Parallelträger für D_m wegen $\varepsilon = \infty$

$$\sum_{m-1}^m P = \frac{1}{n}\sum_0^l P,$$

und für V_m wegen $\nu = \infty$

$$\text{im Falle a)} \qquad \sum_{m-1}^m P = \frac{1}{n}\sum_0^l P,$$

$$„ \quad „ \quad \text{b)} \qquad \sum_m^{m+1} P = \frac{1}{n}\sum_0^l P.$$

Die abgeleiteten Bedingungen können wie in Beispiel 25 und 28

zur Correctur von Laststellungen verwendet werden. Selbstverständlich hätten wir die Bedingungen 2)—6) auch durch Differentiation von § 33, 1)—5) erhalten können.

Beispiel 41. Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks mit nur gegen Zug widerstandsfähigen Diagonalen zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe und Felderzahl $h = 6$ m, $n = 9$. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Wir berechnen zunächst das System Fig. 81 und tragen dem Einflusse der Gegendiagonalen und etwaiger Abänderung der Trägerenden nach Fig. 59 nachträglich Rechnung (ist letztere Abänderung von vornherein beabsichtigt, so braucht V_0 nicht ermittelt zu werden). Anstatt die Beanspruchungen der Verticalen wie unten direct zu berechnen, kann man auch berücksichtigen, dass nach § 34, 5) allgemein

$$(1) \qquad V_m = -K_x - \frac{h}{d} D_{m+1}$$

und hierin die Knotenpunktslast K_x des Obergurts von V_1 an gleich $g_x \lambda$, für V_0 halb so gross ist. Es sind so auch die *Grenz*beanspruchungen der Verticalen durch diejenigen der Diagonalen bestimmt. Bei directer Berechnung der V_m kann 1) zu Proben dienen.

Eigengewicht allein. Für das System Fig. 81 hat man nach § 34, 6) die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -m(n-m)\dfrac{g\lambda^2}{2h} = -\mathfrak{Z}_{m+1}, \\ \mathfrak{D}_m = \quad (n-2m+1)\dfrac{g\lambda d}{2h}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(n-2m+\dfrac{g_x-g_s}{g}\right)\dfrac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

oder, mit $n = 9$, $\lambda = 5$, $h = 6$, $d = 7{,}810$, $g = 0{,}9$, $g_x = 0{,}3$, $g_s = 0{,}6$,

$$\mathfrak{X}_m = -\frac{15}{8}\, m\,(9 - m) = -\,\mathfrak{Z}_{m+1},$$
$$\mathfrak{D}_m = \quad 5{,}857\,(5 - m),$$
$$\mathfrak{V}_m = -\,19{,}5 + 4{,}5\, m,$$

während nach 1) oder A. 19, 5) als Ausnahme gilt

(3) $$\mathfrak{V}_0 = \frac{g_1 \lambda}{2} - \frac{g l}{2}.$$

Vorstehende Gleichungen liefern die folgenden Stabkräfte in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -\,15{,}00$	$\mathfrak{Z}_1 = 0$	$\mathfrak{D}_1 = 23{,}43$	$\mathfrak{V}_0 = -\,18{,}75$
$\mathfrak{X}_2 = -\,26{,}25$	$\mathfrak{Z}_2 = 15{,}00$	$\mathfrak{D}_2 = 17{,}57$	$\mathfrak{V}_1 = -\,15{,}00$
$\mathfrak{X}_3 = -\,33{,}75$	$\mathfrak{Z}_3 = 26{,}25$	$\mathfrak{D}_3 = 11{,}71$	$\mathfrak{V}_2 = -\,10{,}50$
$\mathfrak{X}_4 = -\,37{,}50$	$\mathfrak{Z}_4 = 33{,}75$	$\mathfrak{D}_4 = 5{,}86$	$\mathfrak{V}_3 = -\,6{,}00$
$\mathfrak{X}_5 = -\,37{,}50$	$\mathfrak{Z}_5 = 37{,}50$	$\mathfrak{D}_5 = 0$	$\mathfrak{V}_5 = -\,1{,}50.$

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stützenreactionen sind

$$\mathfrak{V} = \frac{g l}{2} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen; für die oberen Grenzwerthe hat man nach § 35, 6)

(4) $$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m,$$

also wegen

$$\frac{q}{g} = \frac{0{,}9 + 2{,}63}{0{,}9} = 3{,}922$$

in Tonnen:

$X_1 = -\;\;58{,}83$	$Z_1 = \;\;0$
$X_2 = -\,102{,}95$	$Z_2 = \;\;58{,}83$
$X_3 = -\,132{,}37$	$Z_3 = 102{,}95$
$X_4 = -\,147{,}08$	$Z_4 = 132{,}37$
$X_5 = -\,147{,}08$	$Z_5 = 147{,}08.$

Nach § 35, 3) sind die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

(5) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n - m)^2 \dfrac{p \lambda d}{(n-1)\,2h}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - (m - 1)^2 \dfrac{p \lambda d}{(n-1)\,2h}, \end{cases}$$

und nach § 35, 5) diejenigen der Verticalen

$$(6)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{B}_m - (n-m-1)^2 \dfrac{p\lambda}{2(n-1)}, \\ V_m = \mathfrak{B}_m + m^2 \dfrac{p\lambda}{2(n-1)}, \end{cases}$$

welch' letztere Gleichungen zufolge 1) oder A. 19, 15) auch für V_0 gelten. Nach Einsetzen der gegebenen Zahlenwerthe lauten die Gleichungen 5) 6)

$$D_m = \mathfrak{D}_m + 1{,}070\,(9-m)^2, \qquad D_m = \mathfrak{D}_m - 1{,}070\,(m-1)^2,$$
$$V_m = \mathfrak{B}_m - 0{,}822\,(8-m)^2, \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + 0{,}822\,m^2,$$

und wir erhalten danach folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$D_1 = 91{,}91$	$D_1 = 23{,}43$	$V_0 = -71{,}36$	$V_0 = -18{,}75$
$D_2 = 70{,}00$	$D_2 = 16{,}50$	$V_1 = -55{,}28$	$V_1 = -14{,}18$
$D_3 = 50{,}23$	$D_3 = 7{,}43$	$V_2 = -40{,}09$	$V_2 = -7{,}21$
$D_4 = 32{,}61$	$D_4 = -3{,}77$	$V_3 = -26{,}55$	$V_3 = 1{,}40$
$D_5 = 17{,}12$	$D_5 = -17{,}12$	$V_4 = -14{,}65$	$V_4 = 11{,}65$.

Als Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man

$$V = \frac{ql}{2} = 79{,}42 \text{ tn}, \qquad V = \mathfrak{B} = 20{,}25 \text{ tn}.$$

Die gefundenen Grenzwerthe sind in Fig. 82 eingetragen.

Gegendiagonalen. Abänderung der Trägerenden. Da die Diagonalen in den drei mittleren Feldern sowohl Zug als Druck erhalten können, sämmtliche Diagonalen aber nur auf Zug widerstandsfähig vorausgesetzt wurden, so sind dort Gegendiagonalen anzuordnen. Der Einfluss derselben ist durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt, wobei zu beachten, dass constant

$$K_o = 5 \,.\, 0{,}3 = 1{,}5 \text{ tn}.$$

Werden die Trägerenden nach Fig. 86 abgeändert, so treten die in Aufgabe 24 festgestellten Aenderungen der Stabkräfte ein, wonach insbesondere die Grenzwerthe von V_1

$$V_1 = (g_s + p)\,\lambda = 16{,}15, \qquad V_1 = \mathfrak{B}_1 = g_s\lambda = 3 \text{ tn}.$$

Demnach sind nun sämmtliche Grenzwerthe wie in Fig. 83 eingetragen bestimmt.

Bemerkungen. Angenommen die Fahrbahnlast griffe in den Knotenpunkten des Obergurts an, dann würde an Stelle von 1) eventuell nach § 34, 5) zweckmässiger

$$(7)\qquad V_m = K_s - \frac{h}{d}\,D_m$$

zu verwenden sein, worin die Knotenpunktslast K_s des Untergurts von V_1 an gleich $g_s\lambda$, für V_0 halb so gross ist. Die vom Eigengewicht allein herrührenden Beanspruchungen der Verticalen ergeben sich aus 1) 2) mit $g_z = 0{,}6$, $g_s = 0{,}3$ und die Grenzwerthe, wenn kein Gebrauch von 7) gemacht wird, nach § 35, 4),

$$(8) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - (n-m)^2 \dfrac{p\lambda}{2(n-1)}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + (m-1)^2 \dfrac{p\lambda}{2(n-1)}, \end{cases}$$

abgesehen von V_0, dessen Grenzwerthe zufolge A. 19, 9) oder A. 30, 6) sind

$$(9) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{pl}{2}, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0.$$

Die Beanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen bleiben ungeändert. Vorstehende Gleichungen liefern folgende Werthe in Tonnen:

$\mathfrak{V}_0 = -19{,}5$	$V_0 = -78{,}67$	$V_0 = -19{,}50$
$\mathfrak{V}_1 = -16{,}5$	$V_1 = -69{,}11$	$V_1 = -16{,}50$
$\mathfrak{V}_2 = -12$	$V_2 = -52{,}28$	$V_2 = -11{,}18$
$\mathfrak{V}_3 = -7{,}5$	$V_3 = -37{,}09$	$V_3 = -4{,}21$
$\mathfrak{V}_4 = -3$	$V_4 = -23{,}55$	$V_4 = 4{,}40.$

Der Einfluss der Gegendiagonalen und etwaiger Abänderung der Trägerenden ist wieder durch die am Schlusse von § 50 und A. 24 hervorgehobenen Sätze bestimmt. Ohne diese Abänderung, welche bei oben liegender Fahrbahn seltener vorkommt, haben wir die in Fig. 84 eingetragenen Grenzbeanspruchungen der Verticalen.

Griffe die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in den Verticalen an, so würden nach §§ 34, 35 für die Verticalenstücke von Fahrbahn bis X-Gurtung die zuerst berechneten, für die Verticalenstücke von Fahrbahn bis Z-Gurtung die zuletzt berechneten Beanspruchungen gelten, und damit sämmtliche Grenzbeanspruchungen der Verticalen wie in Fig. 85 bestimmt sein.

Beispiel 42. Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung für bewegte Rastlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanwendung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Feststellung der Grenzwerthe gilt alles im vorigen Bei-

spiele Gesagte. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die dort berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen Grenzwerthe hat man bei Belastung durch Zug I (Fig. 23 und 24) von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(1)\quad X_m = \mathfrak{X}_m - \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{1}{nh} = -Z_{m+1}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen ergeben sich nach § 36, 7) 8) 11) 12) wie folgt:

Zug II (Fig. 22) von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(2)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d}{lh}\sum_m^n P(l-a),$$

Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(3)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d}{lh}\sum_0^{m-1} Pa;$$

Zug II von $m+1$ bis n, Vorderrad O bei Verticale $m+1$,

$$(4)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{1}{l}\sum_{m+1}^n P(l-a),$$

Zug II von 0 bis m, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(5)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{1}{l}\sum_0^m Pa.$$

Als Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man bei Belastung durch Zug II von 0 bis n, Vorderrad O bei 0,

$$(6)\qquad V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^n P(l-a),$$

und bei Eigengewicht allein $V = \mathfrak{V}$. Nach B. 41, 1) oder A. 19, 16) gelten die Grenzwerthe 4) 5) auch für V_0.

Die Werthe der Summenausdrücke in 1) sind aus der Tabelle in Beispiel 6 zu entnehmen oder zu berechnen. Wir wollen den ersten Weg für die erste, den zweiten für die zweite Richtung des Zuges I einschlagen. Mit der ersten Zugrichtung (Fig. 23) ergeben sich in Tonnen:

$$X_1 = -15{,}00 - \frac{8 \,.\, 62{,}2 + 1 \,.\, 1947}{54} = -\ 60{,}27 \quad Z_1 = \ 0$$

$$X_2 = -26{,}25 - \frac{7 \,.\, 167 + 2 \,.\, 1499}{54} = -103{,}42 \quad Z_2 = \ 60{,}27$$

$$X_3 = -33{,}75 - \frac{6 \,.\, 348 + 3 \,.\, 1089}{54} = -132{,}92 \quad Z_3 = 103{,}42$$

$$X_4 = -37{,}50 - \frac{5 \,.\, 580 + 4 \,.\, 764}{54} = -147{,}79 \quad Z_4 = 132{,}92$$

$$X_5 = -37{,}50 - \frac{4 \,.\, 876 + 5 \,.\, 480}{54} = -147{,}57 \quad Z_5 = 147{,}79.$$

Für die zweite Zugrichtung (Fig. 24) erhält man zunächst:

$$\sum_1^n P(l-a) = 6(40 + 38{,}7 + 30{,}3 + 29 + 27{,}7 + 19{,}3 + 18 + 16{,}7 + 8{,}3 + 7 + 5{,}7) + 4(37{,}5 + 26{,}5 + 15{,}5 + 4{,}5) + 5(34{,}5 + 23{,}5 + 12{,}5 + 1{,}5) = 2140,$$

$$\sum_2^n P(l-a) = 6(35 + 33{,}7 + 25{,}3 + 24 + 22{,}7 + 14{,}3 + 13 + 11{,}7 + 3{,}3 + 2 + 0{,}7) + 4(32{,}5 + 21{,}5 + 10{,}5) + 5(29{,}5 + 18{,}5 + 7{,}5) = 1650,$$

$$\sum_3^n P(l-a) = 6(30 + 28{,}7 + 20{,}3 + 19 + 17{,}7 + 9{,}3 + 8 + 6{,}7) + 4(27{,}5 + 16{,}5 + 5{,}5) + 5(24{,}5 + 13{,}5 + 2{,}5) = 1239,$$

$$\sum_4^n P(l-a) = 6(25 + 23{,}7 + 15{,}3 + 14 + 12{,}7 + 4{,}3 + 3 + 1{,}7) + 4(22{,}5 + 11{,}5 + 0{,}5) + 5(19{,}5 + 8{,}5) = 876,$$

$$\sum_5^n P(l-a) = 6(20 + 18{,}7 + 10{,}3 + 9 + 7{,}7) + 4(17{,}5 + 6{,}5) + 5(14{,}5 + 3{,}5) = 580;$$

$$\sum_0^5 Pa = 6(23{,}7 + 19{,}7 + 18{,}4 + 17{,}1 + 8{,}7 + 7{,}4 + 6{,}1) + 4(15{,}9 + 4{,}9) + 5(12{,}9 + 1{,}9) = 764,$$

$$\sum_0^4 Pa = 6(18{,}7 + 14{,}7 + 13{,}4 + 12{,}1 + 3{,}7 + 2{,}4 + 1{,}1) + 4 \,.\, 10{,}9 + 5 \,.\, 7{,}9 = 480,$$

$$\sum_0^3 Pa = 6(13{,}7 + 9{,}7 + 8{,}4 + 7{,}1) + 4 \,.\, 5{,}9 + 5 \,.\, 2{,}9 = 271,$$

$$\sum_0^2 Pa = 6\,(8{,}7 + 4{,}7 + 3{,}4 + 2{,}1) + 4\,.\,0{,}9 = 117,$$

$$\sum_0^1 Pa = 6\,.\,3{,}7 = 22{,}2,$$

und mit diesen Werthen nach 1) in Tonnen:

$$X_1 = -\,15{,}00 - \frac{8\,.\,22{,}2 + 1\,.\,2140}{54} = -\ \ 57{,}92 \quad Z_1 = \ \ 0$$

$$X_2 = -\,26{,}25 - \frac{7\,.\,117 + 2\,.\,1650}{54} = -\,102{,}53 \quad Z_2 = \ \ 57{,}92$$

$$X_3 = -\,23{,}75 - \frac{6\,.\,271 + 3\,.\,1239}{54} = -\,132{,}69 \quad Z_3 = 102{,}53$$

$$X_4 = -\,37{,}50 - \frac{5\,.\,480 + 4\,.\,876}{54} = -\,147{,}57 \quad Z_4 = 132{,}69$$

$$X_5 = -\,37{,}50 - \frac{4\,.\,764 + 5\,.\,580}{54} = -\,147{,}79 \quad Z_5 = 147{,}57.$$

Wie man sieht hätte es auch hier genügt, nur die erste Zugrichtung zu berücksichtigen.

Die Werthe der $\sum$ in 2) — 7) lassen sich ebenfalls aus der Tabelle in Beispiel 6 entnehmen. Wäre eine solche Tabelle nicht vorhanden (siehe jedoch Schlussbemerkung zu Beispiel 6), so würden wegen

$$(7) \qquad \sum_0^{n-m} Pa = \sum_m^n P(l-a)$$

nur die letzteren Summen wie folgt zu berechnen sein:

$$\sum_0^n P(l-a) = 6\,(45 + 43{,}7 + 42{,}4 + 34 + 32{,}7 + 31{,}4 + 23$$
$$+ 21{,}7 + 20{,}4 + 12 + 10{,}7 + 9{,}4 + 1)$$
$$+ 4\,(41{,}2 + 30{,}2 + 19{,}2 + 8{,}2)$$
$$+ 5\,(38{,}2 + 27{,}2 + 16{,}2 + 5{,}2) = 2794,$$

$$\sum_1^n P(l-a) = 6\,(40 + 38{,}7 + 37{,}4 + 29 + 27{,}7 + 26{,}4 + 18$$
$$+ 16{,}7 + 15{,}4 + 7 + 5{,}7 + 4{,}4)$$
$$+ 4\,(36{,}2 + 25{,}2 + 14{,}2 + 3{,}2)$$
$$+ 5\,(33{,}2 + 22{,}2 + 11{,}2 + 0{,}2) = 2248,$$

$$\sum_2^n P(l-a) = 6(35 + 33{,}7 + 32{,}4 + 24 + 22{,}7 + 21{,}4 + 13 + 11{,}7 + 10{,}4 + 2 + 0{,}7) + 4(31{,}2 + 20{,}2 + 9{,}2) + 5(28{,}2 + 17{,}2 + 6{,}2) = 1741,$$

$$\sum_3^n P(l-a) = 6(30 + 28{,}7 + 27{,}4 + 19 + 17{,}7 + 16{,}4 + 8 + 6{,}7 + 5{,}4) + 4(26{,}2 + 15{,}2 + 4{,}2) + 5(23{,}2 + 12{,}2 + 1{,}2) = 1321,$$

$$\sum_4^n P(l-a) = 6(25 + 23{,}7 + 22{,}4 + 14 + 12{,}7 + 11{,}4 + 3 + 1{,}7 + 0{,}4) + 4(21{,}2 + 10{,}2) + 5(18{,}2 + 7{,}2) = 938,$$

$$\sum_5^n P(l-a) = 6(20 + 18{,}7 + 17{,}4 + 9 + 7{,}7 + 6{,}4) + 4(16{,}2 + 5{,}2) + 5(13{,}2 + 2{,}2) = 638,$$

$$\sum_6^n P(l-a) = 6(15 + 13{,}7 + 12{,}4 + 5 + 2{,}7 + 1{,}4) + 4(11{,}2 + 0{,}2) + 5 \,.\, 8{,}2 = 382,$$

$$\sum_7^n P(l-a) = 6(10 + 8{,}7 + 7{,}4) + 4 \,.\, 6{,}2 + 5 \,.\, 3{,}2 = 197,$$

$$\sum_8^n P(l-a) = 6(5 + 3{,}7 + 2{,}4) + 4 \,.\, 1{,}2 = 71{,}4.$$

Es ergeben sich mit diesen Werthen die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen nach 2) 3):

$$D_1 = 23{,}43 + \frac{2248}{34{,}6} = 88{,}40 \qquad D_1 = 23{,}43 - \frac{0}{34{,}6} = 23{,}43$$

$$D_2 = 17{,}57 + \frac{1741}{34{,}6} = 67{,}89 \qquad D_2 = 17{,}57 - \frac{71{,}4}{34{,}6} = 15{,}51$$

$$D_3 = 11{,}71 + \frac{1321}{34{,}6} = 49{,}89 \qquad D_3 = 11{,}71 - \frac{197}{34{,}6} = 6{,}02$$

$$D_4 = 5{,}86 + \frac{938}{34{,}6} = 32{,}98 \qquad D_4 = 5{,}86 - \frac{382}{34{,}6} = -5{,}18$$

$$D_5 = 0 + \frac{638}{34{,}6} = 18{,}44 \qquad D_5 = 0 - \frac{638}{34{,}6} = -18{,}44,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen nach 4) 5):

$$V_0 = -18{,}75 - \frac{2248}{45} = -68{,}71$$

$$V_1 = -15{,}00 - \frac{1741}{45} = -53{,}78$$

$$V_2 = -10{,}50 - \frac{1321}{45} = -39{,}86$$

$$V_3 = -\ \ 6{,}00 - \frac{938}{45} = -26{,}84$$

$$V_4 = -\ \ 1{,}50 - \frac{638}{45} = -15{,}68,$$

$$V_0 = -18{,}75 + \frac{0}{45} = -18{,}75$$

$$V_1 = -15{,}00 + \frac{71{,}4}{45} = -13{,}41$$

$$V_2 = -10{,}50 + \frac{197}{45} = -\ \ 6{,}12$$

$$V_3 = -\ \ 6{,}00 + \frac{382}{45} = \ \ 2{,}49$$

$$V_4 = -\ \ 1{,}50 + \frac{638}{45} = \ \ 12{,}68,$$

während der obere Grenzwerth der Stützenreactionen nach 6) ist

$$V = 20{,}25 + \frac{2794}{45} = 82{,}34 \text{ tn.}$$

Bei der im Vergleiche zum Radstande um O verhältnissmässig bedeutenden Feldlänge λ könnten die Diagonale 1 und Verticale 0 bei Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei Verticale 1, noch ungünstiger als oben bei Belastung durch Zug II beansprucht sein (§ 33). In der That erhalten wir aus den nach § 36, 3) und A. 19, 11) für beliebige Belastung gültigen Gleichungen

$$(8) \qquad D_1 = \mathfrak{D}_1 + \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{d}{lh},$$

$$(9) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{1}{l}$$

mit den schon für X_1 verwendeten Summenwerthen

$$D_1 = 23{,}43 + \frac{8 \cdot 62{,}2 + 1947}{34{,}6} = 94{,}08 \text{ tn},$$

$$V_0 = -18{,}75 - \frac{8 \cdot 62{,}2 + 1947}{45} = -73{,}07 \text{ tn},$$

gegen oben gefundene 88,40 und − 68,71 tn. Die verhältnissmässig grosse Differenz erklärt sich, wie erwähnt, durch die dem Radstande gegenüber grosse Feldlänge.

Da die Diagonalen in den drei mittleren Feldern sowohl Zug als Druck erleiden können, so sind daselbst Gegendiagonalen an-

zuordnen. Der Einfluss derselben ist, wie auch im vorigen Beispiele, durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt. Ebenso ergibt sich wieder der Einfluss einer Abänderung der Trägerenden nach Fig. 86 aus dem in Aufgabe 24 abgeleiteten Satze und sind danach insbesondere die Grenzwerthe von V_1

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 = 0{,}6 \,.\, 5 = 3 \text{ tn},$$

$$V_1 = 3 + 6 + 6\,\frac{3{,}7 + 2{,}4}{5} + 4\,\frac{2{,}5}{5} + 5\,\frac{0{,}8}{5} = 20{,}16 \text{ tn}.$$

Die für den Träger mit Enden nach Fig. 86 gültigen Grenzbeanspruchungen wurden in Fig. 87 eingetragen.

Beispiel 43. Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des Beispiels 41 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den bewegten Radlastzügen des vorigen Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles in Beispiel 41 Gesagte gültig. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind nach Aufgabe 32 mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für die max M_x eines durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m anzuwenden wäre. Nach Beispiel 8 ist dies $p = 2{,}63$ tn, und da eine solche bewegte Last auch in Beispiel 41 angenommen wurde, so könnten die dort berechneten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen ungeändert bleiben. Wir haben in Fig. 88 die einem nach oben abgerundeten $p = 2{,}7$ entsprechenden Werthe eingetragen, welche $q : g = 4$ mal so gross als die in Beispiel 41 berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen sind.

Für die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen hat man nach A. 32, 8) mit $c = (m - 1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(1) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n - m)^2 p_v \dfrac{\lambda d}{2nh}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - (m - 1)^2 p_c \dfrac{\lambda d}{2nh}, \end{cases}$$

und für die Grenzbeanspruchungen der Verticalen nach A. 32, 9) mit $c = m\lambda$, $v = (m + 1)\lambda$,

(2) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - (n-m-1)^2 p_v \frac{\lambda}{2n}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + m^2 p_c \frac{\lambda}{2n}, \end{cases}$$

welche Gleichungen nach A. 30, 7) oder B. 41, 1) auch für V_0 gelten. Der obere Grenzwerth der Stützenreactionen folgt nach A. 29, 6) mit $v = 0$

(3) $$V = \mathfrak{V} + p_v \frac{l}{2},$$

während der untere für Eigengewicht allein eintritt. In 1) — 3) bezeichnen p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente, welche für einen durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem pos max V_x bei $x = v$, bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen. Dieselben lassen sich aus Beispiel 8 entnehmen. Wir erhalten damit folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$D_1 = 23{,}43 + 0{,}362 \,.\, 64 \,.\, 2{,}81 = 88{,}53$$
$$D_2 = 17{,}57 + 0{,}362 \,.\, 49 \,.\, 2{,}84 = 67{,}95$$
$$D_3 = 11{,}71 + 0{,}362 \,.\, 36 \,.\, 2{,}93 = 49{,}89$$
$$D_4 = 5{,}86 + 0{,}362 \,.\, 25 \,.\, 3{,}00 = 33{,}01$$
$$D_5 = 0 + 0{,}362 \,.\, 16 \,.\, 3{,}19 = 18{,}48,$$

$$D_1 = 23{,}43 - 0{,}362 \,.\, 0^2 \,.\, \infty = 23{,}43$$
$$D_2 = 17{,}57 - 0{,}362 \,.\, 1 \,.\, 5{,}71 = 15{,}50$$
$$D_3 = 11{,}71 - 0{,}362 \,.\, 4 \,.\, 3{,}95 = 5{,}99$$
$$D_4 = 5{,}86 - 0{,}362 \,.\, 9 \,.\, 3{,}39 = -5{,}18$$
$$D_5 = 0 - 0{,}362 \,.\, 16 \,.\, 3{,}19 = -18{,}48;$$

$$V_0 = -18{,}75 - \frac{64}{3{,}6}\, 2{,}82 = -68{,}88$$
$$V_1 = -15{,}00 - \frac{49}{3{,}6}\, 2{,}84 = -53{,}66$$
$$V_2 = -10{,}50 - \frac{36}{3{,}6}\, 2{,}93 = -39{,}80$$
$$V_3 = -6{,}00 - \frac{25}{3{,}6}\, 3{,}00 = -26{,}83$$
$$V_4 = -1{,}50 - \frac{16}{3{,}6}\, 3{,}19 = -15{,}68,$$

$$V_0 = -18{,}75 + \frac{0^2}{3{,}6}\, \infty = -18{,}75$$
$$V_1 = -15{,}00 + \frac{1}{3{,}6}\, 5{,}71 = -13{,}41$$

$$V_2 = -\ 10{,}50 + \frac{4}{3{,}6}\ 3{,}95 = -\ \ 6{,}11$$

$$V_3 = -\ \ 6{,}00 + \frac{9}{3{,}6}\ 3{,}39 = \ \ 2{,}48$$

$$V_4 = -\ \ 1{,}50 + \frac{16}{3{,}6}\ 3{,}19 = \ \ 12{,}68$$

$$V = 20{,}25 + 2{,}76 \,.\, 22{,}5 = 82{,}35.$$

Nach Aufgabe 32 müssen vorstehende Werthe (soweit nicht kleine Differenzen durch Vernachlässigung von Decimalen bedingt sind) vollständig mit den im vorigen Beispiele erhaltenen übereinstimmen.

Wie sich im vorigen Beispiele für die Diagonale 1 und Verticale 0 mit Zug I noch ungünstigere obere Grenzwerthe als mit Zug II ergeben haben, so gilt Analoges bei Berechnung mit den entsprechenden Lastäquivalenten. Wir erhalten nach A. 30, 6) mit $c = 0$

(4) $$D_1 = \mathfrak{D}_1 + (n - 1)\frac{p\lambda d}{2h},$$

(5) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 - (n - 1)\frac{p\lambda}{2},$$

und mit dem schon für die Gurtungskräfte verwendeten $p = 2{,}7$

$$D_1 = 93{,}72 \text{ tn}, \qquad V_0 = -\ 72{,}75 \text{ tn}.$$

Gleichung 4) hätten wir natürlich auch aus A. 32, 6) entnehmen können.

Da die Diagonalen in den drei mittleren Feldern Zug und Druck erleiden können, so sind daselbst Gegendiagonalen anzuordnen, deren Einfluss wie in den zwei letzten Beispielen durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt ist. Ebenso ist wieder der Einfluss einer Abänderung der Trägerenden nach Fig. 86 aus dem in Aufgabe 24 abgeleiteten Satz zu entnehmen. Der untere Grenzwerth von V_1 ist demnach $V_1 = 0{,}6 \,.\, 5 = 3$ tn, den oberen kann man entweder wie im vorigen Beispiele berechnen oder man entnimmt zufolge A. 29, c) aus Beispiel 8 der Spannweite $v = 10$ m entsprechend $p = 3{,}38$, womit sich

$$V_1 = 5 \,.\, 3{,}98 = 19{,}90 \text{ tn}$$

ergibt. Sämmtliche bei abgeänderten Trägerenden gültigen Grenzwerthe sind in Fig. 88 eingetragen.

Beispiel 44. Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen eines

Parallelträgers einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks unter folgenden Voraussetzungen zu berechnen. Spannweite $l = 24$ m, Trägerhöhe $h = 4$ m, Feldlänge $\lambda = 3$ m; Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0,73$ tn, Verkehrslast $p = 2,77$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,53 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,2 tn auf diejenigen des Untergurts (vergl. Beispiel 76).

Wir gehen ganz wie in Beispiel 41 vor und berechnen zunächst das System Fig. 89. Sollen die Diagonalen nur für Zug widerstandsfähig sein, so kann dem Einflusse der Gegendiagonalen nachträglich Rechnung getragen werden.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte gelten die Gleichungen B. 41, 2), welche mit $n = 8$, $\lambda = 3$, $h = 4$, $d = 5$, $g = 0,73$, $g_x = 0,53$, $g_z = 0,2$ folgende Formen annehmen:

$$\mathfrak{X}_m = -0,827\, m\,(8 - m) = -\mathfrak{Z}_{m+1},$$
$$\mathfrak{D}_m = 1,369\,(9 - 2\,m),$$
$$\mathfrak{V}_m = 2,19\, m - 9,25.$$

Wir erhalten hieraus in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -5,75$	$\mathfrak{Z}_1 = 0$	$\mathfrak{D}_1 = 9,58$	$\mathfrak{V}_1 = -7,06$
$\mathfrak{X}_2 = -9,85$	$\mathfrak{Z}_2 = 5,75$	$\mathfrak{D}_2 = 6,85$	$\mathfrak{V}_2 = -4,87$
$\mathfrak{X}_3 = -12,32$	$\mathfrak{Z}_3 = 9,85$	$\mathfrak{D}_3 = 4,11$	$\mathfrak{V}_3 = -2,68.$
$\mathfrak{X}_4 = -13,14$	$\mathfrak{Z}_4 = 12,32$	$\mathfrak{D}_4 = 1,37$	

Für die Verticale 0 hat man

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{g_z \lambda}{2} - \frac{g\,l}{2} = -8,46 \text{ tn},$$

während die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf den mittleren Knotenpunkt des Obergurts liefert,

$$V_o = -K_o,$$

unter K_o die Belastung dieses Knotenpunktes verstanden, wonach für Eigengewicht allein $\mathfrak{V}_4 = -0,53 \,.\, 3 = -1,59$ tn. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stützenreactionen schliesslich sind

$$\mathfrak{V} = \frac{g\,l}{2} = 8,76 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind

die soeben berechneten Beanspruchungen für Eigengewicht allein, die oberen ergeben sich nach B. 41, 4) mit $q : g = 3{,}5 : 0{,}73 = 4{,}794$ aus

$$X_m = 4{,}794\, \mathfrak{X}_4 = -Z_{m+1}$$

in Tonnen:

$$X_1 = -27{,}57 \qquad Z_1 = 0$$
$$X_2 = -47{,}22 \qquad Z_2 = 27{,}52$$
$$X_3 = -59{,}06 \qquad Z_3 = 47{,}22$$
$$X_4 = -62{,}99 \qquad Z_4 = 59{,}06.$$

Für die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen liefern die Gleichungen B. 41, 5)

$$D_m = \mathfrak{D}_m + 0{,}742\,(8 - m)^2, \qquad D_m = \mathfrak{D}_m - 0{,}742\,(m - 1)^2,$$

und für die Grenzbeanspruchungen der Verticalen die Gleichungen B. 41, 8)

$$V_m = \mathfrak{V}_m - 0{,}594\,(8 - m)^2, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + 0{,}594\,(m - 1)^2.$$

Jedoch sind die Grenzwerthe von V_0 durch B. 41, 9) bestimmt und treten diejenigen von V_4 nach der obigen Gleichung für V_σ zugleich mit den Grenzwerthen von K_σ ein. Wir erhalten so folgende Grenzbeanspruchungen in Tonnen:

$D_1 = 45{,}94$	$D_1 = 9{,}58$	$V_1 = -36{,}17$	$V_1 = -7{,}06$
$D_2 = 33{,}56$	$D_2 = 6{,}11$	$V_2 = -26{,}25$	$V_2 = -4{,}28$
$D_3 = 22{,}66$	$D_3 = 1{,}14$	$V_3 = -17{,}53$	$V_3 = -0{,}30$
$D_4 = 13{,}24$	$D_4 = -5{,}31$	$V_4 = -9{,}90$	$V_4 = -1{,}59$

und $V_0 = -41{,}70$ tn, $V_0 = -8{,}46$ tn. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen schliesslich sind

$$V = \frac{ql}{2} = 42 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{V} = 8{,}76 \text{ tn}.$$

Gegendiagonalen. Sollen die Diagonalen nur auf Zug widerstehen, so sind in den zwei mittleren Feldern Gegendiagonalen anzuordnen, deren Einfluss durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt ist. Da bei obenliegender X-Gurtung in den beiden mittleren Feldern die grösste Druckbeanspruchung der mittleren Verticale nach der obigen Formel für V_m

$$V_4 = 2{,}19 \,.\, 4 - 9{,}25 - 0{,}594 \,.\, 16 = -9{,}99 \text{ tn}$$

wäre, indessen

$$\max K_o = 3{,}3 \,.\, 3 = 9{,}9 \text{ tn}$$

ist, so sind bei Anwendung von Gegendiagonalen sämmtliche Grenz-

beanspruchungen einer Trägerhälfte wie in Fig. 140 bei den Stäben der vier äussersten Felder rechts eingetragen bestimmt.

Beispiel 45. Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Die Berechnung der Stabkräfte und Stützenreactionen für Eigengewicht allein ist im vorigen Beispiele durchgeführt. Damit sind auch die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte und Stützenreactionen bekannt. Für die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte liefert B. 42, 1) direct oder mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 bei der ersten Richtung des Zuges I (Fig. 23)

$$X_1 = -\ 5{,}75 - \frac{7 \,.\, 30{,}2 + 1 \,.\, 535}{32} = -\,29{,}07 \text{ tn } (-\,27{,}67)$$

$$X_2 = -\ 9{,}85 - \frac{6 \,.\, 80{,}7 + 2 \,.\, 383}{32} = -\,48{,}92 \text{ „ } (-\,46{,}55)$$

$$X_3 = -\,12{,}32 - \frac{5 \,.\, 144 + 3 \,.\, 271}{32} = -\,60{,}23 \text{ „ } (-\,58{,}91)$$

$$X_4 = -\,13{,}14 - \frac{4 \,.\, 226 + 4 \,.\, 173}{32} = -\,61{,}01 \text{ „ } (-\,63{,}01),$$

$$Z_1 = 0 \qquad Z_3 = 48{,}92 \text{ tn } (46{,}55)$$

$$Z_2 = 29{,}07 \text{ tn } (27{,}67) \qquad Z_4 = 60{,}23 \text{ tn } (58{,}91).$$

Die Resultate für die zweite Zugrichtung sind in Klammer beigesetzt. Man sieht, dass auch hier die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung allein genügt hätte.

Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen ergeben sich nach B. 42, 2) 3) in Tonnen:

$$D_1 = 9{,}58 + \frac{692}{19{,}2} = 45{,}62 \qquad D_1 = 9{,}58 - \frac{0}{19{,}2} = 9{,}58$$

$$D_2 = 6{,}85 + \frac{530}{19{,}2} = 34{,}45 \qquad D_2 = 6{,}85 - \frac{30{,}6}{19{,}2} = 5{,}26$$

$$D_3 = 4{,}11 + \frac{382}{19{,}2} = 24{,}01 \qquad D_3 = 4{,}11 - \frac{93{,}4}{19{,}2} = -\,0{,}75$$

$$D_4 = 1{,}37 + \frac{257}{19{,}2} = 14{,}76 \qquad D_4 = 1{,}37 - \frac{170}{19{,}2} = -\,7{,}48,$$

während die Grenzbeanspruchungen der Verticalen nach § 36, 9) 10)

und A. 19, 7) wie folgt eintreten. Belastung durch Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(1) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{1}{l}\sum_m^n P(l-a),$$

Belastung durch Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(2) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \frac{1}{l}\sum_0^{m-1} Pa.$$

Nur die Grenzwerthe der mittleren Verticale entstehen wegen $V_\sigma = -K_o$ gleichzeitig mit den Grenzwerthen der darüber liegenden Knotenpunktslast K_o. Wir erhalten hiernach in Tonnen:

$$V_0 = -8{,}46 - \frac{870}{24} = -42{,}71 \qquad V_0 = -8{,}46 + \frac{0}{24} = -8{,}46$$

$$V_1 = -7{,}06 - \frac{692}{24} = -35{,}89 \qquad V_1 = -7{,}06 + \frac{0}{24} = -7{,}06$$

$$V_2 = -4{,}87 - \frac{530}{24} = -26{,}95 \qquad V_2 = -4{,}87 + \frac{30{,}6}{24} = -3{,}60$$

$$V_3 = -2{,}68 - \frac{282}{24} = -18{,}60 \qquad V_3 = -2{,}68 + \frac{93{,}4}{24} = 1{,}21$$

$$V_4 = -1{,}59 - 13{,}47 = -15{,}06 \qquad V_4 = -1{,}59.$$

Für V_4 war zu beachten, dass das grösste von der Verkehrslast herrührende K_o ist

$$6 + 2 \,.\, 6\,\frac{1{,}7}{3} + 4\,\frac{0{,}4}{3} = 13{,}47 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen ergeben sich wie in Beispiel 42

$$V = 8{,}76 + \frac{870}{24} = 45{,}01 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{B} = 8{,}76 \text{ tn}.$$

Für die Diagonale 1 und Verticale 1 werden sich voraussichtlich bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, noch etwas grössere obere Grenzbeanspruchungen als mit Zug II berechnet ergeben. Wir erhalten denn auch aus den für beliebige Belastung gültigen Gleichungen B. 42, 8) und

$$(3) \qquad V_1 = \mathfrak{B}_1 - \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{1}{l},$$

welche aus § 36, 4) folgt, mit den schon für X_1 verwendeten $\sum$

$$D_1 = 9{,}58 \quad - \frac{7 \,.\, 30{,}2 + 535}{19{,}2} = \quad 48{,}45 \text{ tn},$$

$$V_1 = - 7{,}06 - \frac{7 \,.\, 30{,}2 + 535}{24} = - 38{,}16 \text{ tn},$$

gegen oben gefundene 45,62 und — 35,89 tn.

Sollen die Diagonalen nur Zug aufnehmen, so sind in den vier mittleren Feldern Gegendiagonalen nöthig, deren Einfluss wieder durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt ist. Da die grösste Druckbeanspruchung der mittleren Verticale bei oben liegender X-Gurtung in beiden anliegenden Feldern nach obiger Gleichung für V_m

$$V_4 = 2{,}19 \,.\, 4 - 9{,}25 - \frac{257}{24} = - 11{,}20$$

wäre, indessen max $K_o = 15{,}06$ ist, so sind sämmtliche bei Anwendung von Gegendiagonalen entstehenden Grenzbeanspruchungen wie in Fig. 90 für eine Trägerhälfte eingetragen bestimmt.

Beispiel 46. Parallelträger einfachen Systems mit ungleichlangen Feldern. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für Parallelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks seien gegeben: Spannweite $l = 45$ m, Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Länge der zwei äussersten Felder $\lambda_1 = \lambda_n = 2{,}5$ m, Länge der übrigen Felder 5 m; ferner per laufenden Meter Träger Eigengewicht $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn. Vom Eigengewicht kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und 0,3 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte zu berechnen, wenn die Diagonalen nur auf Zug widerstandsfähig vorausgesetzt werden.

Wir berechnen zunächst das System Fig. 91 und tragen dem Einflusse der Gegendiagonalen und etwaiger Abänderung der Trägerenden nachträglich Rechnung. Ist eine solche Abänderung nach Fig. 93 beabsichtigt, so braucht V_0 nicht berechnet zu werden. Anstatt wie unten lassen sich die Beanspruchungen der Verticalen auch aus

$$(1) \qquad V_m = - K_o - \frac{h}{d_m} D_{m+1}$$

berechnen, worin K_o die Belastung des Knotenpunkts m im Obergurt bedeutet, also 0,3 . 1,25 tn für die beiden äussersten, 0,3 . 3,75 für die beiden folgenden und 0,3 . 5 für die übrigen Knotenpunkte. Der

symmetrischen Anordnung des Trägers wegen haben wir nur die erste Trägerhälfte zu berechnen, für welche die X-Gurtung oben liegt, sodass in den entsprechenden Formeln des § 37 die oberen Vorzeichen gelten.

Eigengewicht allein. Nach § 37, 3) sind die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = - e_m (l - e_m) \frac{g}{2h} = - \mathfrak{Z}_{m+1}, \\ \mathfrak{D}_m = (l - e_m - e_{m-1}) \frac{g}{2h} d_m, \\ \mathfrak{V}_m = (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{g_z}{2} - (l - e_m - e_{m-1}) \frac{g}{2}, \end{cases}$$

unter e_m die Abscisse der Verticale m, unter λ_m die Länge des $m$ten Feldes verstanden. Für $m = 0$ hat man $\lambda_m = 0$, $e_m = 0$, $e_{m-1} = 0$. Mit Rücksicht hierauf gilt die letzte Gleichung 2) nach 1) auch für V_0. Aus 2) ergeben sich in Tonnen für die Gurtungen:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{X}_1 = - \ \ 2{,}5 \,.\, 42{,}5 \,.\, 0{,}075 = - \ \ 7{,}97 & \mathfrak{Z}_1 = 0 \\ \mathfrak{X}_2 = - \ \ 7{,}5 \,.\, 37{,}5 \,.\, 0{,}075 = - 21{,}09 & \mathfrak{Z}_2 = \ \ 7{,}97 \\ \mathfrak{X}_3 = - 12{,}5 \,.\, 32{,}5 \,.\, 0{,}075 = - 30{,}47 & \mathfrak{Z}_3 = 21{,}09 \\ \mathfrak{X}_4 = - 17{,}5 \,.\, 27{,}5 \,.\, 0{,}075 = - 36{,}09 & \mathfrak{Z}_4 = 30{,}47 \\ \mathfrak{X}_5 = - 22{,}5 \,.\, 22{,}5 \,.\, 0{,}075 = - 37{,}97 & \mathfrak{Z}_5 = 36{,}09 \end{array}$$

und für die Füllungsglieder:

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{V}_0 = \ \ 2{,}5 . 0{,}3 - 45 \ \ . 0{,}45 = - 19{,}50 \\ \mathfrak{D}_1 = 42{,}5 . 0{,}075 . 6{,}54 = 20{,}85 & \mathfrak{V}_1 = \ \ 7{,}5 . 0{,}3 - 42{,}5 . 0{,}45 = - 16{,}87 \\ \mathfrak{D}_2 = 35 \ \ . 0{,}075 . 7{,}81 = 20{,}50 & \mathfrak{V}_2 = 10 \ \ . 0{,}3 - 35 \ \ . 0{,}45 = - 12{,}75 \\ \mathfrak{D}_3 = 25 \ \ . 0{,}075 . 7{,}81 = 14{,}64 & \mathfrak{V}_3 = 10 \ \ . 0{,}3 - 25 \ \ . 0{,}45 = - \ \ 8{,}25 \\ \mathfrak{D}_4 = 15 \ \ . 0{,}075 . 7{,}81 = \ \ 8{,}79 & \mathfrak{V}_4 = 10 \ \ . 0{,}3 - 15 \ \ . 0{,}45 = - \ \ 3{,}75 \\ \mathfrak{D}_5 = \ \ 5 \ \ . 0{,}075 . 7{,}81 = \ \ 2{,}93 & \mathfrak{V}_5 = 10 \ \ . 0{,}3 - \ \ 5 \ \ . 0{,}45 = - \ \ 0{,}75. \end{array}$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die eben berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen Grenzwerthe hat man nach § 37, 3) 4)

$$(3)\qquad X_m = \frac{q}{g} \mathfrak{X}_m = - Z_{m+1},$$

also wegen $q : g = 3{,}922$ in Tonnen:

$$\begin{array}{ll} X_1 = - \ \ 31{,}26 & Z_1 = \ \ 0 \\ X_2 = - \ \ 82{,}71 & Z_2 = \ \ 31{,}26 \end{array}$$

$$X_3 = -119{,}50 \qquad Z_3 = 82{,}71$$
$$X_4 = -141{,}54 \qquad Z_4 = 119{,}50$$
$$X_5 = -148{,}92 \qquad Z_5 = 141{,}54.$$

Nach § 37, 5) sind die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

$$(4) \quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(l - e_m)^2}{l - \lambda_m} \dfrac{p d_m}{2h}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{e^2_{m-1}}{l - \lambda_m} \dfrac{p d_m}{2h}, \end{cases}$$

und nach § 37, 7) diejenigen der Verticalen

$$(5) \quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{(l - e_{m+1})^2}{l - \lambda_{m+1}} \dfrac{p}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{e_m}{l - \lambda_{m+1}} \dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken nach 1) auch die Grenzwerthe von V_0 aus. Wir erhalten nun in Tonnen für die Diagonalen:

$$D_1 = 20{,}85 + \frac{2{,}63 \,.\, 6{,}54}{510} 41{,}5^2 = 81{,}72$$

$$D_2 = 20{,}50 + \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 37{,}5^2 = 80{,}69$$

$$D_3 = 14{,}64 + \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 32{,}5^2 = 59{,}85$$

$$D_4 = 8{,}79 + \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 27{,}5^2 = 41{,}16$$

$$D_5 = 2{,}93 + \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 22{,}5^2 = 24{,}60,$$

$$D_1 = 20{,}85 - \frac{2{,}63 \,.\, 6{,}54}{510} 0^2 = 20{,}85$$

$$D_2 = 20{,}50 - \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 2{,}5^2 = 20{,}23$$

$$D_3 = 14{,}64 - \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 7{,}5^2 = 12{,}23$$

$$D_4 = 8{,}79 - \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 12{,}5^2 = 2{,}10$$

$$D_5 = 2{,}93 - \frac{2{,}63 \,.\, 7{,}81}{480} 17{,}5^2 = -10{,}18,$$

und für die Verticalen:

$$V_0 = -\,19{,}50 - \frac{2{,}63}{85}\,42{,}5^2 = -\,75{,}31$$

$$V_1 = -\,16{,}87 - \frac{2{,}63}{80}\,37{,}5^2 = -\,63{,}09$$

$$V_2 = -\,12{,}75 - \frac{2{,}63}{80}\,32{,}5^2 = -\,47{,}47$$

$$V_3 = -\quad 8{,}25 = \frac{2{,}63}{80}\,27{,}5^2 = -\,33{,}11$$

$$V_4 = -\quad 3{,}75 - \frac{2{,}63}{80}\,22{,}5^2 = -\,20{,}39$$

$$V_5 = \quad 0{,}75 - \frac{2{,}63}{80}\,17{,}5^2 = -\quad 9{,}32,$$

$$V_0 = -\,19{,}50 + \frac{2{,}63}{85}\,0^2 = -\,19{,}50$$

$$V_1 = -\,16{,}87 + \frac{2{,}63}{80}\,2{,}5^2 = -\,16{,}66$$

$$V_2 = -\,12{,}75 + \frac{2{,}63}{80}\,7{,}5^2 = -\,10{,}90$$

$$V_3 = -\quad 8{,}25 + \frac{2{,}63}{80}\,12{,}5^2 = -\quad 3{,}11$$

$$V_4 = -\quad 3{,}75 + \frac{2{,}63}{80}\,17{,}5^2 = -\quad 7{,}32$$

$$V_5 = \quad 0{,}75 + \frac{2{,}63}{80}\,22{,}5^2 = \quad 17{,}39.$$

Gegendiagonalen. Abänderung der Trägerenden. Da die Diagonalen in den zwei mittleren Feldern sowohl Zug als Druck erleiden können, so sind daselbst Gegendiagonalen anzuordnen. Der Einfluss derselben ist durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt, wobei zu beachten, dass constant

$$K_o = 5\,.\,0{,}3 = 1{,}5 \text{ tn}.$$

Werden die Trägerenden nach Fig. 93 abgeändert, so treten die in Aufgabe 24 erwähnten Aenderungen der Stabkräfte ein, wonach insbesondere die Grenzwerthe von V_1

$$V_1 = 3{,}23\,.\,3{,}75 = 12{,}11, \qquad V_1 = \mathfrak{B}_1 = 0{,}6\,.\,3{,}75 = 2{,}25 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen erhalten wie in Beispiel 41 die dort berechneten Werthe. Die für den Träger mit Gegendiagonalen und Enden nach Fig. 93 gültigen Grenzwerthe sind in Fig. 92 eingetragen. Erwähnt sei noch, dass die Beanspruchung der mittleren Verticale für Eigengewicht allein nicht wie oben für Fig. 91 berechnet 0,75 tn,

sondern nach § 50, 4) gleich der unteren Grenzbeanspruchung — 1,5 tn derselben ist.

Beispiel 47. Parallelträger einfachen Systems mit ungleichlangen Feldern. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles im vorigen Beispiele Gesagte gültig. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die dort berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen Grenzwerthe hat man nach § 37, 9) 2) bei Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(1)\quad X_m = \mathfrak{X}_m - \left[(l - e_m)\sum_0^m Pa + e_m \sum_m^n P(l-a)\right]\frac{1}{lh} = - Z_{m+1}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen ergeben sich nach § 37, 13) 14) 17) 18) wie folgt:

Zug II (Fig. 22) von Verticale m bis n, Vorderrad O bei m,

$$(2)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{lh}\sum_m^n P(l-a),$$

Zug II von 0 bis Verticale $m-1$, Vorderrad O bei $m-1$,

$$(3)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{lh}\sum_0^{m-1} Pa;$$

Zug II von Verticale $m+1$ bis n, Vorderrad O bei $m+1$,

$$(4)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{1}{l}\sum_{m+1}^n P(l-a),$$

Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

$$(5)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{1}{l}\sum_0^m Pa.$$

Nach B. 46, 1) sind durch 4) 5) auch die Grenzwerthe von V_0 ausgedrückt.

Die Werthe der Summenausdrücke $\sum$ lassen sich aus der Tabelle in Beispiel 6 entnehmen und würden beim Fehlen einer solchen Tabelle wie in Beispiel 42 zu berechnen sein (sie haben sich übrigens

auch schon in Beispiel 27 ergeben). Wir drücken die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen für die erste Richtung des Zugs I aus und setzen die der zweiten Richtung entsprechenden Resultate in Klammer bei.

$$X_1 = -\ 7{,}97 - \frac{1}{270}(42{,}5 . 22{,}2 + 2{,}5 . 2205) = -\ 31{,}88 \text{ tn } (-\ 31{,}29)$$

$$X_2 = -21{,}09 - \frac{1}{270}(37{,}5 . 112 + 7{,}5 . 1716) = -\ 84{,}31 \text{ tn } (-\ 81{,}38)$$

$$X_3 = -30{,}47 - \frac{1}{270}(32{,}5 . 244 + 12{,}5 . 1230) = -119{,}56 \text{ tn } (-119{,}42)$$

$$X_4 = -36{,}09 - \frac{1}{270}(27{,}5 . 460 + 17{,}5 . 915) = -142{,}25 \text{ tn } (-141{,}15)$$

$$X_5 = -37{,}97 - \frac{1}{270}(22{,}5 . 714 + 22{,}5 . 617) = -148{,}48 \text{ tn } (-148{,}48),$$

$$Z_1 = 0 \text{ tn } (0) \qquad Z_3 = 84{,}31 \text{ tn } (81{,}38)$$

$$Z_2 = 31{,}88 \text{ tn } (31{,}29) \qquad Z_4 = 119{,}56 \text{ tn } (119{,}42)$$

$$Z_5 = 142{,}25 \text{ tn } (141{,}15).$$

Auch hier hätte wie in allen bisherigen Fällen die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung allein genügt. Weiter folgen in Tonnen die beiden Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_1 = 20{,}85 + \frac{6{,}54}{270}\, 2518 = 81{,}84 \qquad D_1 = 20{,}85 - \frac{6{,}54}{270}\, 0 = 20{,}85$$

$$D_2 = 20{,}50 + \frac{7{,}81}{270}\, 1989 = 77{,}98 \qquad D_2 = 20{,}50 - \frac{7{,}81}{270}\, 23{,}4 = 19{,}82$$

$$D_3 = 14{,}64 + \frac{7{,}81}{270}\, 1522 = 58{,}63 \qquad D_3 = 14{,}64 - \frac{7{,}81}{270}\, 130 = 10{,}88$$

$$D_4 = 8{,}79 + \frac{7{,}81}{270}\, 1125 = 41{,}30 \qquad D_4 = 8{,}79 - \frac{7{,}81}{270}\, 276 = 0{,}81$$

$$D_5 = 2{,}93 + \frac{7{,}81}{270}\, 776 = 25{,}36 \qquad D_5 = 2{,}93 - \frac{7{,}81}{270}\, 505 = -11{,}66,$$

und beide Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_0 = -19{,}50 - \frac{2518}{45} = -75{,}46 \qquad V_0 = -19{,}50 + \frac{0}{45} = -19{,}50$$

$$V_1 = -16{,}87 - \frac{1989}{45} = -61{,}07 \qquad V_1 = -16{,}87 + \frac{23{,}4}{45} = -16{,}37$$

$$V_2 = -12{,}75 - \frac{1522}{45} = -46{,}57 \qquad V_2 = -12{,}75 + \frac{130}{45} = -\ 9{,}86$$

$$V_3 = -\ 8{,}25 - \frac{1125}{45} = -33{,}25 \qquad V_3 = -\ 8{,}25 + \frac{276}{45} = -\ 2{,}12$$

$$V_4 = -3{,}75 - \frac{776}{45} = -20{,}99 \qquad V_4 = -\ 3{,}75 + \frac{505}{45} = 7{,}47$$

$$V_5 = \ 0{,}75 - \frac{505}{45} = -10{,}47 \qquad V_5 = \ 0{,}75 + \frac{776}{45} = 17{,}99.$$

Für D_1 und V_0 werden voraussichtlich bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, noch etwas ungünstigere obere Grenzwerthe als mit Zug II entstehen. Wir erhalten mit den nach § 37, 10) und A. 19, 11) bei beliebiger Belastung gültigen Gleichungen

$$(6) \qquad D_1 = \mathfrak{D}_1 + \left[\left(\frac{l}{\lambda_1} - 1\right) \sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right] \frac{d_1}{lh},$$

$$(7) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \left[\left(\frac{l}{\lambda_1} - 1\right) \sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right] \frac{1}{l},$$

mit den schon für X_1 verwendeten $\sum$

$$D_1 = 20{,}85 \quad + \frac{17 \cdot 22{,}2 + 2205}{270}\, 6{,}54 = 83{,}40 \text{ tn},$$

$$V_0 = -\ 19{,}5 - \frac{17 \cdot 22{,}2 + 2205}{45} = -\ 76{,}89 \text{ tn},$$

gegen oben erhaltene 81,84 und — 75,46 tn.

Da die Diagonalen in den zwei mittleren Feldern sowohl Zug als Druck erleiden können, so sind daselbst Gegendiagonalen anzuordnen. Der Einfluss derselben ist wie im vorigen Beispiele durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt. Ebenso ergibt sich wieder der Einfluss einer Abänderung der Trägerenden nach Fig. 93 aus dem in Aufgabe 24 abgeleiteten Satze und sind danach insbesondere die Grenzwerthe von V_1

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 = 0{,}6 \cdot 3{,}75 = 2{,}25 \text{ tn},$$

$$V_1 = 2{,}25 + 6 + 6\, \frac{3{,}7 + 2{,}4}{5} + 4\, \frac{1{,}3}{2{,}5} = 17{,}65 \text{ tn}.$$

Für die Stützenreactionen gelten die in Beispiel 42 berechneten Werthe. Sämmtliche dem Träger mit Gegendiagonalen und Enden nach Fig. 93 entsprechenden Grenzwerthe sind in Fig. 94 eingetragen.

Aufgabe 34. Lastäquivalente beim Parallelträger einfachen Systems mit ungleichlangen Feldern.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte des Parallelträgers einfachen Systems mit Verticalen und ungleichlangen Feldern bei Anwendung der Lastäquivalente direct befahrener vollwandiger Träger anzugeben.

Nach Aufgabe 29 sind die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen aus § 37, 4) mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für einen durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Träger dem max M_x bei der Trägermitte entspricht. Bezeichnen ferner p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente, welche für einen durch Zug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem pos max V_x bei $x = v$ bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen, so hat man nach § 37, 1) mit A. 29, 2) 4) die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

$$(1) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{d_m}{2lh}(l - v)^2 p_v, \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{d_m}{2lh} c^2 p_c,$$

worin

$$(2) \qquad v = e_m, \qquad c = e_{m-1},$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

$$(3) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp (l - v)^2 \frac{p_v}{2l}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm c^2 \frac{p_c}{2l},$$

worin, wenn die Fahrbahnlast angreift

a) in den Knotenpunkten der X-Gurtung,

$$(4) \qquad v = e_m, \qquad c = e_{m-1},$$

b) in den Knotenpunkten der Z-Gurtung,

$$(5) \qquad v = e_{m+1}, \qquad c = e_m.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurtungen in Verticale m an, so sind bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Werthe 4) und bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung die Werthe 5) massgebend. — Mittelst der Gleichungen 1) 3) müssen sich genau dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder ergeben wie bei directer Berechnung mit Lastzug II.

Für einzelne Füllungsglieder an den Trägerenden kann $c = 0$ oder $v = l$ sein, in welchem Falle eine Grenzbeanspruchung für Eigengewicht allein eintritt. Findet sich dann die obere Grenzbeanspruchung nach den für gleichmässig vertheilte bewegte Last abgeleiteten Formeln, also beispielsweise für D_1 nach

$$(6) \qquad D_1 = \mathfrak{D}_1 \pm (l - \lambda_1) \frac{p d_1}{2h},$$

oder für V_1 im Falle a) nach

$$(7) \qquad V_1 = \mathfrak{V}_1 \mp (l - \lambda_1) \frac{p}{2},$$

mit dem für die Gurtungskräfte verwendeten p ungünstiger als nach

1) 3), so kann man jene (der Berechnung mit Zug I entsprechende, A. 29 und 30) als massgebend ansehen.

Beispiel 48. Parallelträger einfachen Systems mit ungleichlangen Feldern. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des Beispiels 46 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den bewegten Radlastzügen des vorigen Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt es bei dem in Beispiel 46 Gesagten. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind wie dort mit constantem p zu berechnen und zwar hat man wie für die max M_x eines durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m zu setzen $p = 2{,}63$ tn (Beispiel 8). Da diese Annahme auch in Beispiel 46 gemacht wurde, so könnten sämmtliche dort erhaltene Grenzbeanspruchungen der Gurtungen beibehalten werden. Wir haben in Fig. 95 die dem nach oben abgerundeten $p = 2{,}7$ entsprechenden oberen Grenzwerthe eingetragen, welche $q : g = 4$ mal so gross als die in Beispiel 46 berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen sind.

Für die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen hat man nach A. 34, 1) mit $v = e_m$, $c = e_{m-1}$,

$$(1) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{d_m}{2lh}(l - e_m)^2 p_v, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{d_m}{2lh} e^2_{m-1} p_c, \end{cases}$$

und für die Grenzbeanspruchungen der Verticalen nach A. 34, 3) mit $v = e_{m+1}$, $c = e_m$,

$$(2) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{p_v}{2l}(l - e_{m+1})^2, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{p_c}{2l} e^2_m. \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken nach A. 30, 7) oder B. 46, 1) auch die Grenzwerthe von V_0 aus. In 1) 2) bedeuten p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente, welche für einen durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem pos max V_x bei $x = v$ bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen.

Dieselben lassen sich aus der Tabelle in Beispiel 8 entnehmen. Wir erhalten damit in Tonnen die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_1 = 20{,}85 + \frac{6{,}54}{540}\, 42{,}5^2 \,.\, 2{,}78 = 81{,}67$$

$$D_2 = 20{,}50 + \frac{7{,}81}{540}\, 37{,}5^2 \,.\, 2{,}83 = 78{,}05$$

$$D_3 = 14{,}64 + \frac{7{,}81}{540}\, 32{,}5^2 \,.\, 2{,}88 = 58{,}63$$

$$D_4 = 8{,}79 + \frac{7{,}81}{540}\, 27{,}5^2 \,.\, 2{,}97 = 41{,}27$$

$$D_5 = 2{,}93 + \frac{7{,}81}{540}\, 22{,}5^2 \,.\, 3{,}06 = 25{,}33,$$

$$D_1 = 20{,}85 - \frac{6{,}54}{540}\, 0^2 \quad \infty \quad = \quad 20{,}85$$

$$D_2 = 20{,}50 - \frac{7{,}81}{540}\, 2{,}5^2 \,.\, 7{,}45 = 19{,}83$$

$$D_3 = 14{,}64 - \frac{7{,}81}{540}\, 7{,}5^2 \,.\, 4{,}61 = 10{,}89$$

$$D_4 = 8{,}79 - \frac{7{,}81}{540}\, 12{,}5^2 \,.\, 3{,}53 = 0{,}81$$

$$D_5 = 2{,}93 - \frac{7{,}81}{540}\, 17{,}5^2 \,.\, 3{,}29 = -11{,}63,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_0 = -19{,}50 - \frac{2{,}78}{90}\, 42{,}5^2 = -75{,}38$$

$$V_1 = -16{,}87 - \frac{2{,}83}{90}\, 37{,}5^2 = -61{,}09$$

$$V_2 = -12{,}75 - \frac{2{,}88}{90}\, 32{,}5^2 = -46{,}55$$

$$V_3 = -8{,}25 - \frac{2{,}97}{90}\, 27{,}5^2 = -33{,}21$$

$$V_4 = -3{,}75 - \frac{3{,}06}{90}\, 22{,}5^2 = -20{,}96$$

$$V_5 = 0{,}75 - \frac{3{,}29}{90}\, 17{,}5^2 = -10{,}45,$$

$$V_0 = -19{,}50 + \frac{\infty}{90}\, 0^2 = -19{,}50$$

$$V_1 = -16{,}87 + \frac{7{,}45}{90}\, 2{,}5^2 = -16{,}35$$

$$V_2 = -12{,}75 + \frac{4{,}61}{90}\, 7{,}5^2 = -9{,}87$$

$$V_3 = -\ 8{,}25 + \frac{3{,}53}{90}\,12{,}5^2 = -\ 2{,}12$$

$$V_4 = -\ 3{,}75 + \frac{3{,}29}{90}\,17{,}5^2 = 7{,}45$$

$$V_5 = 0{,}75 + \frac{3{,}06}{90}\,22{,}5^2 = 17{,}96$$

Nach Aufgabe 29 müssen vorstehende Grenzwerthe vollständig mit den im letzten Beispiele berechneten übereinstimmen.

Wie sich im vorigen Beispiele für die Diagonale 1 und Verticale 0 mit Zug I noch ungünstigere obere Grenzwerthe als mit Zug II ergeben haben, so gilt Analoges bei Berechnung mit den entsprechenden Lastäquivalenten. Wir erhalten nach A. 30, 6) mit $c = 0$

(3) $$D_1 = \mathfrak{D}_1 + (l - \lambda_1)\frac{p d_1}{2h},$$

(4) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 - (l - \lambda_1)\frac{p}{2},$$

und hieraus mit dem für die Gurtungskräfte verwendeten $p = 2{,}7$

$$D_1 = 83{,}40 \text{ tn}, \qquad V_0 = -\ 76{,}88 \text{ tn}.$$

Gleichung 3) hätten wir natürlich auch aus A. 34 direct entnehmen können.

Da die Diagonalen in den zwei mittleren Feldern Zug und Druck erleiden können, so sind daselbst Gegendiagonalen anzuordnen, deren Einfluss wie in den zwei letzten Beispielen durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt ist. Der Einfluss einer Abänderung der Trägerenden nach Fig. 93 ist wieder aus dem in Aufgabe 24 abgeleiteten Satze zu entnehmen. Der untere Grenzwerth von V_1 ist demnach $V_1 = 0{,}6 \,.\, 3{,}75 = 2{,}25$ tn, den obern kann man entweder wie im vorigen Beispiele berechnen oder man entnimmt zufolge A. 29, c) aus Beispiel 8 der Spannweite $v = 7{,}5$ m entsprechend $p = 4{,}05$ und erhält

$$V_1 = 3{,}75 \,.\, 4{,}65 = 17{,}44 \text{ tn}.$$

Für die Stützenreactionen gelten die in Beispiel 43 berechneten Werthe. Alle dem Träger mit Gegendiagonalen und Enden nach Fig. 93 entsprechenden Grenzwerthe sind in Fig. 95 eingetragen.

Beispiel 49. Dreiecksdachbinder einfachen Systems mit Verticalen. X-Gurtung oben.

Für den in Fig. 96 angedeuteten Dachbinder betrage per laufenden Meter die feste Last $g = 0{,}5$ tn, die Belastung durch Schnee

und Winddruck $p = 0{,}75$ tn. Die ganze Last soll auf die Knotenpunkte des Obergurts allein vertheilt gelten. Es sind die Grenzbeanspruchungen der Stäbe festzustellen.

Nach § 32, 6) mit § 31, 16) sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe:

(1)
$$\begin{cases} X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m = -\,m\,(n-m)\,\frac{q\lambda x}{2h_m}, \\ Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m = (m-1)\,(n-m+1)\,\frac{q\lambda z}{2h_{m-1}}, \end{cases}$$

und nach § 39, 8) 9) mit § 38, 5) 6) die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen:

(2)
$$\begin{cases} D_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{D}_m = -\,(m-1)\,\frac{q\lambda d_m}{2h_{m-1}}, \\ V_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_m = (m-1)\,\frac{q\lambda}{2}. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung setzt voraus, dass zu beiden Seiten der Verticale m Felder mit Diagonalen gleicher Stellung liegen, sie gilt zwar für V_1, da wir uns im ersten Felde die Diagonale mit dem unteren Gurtungsstabe zusammenfallend denken können, nicht aber für die mittlere Verticale. Für diese haben wir nach A. 28, 5) 6) die obere Grenzbeanspruchung, wenn k die Höhe des mittleren Knotenpunkts im Untergurt über den Auflagern bedeutet,

(3)
$$V_\sigma = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_\sigma = \left(\frac{h+k}{2h}\,n - 1\right) q\lambda.$$

Während die Gleichungen 1) 2) wegen $h_0 = 0$ für Z_1, D_1 unbestimmte Ausdrücke ergeben, liefert die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Untergurts die ganze Beanspruchung des Untergurtstabes 1 bei jeder Belastung

(4)
$$Z_1 = Z_2.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen sämmtlicher Stäbe sind die Beanspruchungen $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ durch die feste Last allein, sie stehen zu den oberen im Verhältniss

$$g : q = 0{,}5 : 1{,}25 = 2 : 5,$$

sodass wir uns auf die Angabe der oberen Grenzbeanspruchungen beschränken können. Dieselben ergeben sich aus vorstehenden Gleichungen für die Gurtungsstäbe:

$$X_1 = -\frac{1\,.\,7}{1{,}5}\,2{,}5\,.\,4{,}47 = -\,52{,}15 \qquad Z_1 = Z_2$$

$$X_2 = -\frac{2\,.\,6}{3}\,2{,}5\,.\,4{,}47 = -\,44{,}70 \qquad Z_2 = \frac{1\,.\,7}{1{,}5}\,2{,}5\,.\,4{,}03 = 47{,}02$$

$$X_3 = -\frac{3\,.\,5}{4{,}5}\,2{,}5\,.\,4{,}47 = -\,37{,}25 \qquad Z_3 = \frac{2\,.\,6}{3}\,2{,}5\,.\,4{,}03 = 40{,}30$$

$$X_4 = -\frac{4\,.\,4}{6}\,2{,}5\,.\,4{,}47 = -\,29{,}80 \qquad Z_4 = \frac{3\,.\,5}{4{,}5}\,2{,}5\,.\,4{,}03 = 33{,}58,$$

und für die Füllungsglieder:

$$D_2 = -\frac{1\,.\,4{,}12}{1{,}5}\,2{,}5 = -\,6{,}87 \qquad V_1 = 0\,.\,2{,}5 = 0$$

$$D_3 = -\frac{2\,.\,4{,}72}{3}\,2{,}5 = -\,7{,}87 \qquad V_2 = 1\,.\,2{,}5 = 2{,}5$$

$$D_4 = -\frac{3\,.\,5{,}66}{4{,}5}\,2{,}5 = -\,9{,}43 \qquad V_3 = 2\,.\,2{,}5 = 5$$

$$V_4 = \left(\frac{8\,.\,4}{6} - 1\right) 5 = 21{,}67 \text{ tn}.$$

Bemerkungen. Da die Verticale 1 keine rechnungsmässige Beanspruchung erleidet, so wird sie vielfach weggelassen, eventuell liesse sich ihr Verbleiben mit der Verhinderung einer grösseren Einbiegung der anstossenden Stäbe des Untergurts motiviren.

Wäre ein Theil der festen Last auf die Knotenpunkte des Untergurts zu rechnen, so würde sich nur die Berechnung der Verticalen etwas ändern. Als Grenzbeanspruchungen hätte man nach § 39, 1) 3) und § 38, 5)

$$(5) \qquad \mathfrak{V}_m = \left(m - \frac{g_x - g_z}{g}\right)\frac{g\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + (m-1)\frac{p\lambda}{2},$$

für die mittlere Verticale jedoch ausnahmsweise nach A. 28, 5) 6)

$$(6) \quad \mathfrak{V}_o = \left(\frac{h+k}{2h}\,n - \frac{g_x}{g}\right) g\lambda, \qquad V_o = \mathfrak{V}_o + \left(\frac{h+k}{2h}\,n - 1\right) p\lambda,$$

unter g_x, g_z diejenigen Theile von g verstanden, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind. Setzen wir im obigen Falle $g_x = 0{,}4$, $g_z = 0{,}1$, so ergeben sich

$$\mathfrak{V}_1 = 0{,}4 \qquad \mathfrak{V}_2 = 1{,}4 \qquad \mathfrak{V}_3 = 2{,}4 \qquad \mathfrak{V}_4 = 9{,}07$$

$$V_1 = 0{,}4 \qquad V_2 = 2{,}9 \qquad V_3 = 5{,}4 \qquad V_4 = 22{,}07 \text{ tn}.$$

Die Formeln 5) 6) könnten besonders dann zur Verwendung kommen, wenn die Dachbinder gleichzeitig eine Decke zu tragen hätten. Ueber Berücksichtigung schiefen Winddrucks siehe die Beispiele 21, 22, 39, 40, 57, 58, 85, 86.

Beispiel 50. Dreiecksdachbinder einfachen Systems mit Verticalen. X-Gurtung unten.

Für den in Fig. 97 angedeuteten Dachbinder beträgt per laufenden Meter die feste Last $g = 0{,}5$ tn, die Belastung durch Schnee und Winddruck $p = 0{,}75$ tn. Die ganze Last soll auf die Knotenpunkte des Obergurts allein vertheilt gelten. Es sind die Grenzbeanspruchungen der Stäbe festzustellen.

Nach § 32, 6) mit § 31, 16) sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m = m\,(n-m)\,\frac{q\lambda x}{2h_m}, \\ Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m = -(m-1)\,(n-m+1)\,\frac{q\lambda z}{2h_{m-1}}, \end{cases}$$

und nach § 39, 8) 9) mit § 38, 5) 7) diejenigen der Füllungsglieder:

$$(2)\qquad \begin{cases} D_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{D}_m = (m-1)\,\frac{q\lambda d_m}{2h_{m-1}}, \\ V_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_m = -(m+1)\,\frac{q\lambda}{2}. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung setzt voraus, dass zu beiden Seiten der Verticale m Felder mit Diagonalen gleicher Stellung liegen, sie gilt zwar für V_1, da wir uns im ersten Felde die Diagonale mit dem oberen Gurtungsstabe zusammenfallend denken können, nicht aber für die mittlere Verticale. Für diese haben wir nach A. 28, 5) 7) die obere Grenzbeanspruchung, wenn k die Höhe des mittleren Knotenpunkts im Untergurt über den Auflagern bedeutet,

$$(3)\qquad V_\sigma = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_\sigma = \frac{qlk}{2h}.$$

Während die Gleichungen 1) 2) wegen $h_0 = 0$ für Z_1, D_1 unbestimmte Ausdrücke ergeben, liefert die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Obergurts die ganze Beanspruchung des Obergurtstabes 1 bei jeder Belastung

$$(4)\qquad Z_1 = Z_2.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen sämmtlicher Stäbe sind die Beanspruchungen $\mathfrak{X}_m, \mathfrak{Z}_m, \mathfrak{D}_m, \mathfrak{V}_m$ für die feste Last allein, sie stehen zu den oberen im Verhältniss

$$\frac{q}{g} = \frac{0{,}5}{1{,}25} = \frac{2}{5},$$

sodass wir uns auf die Angabe der oberen Grenzbeanspruchungen beschränken können. Dieselben ergeben sich aus vorstehenden Gleichungen für die Gurtungsstäbe:

$$X_1 = \frac{1 \cdot 7}{1{,}5} 2{,}5 \cdot 4{,}03 = 47{,}02 \qquad Z_1 = Z_2$$

$$X_2 = \frac{2 \cdot 6}{3} 2{,}5 \cdot 4{,}03 = 40{,}30 \qquad Z_2 = -\frac{1 \cdot 7}{1{,}5} 2{,}5 \cdot 4{,}47 = -52{,}15$$

$$X_3 = \frac{3 \cdot 5}{4{,}5} 2{,}5 \cdot 4{,}03 = 33{,}58 \qquad Z_3 = -\frac{2 \cdot 6}{3} 2{,}5 \cdot 4{,}47 = -44{,}70$$

$$X_4 = \frac{4 \cdot 4}{6} 2{,}5 \cdot 4{,}03 = 26{,}87 \qquad Z_4 = -\frac{3 \cdot 5}{4{,}5} 2{,}5 \cdot 4{,}47 = -37{,}25,$$

und für die Füllungsglieder:

$$D_2 = \frac{1 \cdot 5{,}32}{1{,}5} 2{,}5 = 8{,}87 \qquad V_1 = -2 \cdot 2{,}5 = -5$$

$$D_3 = \frac{2 \cdot 6{,}4}{3} 2{,}5 = 10{,}67 \qquad V_2 = -3 \cdot 2{,}5 = -7{,}5$$

$$D_4 = \frac{3 \cdot 6{,}8}{4{,}5} 2{,}5 = 11{,}33 \qquad V_3 = -4 \cdot 2{,}5 = -10$$

$$V_4 = 1{,}25 \frac{64}{12} = 6{,}67 \text{ tn.}$$

Bemerkungen. Bei horizontalem Untergurt erhält die mittlere Verticale nach 3) keine Beanspruchung, sie kann dann wegbleiben, wenn sie nicht zur Verhinderung einer grösseren Einbiegung des Untergurts dienen soll. Will man die mittlere Verticale bei nicht horizontalem Untergurt weglassen (Fig. 98), so folgen aus § 32, 4) 6) 10) 13) mit $m = \sigma = \frac{n}{2}$, $x_m = \lambda$ die oberen Grenzbeanspruchungen

$$(5) \quad X_\sigma = \frac{q}{g} \mathfrak{X}_\sigma = \frac{ql^2}{8h}, \qquad D_\sigma = \frac{q}{g} \mathfrak{D}_\sigma = \left(\frac{h+k}{2h} n - 1\right) \frac{q\lambda d_\sigma}{2h_{\sigma-1}},$$

während die unteren, $\mathfrak{X}_\sigma$, $\mathfrak{D}_\sigma$, wieder im Verhältnisse $g:q$ zu den oberen stehen und alle übrigen Beanspruchungen wie oben bleiben. Für den jetzt berechneten Träger würden im Falle der Abänderung nach Fig. 98 zufolge 5)

$$X_4 = \frac{1{,}25}{8 \cdot 6{,}5} 32^2 = 24{,}62, \quad D_4 = \left(\frac{8 \cdot 4}{6{,}5} - 1\right) \frac{2{,}5 \cdot 6{,}8}{4{,}5} = 14{,}82 \text{ tn.}$$

Wäre ein Theil der festen Last auf die Knotenpunkte des Untergurts zu rechnen, so würde sich nur die Berechnung der V_m etwas ändern. Als Grenzbeanspruchungen hätte man nach § 39, 1) 4) und § 38, 5)

$$(6) \quad \mathfrak{V}_m = -\left(m + \frac{g_z - g_x}{g}\right) \frac{g\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - (m+1) \frac{p\lambda}{2},$$

für die mittlere Verticale jedoch ausnahmsweise nach A. 28, 5) 7)

$$(7) \qquad \mathfrak{V}_\sigma = \frac{gld}{2h} + g_x \lambda, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{pld}{2h},$$

unter g_x, g_z diejenigen Theile von g verstanden, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind. Setzen wir im obigen Falle $g_x = 0{,}1$, $g_z = 0{,}4$, so folgen:

$$\mathfrak{V}_1 = -1{,}6 \quad \mathfrak{V}_2 = -2{,}6 \quad \mathfrak{V}_3 = -3{,}6 \quad \mathfrak{V}_4 = 3{,}07$$
$$V_1 = -4{,}6 \quad V_2 = -7{,}1 \quad V_3 = -9{,}6 \quad V_4 = 22{,}07.$$

Ueber Berücksichtigung schiefen Winddrucks siehe die Citate am Schlusse des vorigen Beispiels.

Beispiel 51. Dreiecksträger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 24$ m Spannweite sollen Dreiecksträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks mit horizontalem Obergurt und nur gegen Zug widerstandsfähigen Diagonalen zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe in der Mitte $h = 4$ m, Felderzahl $n = 8$. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}73$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}77$ tn. Vom Eigengewicht kommen 0,53 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und 0,2 tn auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte festzustellen.

Nach § 38, 4) erleiden die Diagonalen nur Zugbeanspruchungen, wenn bei symmetrischer Anordnung des Trägers die X-Gurtung auf der ersten Trägerhälfte unten liegt. Unser Träger ist demnach in Fig. 99 angedeutet. Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten Stablängen in Metern. Selbstverständlich haben wir nur die erste Trägerhälfte zu berechnen.

Untere Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe aller Stabkräfte treten für Eigengewicht allein ein. Wir haben nach § 31, 16) und § 38, 5)

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \quad m\,(n-m)\,\dfrac{g\lambda x}{2h_m}, \\ \mathfrak{Z}_m = -(m-1)\,(n-m+1)\,\dfrac{g\lambda^2}{2h_{m-1}}, \\ \mathfrak{D}_m = \quad (m-1)\,\dfrac{g\lambda d_m}{2h_{m-1}}, \\ \mathfrak{V}_m = -m\,\dfrac{g\lambda}{2} - \dfrac{g_z - g_x}{g}\,\lambda. \end{cases}$$

Eine Ausnahme macht die Beanspruchung der mittleren Verticale, für welche bei jeder Belastung gilt (vergl. Aufgabe 28),

(2) $$V_4 + 2X_4\frac{1}{4{,}12} - g_x\lambda = 0.$$

Während die Gleichungen 1) wegen $h_0 = 0$ für Z_1, D_1 auf den unbestimmten Ausdruck $0:0$ führen, ergibt die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Obergurts bei jeder Belastung

(3) $$Z_1 = Z_2.$$

Vorstehende Gleichungen liefern nun mit den gegebenen Zahlenwerthen und $g_x = 0{,}2$, $g_s = 0{,}53$ folgende Beanspruchungen für Eigengewicht allein in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = 24{,}22$	$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2$		$\mathfrak{V}_1 = -1{,}59$
$\mathfrak{X}_2 = 20{,}76$	$\mathfrak{Z}_2 = -22{,}99$	$\mathfrak{D}_2 = 3{,}46$	$\mathfrak{V}_2 = -2{,}68$
$\mathfrak{X}_3 = 17{,}30$	$\mathfrak{Z}_3 = -19{,}71$	$\mathfrak{D}_3 = 3{,}95$	$\mathfrak{V}_3 = -3{,}78$
$\mathfrak{X}_4 = 13{,}84$	$\mathfrak{Z}_4 = -16{,}42$	$\mathfrak{D}_4 = 4{,}64$	$\mathfrak{V}_4 = -5{,}78.$

Obere Grenzwerthe. Nach § 32, 6) sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen

(4) $$X_m = \frac{q}{g}\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\mathfrak{Z}_m,$$

und nach § 39, 8) 4) die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen

(5) $$D_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}_m, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - (m+1)\frac{p\lambda}{2}.$$

Wir erhalten mit $q:g = 3{,}5:0{,}73 = 4{,}794$ folgende Werthe in Tonnen:

$X_1 = 116{,}11$	$Z_1 = Z_2$		$V_1 = -9{,}90$
$X_2 = 99{,}52$	$Z_2 = -110{,}21$	$D_2 = 16{,}59$	$V_2 = -15{,}15$
$X_3 = 82{,}94$	$Z_3 = -94{,}49$	$D_3 = 18{,}94$	$V_3 = -20{,}40$
$X_4 = 66{,}35$	$Z_4 = -78{,}72$	$D_4 = 22{,}24$	$V_4 = -29{,}98.$

Bemerkungen. Hätten wir das ganze Eigengewicht g nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt angenommen, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so würde nach § 39, 9) gewesen sein

(6) $$V_m = \frac{q}{g}\mathfrak{V}_m.$$

Wie in beiden letzten Beispielen hätte man natürlich auch die oberen Grenzwerthe ohne Rücksicht auf die unteren und V_4 nach den

allgemeinen Formeln der Aufgabe 28 berechnen können. Doch beabsichtigen wir, von den berechneten unteren Grenzwerthen in den zwei folgenden Beispielen Gebrauch zu machen. Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 54 bestimmt.

Beispiel 52. Dreieckstäger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Brückenträger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der oberen Grenzwerthe bleibt das im vorigen Beispiele Gegebene gültig. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe und Füllungsglieder erhält man nach § 33, 1) 2) und § 40, 2) 4) wie folgt:

Belastung durch Zug I (Fig. 23 und 24) von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(1) \quad X_m = \mathfrak{X}_m - \Big[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{x}{lh_m} = -\frac{x}{z}Z_{m+1},$$

Belastung durch Zug I von 0 bis m, Rad O bei Verticale $m-1$,

$$(2) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \Big[\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^m P(m\lambda - a)\Big]\frac{d_m}{m\lambda h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von 0 bis $m+1$, Rad O bei Verticale m,

$$(3) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \Big[\sum_0^m Pa + m\sum_m^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a)\Big]\frac{1}{m\lambda}.$$

Die Werthe der Summenausdrücke $\sum$ lassen sich aus der Tabelle in Beispiel 6 entnehmen oder ergeben sich wie in Beispiel 42. Bei Benutzung der Tabelle ist zu beachten, dass allgemein

$$\sum_c^v P(v-a) = \sum_c^l P(l-a) \text{ mit } l = v$$

ist. Wir erhalten unter Berücksichtigung von B. 51, 3) in Tonnen die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe für die erste Richtung des Zuges I:

$$X_1 = 24{,}22 + (7 \,.\, 30{,}2 + 1 \,.\, 535)\, \frac{3{,}16}{24} = 122{,}50$$

$$X_2 = 20{,}76 + (6 \,.\, 80{,}7 + 2 \,.\, 383)\, \frac{3{,}16}{48} = 103{,}06$$

$$X_3 = 17{,}30 + (5 \,.\, 144 + 3 \,.\, 271)\, \frac{3{,}16}{72} = 84{,}52$$

$$X_4 = 13{,}84 + (4 \,.\, 226 + 4 \,.\, 173)\, \frac{3{,}16}{96} = 65{,}73,$$

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_2 = -\frac{3}{3{,}16}\, 122{,}50 = -116{,}30$$

$$Z_3 = -\frac{3}{3{,}16}\, 103{,}06 = -97{,}85$$

$$Z_4 = -\frac{3}{3{,}16}\, 84{,}52 = -80{,}24,$$

und für die zweite Richtung des Zuges I:

$$X_1 = 24{,}22 + (7 \,.\, 10{,}2 + 1 \,.\, 630)\, \frac{3{,}16}{24} = 115{,}43$$

$$X_2 = 20{,}76 + (6 \,.\, 32{,}4 + 2 \,.\, 490)\, \frac{3{,}16}{48} = 98{,}15$$

$$X_3 = 17{,}30 + (5 \,.\, 89{,}4 + 3 \,.\, 348)\, \frac{3{,}16}{72} = 81{,}92$$

$$X_4 = 13{,}84 + (4 \,.\, 173 + 4 \,.\, 226)\, \frac{3{,}16}{96} = 65{,}73,$$

$$Z_1 = Z_2$$

$$Z_2 = -\frac{3}{3{,}16}\, 115{,}43 = -109{,}54$$

$$Z_3 = -\frac{3}{3{,}16}\, 95{,}26 = -93{,}14$$

$$Z_4 = -\frac{3}{3{,}16}\, 81{,}92 = -77{,}74.$$

Die oberen Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder ergeben sich für die erste Richtung des Zuges I:

$$D_2 = 3{,}46 + \frac{30{,}2 + 1 \,.\, 10{,}2}{6 \,.\, 1}\, 3{,}16 = 24{,}74$$

$$D_3 = 3{,}95 + \frac{80{,}7 + 2 \,.\, 10{,}2}{9 \,.\, 2}\, 3{,}61 = 24{,}23$$

$$D_4 = 4{,}64 + \frac{144 + 3 \,.\, 10{,}2}{12 \,.\, 3}\, 4{,}24 = 25{,}34,$$

$$V_1 = -1{,}59 - \frac{30{,}2 + 1\,.\,10{,}2}{3} = -15{,}06$$

$$V_2 = -2{,}68 - \frac{80{,}7 + 2\,.\,10{,}2}{6} = -19{,}53$$

$$V_3 = -3{,}78 - \frac{144 + 3\,.\,10{,}2}{9} = -23{,}18,$$

und für die zweite Richtung des Zuges I:

$$D_2 = 3{,}46 + \frac{10{,}2 + 1\,.\,30{,}2}{6\,.\,1}\,3{,}16 = 24{,}74$$

$$D_3 = 3{,}95 + \frac{32{,}4 + 2\,.\,30{,}2}{9\,.\,2}\,3{,}61 = 22{,}56$$

$$D_4 = 4{,}64 + \frac{89{,}4 + 3\,.\,30{,}2}{12\,.\,3}\,4{,}24 = 25{,}84,$$

$$V_1 = -1{,}59 - \frac{10{,}2 + 1\,.\,30{,}2}{3} = -15{,}06$$

$$V_2 = -2{,}68 - \frac{32{,}4 + 2\,.\,30{,}2}{6} = -18{,}15$$

$$V_3 = -3{,}78 - \frac{89{,}4 + 3\,.\,30{,}2}{9} = -23{,}78.$$

Es gelten überall die grössten der berechneten Werthe, und hätte auch hier die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung allein genügt. Schliesslich liefert B. 51, 2)

$$V_4 = 0{,}6 - \frac{65{,}73}{2{,}06} = -31{,}32 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 55 bestimmt.

Bemerkungen. Dass die Berechnung der Füllungsglieder auf Grund der Belastung durch Zug II im vorliegenden Falle weniger ungünstige Grenzwerthe als diejenige mit Zug I erwarten lasse, wurde schon in § 40 erwähnt. Nach § 33, 8) 12) mit $\varepsilon = \nu = m$ liefert jenes Vorgehen die oberen Grenzwerthe mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

(4) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{m\lambda h_{m-1}} \sum_0^{m-1} Pa,$$

und mit Zug II von 0 bis m, Vorderrad O bei Verticale m,

(5) $$V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{1}{m\lambda} \sum_0^m Pa.$$

Die Summenwerthe sind aus der Tabelle in Beispiel 6 zu entnehmen oder wie in Beispiel 42 zu berechnen. Man erhält damit in Tonnen:

$$D_2 = 3{,}46 + \frac{3{,}16 \cdot 30{,}6}{6 \cdot 1} = 19{,}58$$

$$D_3 = 3{,}95 + \frac{3{,}61 \cdot 93{,}4}{9 \cdot 2} = 22{,}68$$

$$D_4 = 4{,}64 + \frac{4{,}24 \cdot 170{,}4}{12 \cdot 3} = 24{,}71,$$

$$V_1 = -1{,}59 - \frac{30{,}6}{3} = -11{,}79$$

$$V_2 = -2{,}68 - \frac{93{,}4}{6} = -18{,}25$$

$$V_3 = -3{,}78 - \frac{170{,}4}{9} = -22{,}71,$$

während V_4 wie oben bestimmt bleibt.

Beispiel 53. Dreieckstràger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des Beispiels 51 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzwerthe wie mit den Radlastzügen des Beispiels 52 entstehen.

Bis zur Feststellung der oberen Grenzwerthe bleibt alles in Beispiel 51 Gegebene giltig. Im Weiteren ist nach Anleitung von Aufgabe 32 zu erfahren. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für einen durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem max M_x bei der Trägermitte entspricht, das heisst nach Beispiel 8 mit $p = 2{,}77$ tn. Da dieser Werth bereits in Beispiel 51 verwendet wurde, so könnten die dort berechneten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen beibehalten werden. Mit dem etwas nach oben abgerundeten $p = 2{,}8$ tn ergeben sich in Tonnen:

$X_1 = 117{,}13$ $X_2 = 100{,}40$ $X_3 = 83{,}66$ $X_4 = 66{,}93$
$Z_1 = Z_2$ $Z_2 = -111{,}18$ $Z_3 = -95{,}32$ $Z_4 = -79{,}41.$

Die oberen Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder sind ebenfalls nach den Formeln für gleichmässig vertheilte bewegte Last, jedoch mit demjenigen p zu berechnen, welches für einen durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite v dem max M_x bei der Trägermitte entspricht. Da nun nach § 39, 2) 4)

$$(1) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{m-1}{2} \frac{d_m}{h_{m-1}} p\lambda, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{m+1}{2} p\lambda,$$

und nach Aufgabe 32 oder § 31 für die Diagonalen $v = m\lambda$, für die Verticalen $v = (m + 1)\lambda$ sind, so erhalten wir mit Rücksicht auf die zweite Tabelle die oberen Grenzwerthe:

$$D_2 = 3{,}46 + \frac{1 \,.\, 3{,}16}{2}\, 3 \,.\, 4{,}49 = 24{,}74$$

$$D_3 = 3{,}95 + \frac{2 \,.\, 3{,}61}{4}\, 3 \,.\, 3{,}62 = 23{,}55$$

$$D_4 = 4{,}64 + \frac{3 \,.\, 4{,}24}{6}\, 3 \,.\, 3{,}14 = 24{,}61\,,$$

$$V_1 = -\,1{,}59 - 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 4{,}49 = -\,15{,}06$$
$$V_2 = -\,2{,}68 - 3 \,.\, 1{,}5 \,.\, 3{,}62 = -\,18{,}97$$
$$V_3 = -\,3{,}78 - 4 \,.\, 1{,}5 \,.\, 3{,}14 = -\,22{,}62 \text{ tn},$$

während V_4 wie in Beispiel 51 bleibt. Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 56 bestimmt.

Bemerkungen. Zur Berechnung mit den Lastäquivalenten für Zug II hätten wir nach A. 32, 1) 2) 3) 5) wegen $\varepsilon = v = m$ die oberen Grenzwerthe

$$(2) \quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{\lambda\, d_m}{2\, h_{m-1}} \dfrac{(m-1)^2}{m}\, p_c & \text{mit} \quad c = (m-1)\lambda, \\[2ex] V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{m\lambda}{2}\, p_c & \text{mit} \quad c = m\lambda, \end{cases}$$

worin p_c das Lastäquivalent zur Berechnung des neg max V_x im Querschnitte $x = c$ eines durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Trägers bedeutet. Wir erhalten aus 2) mit Rücksicht auf die erste Tabelle in Beispiel 8:

$$D_2 = 3{,}46 + \frac{3 \,.\, 3{,}16 \,.\, 1}{2 \,.\, 2}\, 6{,}80 = 19{,}58$$

$$D_3 = 3{,}95 + \frac{3 \,.\, 3{,}61 \,.\, 4}{4 \,.\, 3}\, 5{,}19 = 22{,}68$$

$$D_4 = 4{,}64 + \frac{3 \,.\, 4{,}24 \,.\, 9}{6 \,.\, 4}\, 4{,}21 = 24{,}72\,,$$

$$V_1 = -\,1{,}59 - 1{,}5 \,.\, 6{,}80 = -\,11{,}79$$
$$V_2 = -\,2{,}68 - 3 \,.\, 5{,}19 = -\,18{,}25$$
$$V_3 = -\,3{,}78 - 4{,}5 \,.\, 4{,}21 = -\,22{,}72 \text{ tn}.$$

V_4 bleibt wie in Beispiel 51 bestimmt. Während vorstehende Grenzwerthe vollständig mit den im vorigen Beispiel für Zug II berechneten übereinstimmen müssen, brauchen die oben ermittelten den mit Zug I erhaltenen nur angenähert zu entsprechen.

Beispiel 54. Parabelträger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Ein Balkenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen von $l = 24$ m Spannweite soll mit parabolischem Obergurt und horizontalem Untergurt hergestellt werden. Gewünschte Trägerhöhe in der Mitte $h = 3{,}2$ m, Felderzahl $n = 8$. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}73$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}77$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,53 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und 0,2 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen.

Formberechnung. Wir wählen die in Fig. 100 ersichtlichen Stellungen der Diagonalen, womit Letztere kürzer als bei den sonst möglichen Stellungen werden und demgemäss auch die Beanspruchungen geringer ausfallen (§§ 41, 42). Nach § 17, 20) und § 16, 1) 15) 14) erhält man mit $f = h = 3{,}2$ m, $\lambda = 3$ m

für	$m =$ 1	2	3	4:
$h_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2} =$	1,4	2,4	3	3,2 m
$v = \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	2,4	5	16
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$	3,31	3,16	3,06	3,01 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$	3	3,31	3,84	4,24 m,

während $z_m = \lambda = 3$ m ist.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte liefert § 41 bei oben liegender X-Gurtung

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\frac{ngl}{8f}x_m, & \mathfrak{Z}_m = \frac{gl^2}{8f}, \\ \mathfrak{D}_m = 0, & \mathfrak{V}_m = g_x\lambda. \end{cases}$$

Der Ausdruck von $\mathfrak{V}_m$ gilt auch für die mittlere Verticale, wie aus der Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den mittleren Knotenpunkt des Untergurts mit Rücksicht auf $\mathfrak{D}_m = 0$ oder aus A. 28, 5) mit $\Delta = h_m - h_{m-1} = \frac{4h}{n^2}$ folgt. Uebrigens lässt sich $\mathfrak{V}_4$ auch aus der für beliebige Belastung gültigen Gleichung (vgl. A. 28, 1))

$$(2)\qquad V_4 + g_x\lambda + 2X_4\frac{0{,}2}{3{,}01} = 0$$

berechnen. Wir erhalten nun mit den gegebenen Zahlenwerthen und $g_x = 0{,}2,\ g_s = 0{,}53$ in Tonnen:

$$\mathfrak{X}_1 = -18{,}12 \qquad \mathfrak{X}_2 = -17{,}30$$
$$\mathfrak{X}_3 = -16{,}75 \qquad \mathfrak{X}_4 = -16{,}48,$$
$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_4 = 16{,}43,$$
$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_3 = \mathfrak{V}_4 = 1{,}59.$$

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stützenreactionen sind bei beliebiger Form und beliebigem System

$$\mathfrak{V} = \frac{g l}{2} = 8{,}76 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen hat man nach § 42, 8)

$$(3) \qquad X_m = \frac{q}{g} \mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g} \mathfrak{Z}_m,$$

also wegen $q : g = 3{,}5 : 0{,}73 = 4{,}794$ in Tonnen:

$$X_1 = -86{,}87 \qquad X_2 = -82{,}94$$
$$X_3 = -80{,}30 \qquad X_4 = -79{,}01,$$
$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 78{,}76.$$

Für die beiden Grenzbeanspruchungen der Diagonalen ergeben § 42, 3)

$$(4) \qquad D_m = \frac{n}{n+1} \frac{p l}{8 f} d_m, \qquad D_m = -\frac{n}{n+1} \frac{p l}{8 f} d_m,$$

und nach Einsetzen der Zahlenwerthe, in Tonnen:

$$D_2 = \pm 7{,}64 \qquad D_3 = \pm 8{,}86 \qquad D_4 = \pm 9{,}79.$$

Die beiden Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind nach § 42, 5)

$$(5) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{(m-1)\,(n-m-1)^2}{(n-m)\,n-m+1} \dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] V_m = \mathfrak{V}_m + (n-m+1) \dfrac{(n-m)\,(m+1)-m+1}{(n-m)\,n-m+1} \dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Eine Ausnahme macht die mittlere Verticale, welche nach 2) berechnet werden kann, für die aber auch aus A. 28, 7) mit dem oben angeführten Δ als Grenzwerthe folgen

$$(6) \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + p\lambda.$$

Wir erhalten nach 5) 6) in Tonnen:

$$V_1 = 1{,}59 - \frac{0 \cdot 36}{56} 4{,}155 = 1{,}59 \qquad V_1 = 1{,}59 + \frac{8 \cdot 14}{56} 4{,}155 = 9{,}00$$

$$V_2 = 1{,}59 - \frac{1 \cdot 25}{47} 4{,}155 = -0{,}62 \qquad V_2 = 1{,}59 + \frac{7 \cdot 17}{47} 4{,}155 = 12{,}11$$

$V_3 = 1{,}59 - \frac{2 \cdot 16}{38} 4{,}155 = -1{,}91 \qquad V_3 = 1{,}59 + \frac{6 \cdot 18}{38} 4{,}155 = 13{,}40$

$V_4 = 1{,}59 \qquad V_4 = 1{,}59 + 2{,}77 \cdot 3 = 9{,}90.$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind bei beliebigem System

$$V = \mathfrak{V} = 8{,}76 \text{ tn}, \qquad V = \frac{ql}{2} = 42 \text{ tn}.$$

Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 72.

Beispiel 55. Parabelträger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles im vorigen Beispiele Gesagte gültig. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind die dort berechneten Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein. Die weitere Berechnung erfolgt nach den für beliebige Gurtungsformen gültigen Gleichungen des § 33 ganz wie in Beispiel 36. Wir erhalten also mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 (oder bei Berechnung der $\sum$ wie in Beispiel 42) die oberen Grenzbeanspruchungen des Obergurts nach B. 36, 1) 2)

$$X_1 = -18{,}12 - (7 \cdot 30{,}2 + 1 \cdot 535) \frac{3{,}31}{24 \cdot 1{,}4} = -91{,}65 \text{ tn } (-87{,}22)$$

$$X_2 = -17{,}30 - (6 \cdot 80{,}7 + 2 \cdot 383) \frac{3{,}16}{24 \cdot 2{,}4} = -86{,}25 \text{ ,, } (-81{,}73)$$

$$X_3 = -16{,}75 - (5 \cdot 144 + 3 \cdot 271) \frac{3{,}06}{24 \cdot 3} = -80{,}57 \text{ ,, } (-80{,}12)$$

$$X_4 = -16{,}48 - (4 \cdot 226 + 4 \cdot 173) \frac{3{,}01}{24 \cdot 3{,}2} = -79{,}03 \text{ ,, } (-79{,}03),$$

die oberen Grenzbeanspruchungen des Untergurts nach B. 36, 1) 3) und B. 35, 4)

$$Z_1 = Z_2 = 16{,}43 + (7 \cdot 30{,}2 + 1 \cdot 533) \frac{1}{8 \cdot 1{,}4} = 83{,}07 \text{ tn } (79{,}05)$$

$$Z_3 = 16{,}43 + (6 \cdot 80{,}7 + 2 \cdot 383) \frac{1}{8 \cdot 2{,}4} = 81{,}89 \text{ ,, } (77{,}60)$$

$$Z_4 = 16{,}43 + (5 \cdot 144 + 3 \cdot 271) \frac{1}{8 \cdot 3} = 80{,}30 \text{ ,, } (78{,}56).$$

Vorstehende Ansätze beziehen sich auf die erste Richtung des Zuges I,

während die Resultate für die zweite Richtung in Klammern beigefügt sind. Wie man sieht hätte auch hier die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung allein genügt. Weiter ergeben sich in Tonnen die beiden Grenzbeanspruchungen der Diagonalen nach B. 36, 4) 5):

$$D_2 = \frac{3{,}31 \cdot 0{,}4 \cdot 529}{1{,}4 \cdot 2{,}4 \cdot 24} = 8{,}67 \qquad D_2 = -\frac{3{,}31 \cdot 8{,}4 \cdot 30{,}6}{1{,}4 \cdot 2{,}4 \cdot 24} = -10{,}55$$

$$D_3 = \frac{3{,}84 \cdot 2 \cdot 382}{2{,}4 \cdot 5 \cdot 24} = 10{,}19 \qquad D_3 = -\frac{3{,}84 \cdot 10 \cdot 93{,}4}{2{,}4 \cdot 5 \cdot 24} = -12{,}45$$

$$D_4 = \frac{4{,}24 \cdot 12 \cdot 257}{3 \cdot 16 \cdot 24} = 11{,}35 \qquad D_4 = -\frac{4{,}24 \cdot 20 \cdot 170}{3 \cdot 16 \cdot 24} = -12{,}54,$$

und beide Grenzbeanspruchungen der Verticalen B. 36, 6) 7):

$$V_1 = 1{,}59 - \frac{0 \cdot 529}{1 \cdot 24} = 1{,}59 \qquad V_1 = 1{,}59 + \frac{8 \cdot 30{,}6}{1 \cdot 24} = 11{,}79$$

$$V_2 = 1{,}59 - \frac{0{,}4 \cdot 382}{2{,}4 \cdot 24} = -1{,}06 \qquad V_2 = 1{,}59 + \frac{8{,}4 \cdot 93{,}4}{2{,}4 \cdot 24} = 15{,}21$$

$$V_3 = 1{,}59 - \frac{2 \cdot 257}{5 \cdot 24} = -2{,}69 \qquad V_3 = 1{,}59 + \frac{10 \cdot 170}{5 \cdot 24} = 15{,}79.$$

Eine Ausnahme macht die mittlere Verticale, deren Grenzbeanspruchungen nach B. 54, 2):

$$V_4 = \mathfrak{V}_4 = 1{,}59 \qquad V_4 = \frac{0{,}4}{3{,}01}\, 91{,}65 - 0{,}6 = 11{,}58 \text{ tn}.$$

Wie in Beispiel 36 so kann auch hier mit Zug I ein grösseres V_1 als vorstehend mit Zug II erreicht werden. Wir erhalten, wenn Zug I mit Rad O bei Verticale 1 steht (Fig. 101),

$$V_1 = K_u = 1{,}59 + 6 + 2 \cdot 6\,\frac{1{,}7}{3} + 4\,\frac{0{,}5}{3} = 15{,}06 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreaction ergeben sich wie bei beliebiger Form und beliebigem System (Beispiele 27, 42)

$$V = \mathfrak{V} = 8{,}76 \text{ tn},$$

$$V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P\,(l - a) = 8{,}76 + \frac{870}{24} = 45{,}01 \text{ tn}.$$

Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 72.

Aufgabe 35. Parabelträger einfachen Systems mit Verticalen. Anwendung von Lastäquivalenten.

Die in Aufgabe 32 gegebenen Formeln für Parabelträger einfachen Systems mit Verticalen zu spezialisiren.

Da nach § 17, 20)—22) für Parabelträger

$$h_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2},$$

$$\varepsilon = \frac{m(n-m)}{n-2m+1}, \qquad v = \frac{m(n-m)}{n-2m+\omega},$$

so folgen aus A. 32, 1) die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen, mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(1) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \dfrac{l d_m}{8f}\,\dfrac{n-m}{n-m+1}\,p_v, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \dfrac{l d_m}{8f}\,\dfrac{m-1}{m}\,p_c, \end{cases}$$

und nach A. 32, 3) die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift, mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(2) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{\lambda}{2n}(m-\omega)(n-m)\,p_v, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{\lambda}{2n}\,\dfrac{n-m+\omega}{m}(m-1)^2 p_c, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift, mit $c = m\lambda$, $v = (m+1)\lambda$,

$$(3) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{\lambda}{2n}\,\dfrac{m-\omega}{n-m}(n-m-1)^2 p_v, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{\lambda}{2n}\,m(n-m+\omega)\,p_c. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Werthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Werthe b).

In vorstehenden Gleichungen bezeichnen p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente, welche für einen durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem pos max V_x bei $x = v$ bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen. Die Gleichungen müssen genau dieselben Grenzwerthe wie die Berechnung mit Zug II selbst ergeben. Speziell für horizontale X-Gurtung, horizontale Z-Gurtung und zu einer Horizontale symmetrische Gurtungen hat man nach § 17 bezw. $\omega = -1$, $\omega = 1$ und $\omega = 0$. Bezüglich der Gurtungskräfte bleibt es bei dem in Aufgabe 32 Gesagten und auch bezüglich abweichender Berechnung von V_1 ist dort das Nöthige gegeben.

Beispiel 56. Parabelträger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Träger des Beispiels 54 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den bewegten Radlastzügen des vorigen Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles in Beispiel 54 Gegebene gültig. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind wie dort mit constantem p zu berechnen, und zwar hat man wie für die max M_x eines durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 24 m zu setzen $p = 2{,}77$ tn (Beispiel 8). Da diese Annahme bereits in Beispiel 54 gemacht wurde, so könnten die dort erhaltenen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen beibehalten werden. Mit dem etwas nach oben abgerundeten $p = 2{,}8$ ergeben sich in Tonnen:

$$X_1 = -87{,}63 \qquad X_2 = -83{,}66$$
$$X_3 = -81{,}00 \qquad X_4 = -79{,}70$$
$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 79{,}46.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder könnten nach den in Aufgabe 32 für beliebige Gurtungsformen gegebenen Gleichungen berechnet werden. Da dieselben jedoch schon in Beispiel 37 verwendet wurden, so wollen wir hier von den speziell für Parabelträger gültigen Formeln der letzten Aufgabe ausgehen. Es sind danach die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen, mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(1) \qquad \begin{cases} D_m = \dfrac{l\,d_m}{8f}\,\dfrac{n-m}{n-m+1}\,p_v, \\[2ex] D_m = -\dfrac{l\,d_m}{8f}\,\dfrac{m-1}{m}\,p_c, \end{cases}$$

die Grenzbeanspruchungen der Verticalen, mit $c = m\lambda$, $v = (m+1)\lambda$,

$$(2) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{\lambda}{2n}\,\dfrac{m-1}{n-m}\,(n-m-1)^2\,p_v, \\[2ex] V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{\lambda}{2n}\,m\,(n-m+1)\,p_c. \end{cases}$$

Die Lastäquivalente p_c, p_v lassen sich aus der ersten Tabelle des Beispiels 8 entnehmen und wir erhalten damit folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$D_2 = \frac{3\,.\,3{,}31\,.\,6}{3{,}2\,.\,7}\,3{,}25 = 8{,}65 \qquad D_2 = -\frac{3\,.\,3{,}31\,.\,1}{3{,}2\,.\,2}\,6{,}80 = -10{,}55$$

$$D_3 = \frac{3\,.\,3{,}84\,.\,5}{3{,}2\,.\,6}\,3{,}39 = 10{,}17 \qquad D_3 = -\frac{3\,.\,3{,}84\,.\,2}{3{,}2\,.\,3}\,5{,}19 = -12{,}46$$

$$D_4 = \frac{3\,.\,4{,}24\,.\,4}{3{,}2\,.\,5}\,3{,}57 = 11{,}35 \qquad D_4 = -\frac{3\,.\,4{,}24\,.\,3}{3{,}2\,.\,4}\,4{,}21 = -12{,}55,$$

$$V_1 = 1{,}59 - \frac{3\,.\,0\,.\,36}{16\,.\,7}\,3{,}25 = 1{,}59$$

$$V_2 = 1{,}59 - \frac{3\,.\,1\,.\,25}{16\,.\,6}\,3{,}39 = -1{,}06$$

$$V_3 = 1{,}59 - \frac{3\,.\,2\,.\,16}{16\,.\,5}\,3{,}57 = -2{,}69,$$

$$V_1 = 1{,}59 + \frac{3\,.\,1\,.\,8}{16}\,6{,}80 = 11{,}79$$

$$V_2 = 1{,}59 + \frac{3\,.\,2\,.\,7}{16}\,5{,}19 = 15{,}21$$

$$V_3 = 1{,}59 + \frac{3\,.\,3\,.\,6}{16}\,4{,}21 = 15{,}80.$$

Wie im vorigen Beispiele mit Zug I ein grösseres V_1 als mit Zug II erreichbar war, so gilt Analoges für die entsprechenden Lastäquivalente. Man erhält ganz wie in Beispiel 37 vorgehend mit demjenigen p, welches dem max M_x eines vollwandigen Trägers der Spannweite $v = 6$ bei der Trägermitte entspricht,

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 + p\lambda = 1{,}59 + 4{,}49\,.\,3 = 15{,}06 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe von V_4 bleiben wie in Beispiel 54 bestimmt, und für die Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man wie bei beliebiger Form und beliebigem System (Beispiele 29, 43)

$$V = \mathfrak{V} = 8{,}76 \text{ tn},$$

$$\overline{V} = \mathfrak{V} + \frac{p_v l}{2} = 8{,}76 + 3{,}02\,.\,12 = 45 \text{ tn}.$$

Vorstehende Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder stimmen genau mit den in Beispiel 55 für bewegte Radlastzüge berechneten überein. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 72.

Beispiel 57. Parabelsichelträger (Dachbinder) einfachen Systems mit Verticalen. Grenzwerthe der Stabkräfte mit Rücksicht auf schiefen Winddruck.

Für einen sichelförmigen Dachbinder mit parabolischen Gurtungen seien gegeben: Spannweite $l = 32$ m, Felderzahl $n = 8$, Höhe

der mittleren Knotenpunkte des Obergurts und Untergurts über den Auflagern 8 m und 4 m, also Trägerhöhe in der Mitte $h = f = 4$ m; feste Last per laufenden Meter Träger $g = 0{,}5$ tn, wovon 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,1 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. Der Schneedruck, welcher auf beliebige Theile der Dachfläche wirkend gelten soll, ist mit $p = 0{,}35$ tn per laufenden Meter Träger in Rechnung zu ziehen. Winddruck per qm normal getroffener Fläche 150 kg, Windrichtung um 10^0 gegen die Horizontale fallend, parallel der Trägerebene. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen, wenn einmal die dem festen Auflager anliegende, einmal die davon abstehende Dachfläche vom Winde getroffen angenommen wird.

Formberechnung. Der Ursprung der Coordinaten werde in das feste Auflagergelenke und die Abscissenaxe wie immer horizontal gelegt. Nach §§ 16, 17 hat man mit $n = 8$, $\lambda = 4$, $f_x = 8$, $f_z = 4$ und

$$\omega = \frac{f_x + f_z}{f_x - f_z} = 3$$

die Ordinaten der Knotenpunkte m in X-Gurtung und Z-Gurtung, die Länge der $m$ten Verticale, die Werthe ε, ν und die Stablängen im $m$ten Felde (Fig. 102)

für $m =$	1	2	3	4:
$\mathfrak{x}_m = m(n-m)\frac{4 f_x}{n^2} =$	3,5	6	7,5	8 m
$\mathfrak{z}_m = m(n-m)\frac{4 f_z}{n^2} =$	1,75	3	3,75	4 m
$h_m = \mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m =$	1,75	3	3,75	4 m
$\varepsilon = \frac{m(n-m)}{n-2m+1} =$	1	2,4	5	16
$\nu = \frac{m(n-m)}{n-2m+\omega} =$	0,78	1,71	3	5,33
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1})^2} =$	5,32	4,72	4,27	4,03 m
$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1})^2} =$	4,37	4,19	4,07	4,01 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_m)^2} =$	4,37	4,07	4,59	5,32 m.

Eigengewicht allein. Die von der festen Last allein herrührenden Stabkräfte sind nach § 41, 5)

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\frac{ngl}{8f} x_m, & \mathfrak{Z}_m = \frac{ngl}{8f} z_m, \\ \mathfrak{D}_m = 0, & \mathfrak{V}_m = (\omega g - g_x + g_z) \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

Eine Ausnahme macht die mittlere Verticale, für welche nach A. 28, 5) mit $\Delta = \mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_{\sigma-1} = 0{,}5$

$$(2) \quad \mathfrak{V}_\sigma = \left(\frac{gn^2}{4h} \Delta - g_x\right) \lambda.$$

Diese Gleichungen liefern mit Rücksicht auf $g_x = 0{,}4$, $g_z = 0{,}1$ und die sonst gegebenen und oben berechneten Zahlenwerthe in Tonnen:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{X}_1 = -21{,}28 & \mathfrak{Z}_1 = 17{,}48 & \mathfrak{V}_1 = 2{,}4 \\ \mathfrak{X}_2 = -18{,}88 & \mathfrak{Z}_2 = 16{,}76 & \mathfrak{V}_2 = 2{,}4 \\ \mathfrak{X}_3 = -17{,}08 & \mathfrak{Z}_3 = 16{,}28 & \mathfrak{V}_3 = 2{,}4 \\ \mathfrak{X}_4 = -16{,}12 & \mathfrak{Z}_4 = 16{,}04 & \mathfrak{V}_4 = 2{,}4. \end{array}$$

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stützenreactionen sind

$$\mathfrak{V} = \frac{gl}{2} = 6 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe ohne Winddruck. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen Grenzwerthe hat man nach § 42, 8)

$$(3) \quad X_m = \frac{q}{g} \mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g} \mathfrak{Z}_m,$$

also wegen $q : g = 0{,}85 : 0{,}5 = 1{,}7$ in Tonnen:

$$\begin{array}{ll} X_1 = -36{,}18 & Z_1 = 29{,}72 \\ X_2 = -32{,}10 & Z_2 = 28{,}49 \\ X_3 = -29{,}04 & Z_3 = 27{,}68 \\ X_4 = -27{,}40 & Z_4 = 27{,}27. \end{array}$$

Die beiden Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind nach § 42, 9)

$$(4) \quad D_m = \frac{n}{n+1} \frac{pl}{8f} d_m, \qquad D_m = -\frac{n}{n+1} \frac{pl}{8f} d_m,$$

und mit den bekannten Zahlenwerthen

$$D_2 = \pm 0{,}63 \qquad D_3 = \pm 0{,}71 \qquad D_4 = \pm 0{,}83.$$

Da für die drei ersten Verticalen $m - \nu$ zwischen 0 und n liegt, so liefert § 42, 7) als Grenzbeanspruchungen derselben

$$(5) \quad V_m = \mathfrak{V}_m + (\omega - 1 + m) \frac{p\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m.$$

Für die mittlere Verticale hat man wegen $\sigma\Delta < h$ nach A. 28, 8)

(6) $$V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma + (\sigma - 1)\frac{\Delta}{h}\frac{pl}{2}, \qquad V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma - \left(1 - \frac{\sigma\Delta}{h}\right)p\lambda.$$

Nach diesen Gleichungen erhalten wir folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$V_1 = 4{,}5 \qquad V_2 = 5{,}2 \qquad V_3 = 5{,}9 \qquad V_4 = 2{,}66$$
$$\mathfrak{B}_1 = 2{,}4 \qquad \mathfrak{B}_2 = 2{,}4 \qquad \mathfrak{B}_3 = 2{,}4 \qquad \mathfrak{B}_4 = 1{,}7.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind

$$V = \frac{ql}{2} = 10{,}2 \text{ tn}, \qquad V = \mathfrak{B} = 6 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe mit Winddruck. Die vom Winddrucke allein herrührenden Stabkräfte sind im nächsten Beispiele berechnet. Die Grenzwerthe der Stabkräfte im Ganzen ergeben sich in gleicher Weise wie in den Beispielen 21, 22, 39 durch Combination der Grenzwerthe ohne Winddruck mit den Beanspruchungen durch Winddruck zu den äusserst möglichen Werthen, wie aus der nebenstehenden Tabelle zu ersehen ist.

In den beiden letzten Columnen der Tabelle sind diejenigen Grenzwerthe angeführt, welche sich, ganz wie oben ohne Rücksicht auf Winddruck, ergeben hätten, wenn vom Winddrucke nur die Verticalcomponente

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{n}}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{w}\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\mathfrak{x}_\sigma}{l}$$

per qm. Dachfläche berücksichtigt worden wäre (vgl. am Schlusse von Beispiel 21). Wegen $\mathfrak{x}_\sigma = 8$ m, $\beta = 10^0$, $\mathfrak{w} = 150$ kg hätten wir gehabt $\mathfrak{v} = 59{,}5$ tn und zur Berechnung der Grenzwerthe statt der obigen $p = 0{,}35$ bei 4 m Binderweite

$$p = 0{,}35 + 4\,\frac{\mathfrak{v}\,.\,4{,}47}{\lambda} = 0{,}35 + 0{,}27 = 0{,}6 \text{ tn},$$

also $q : g = 1{,}1 : 0{,}5 = 2{,}2$. Der Winddruck wird dabei wie der Schneedruck auf beliebige Theile der Dachfläche wirksam angenommen.

Beispiel 58. Dachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Einfluss schiefen Winddrucks.

Den Einfluss des Winddrucks auf die Stabkräfte des im vorigen Beispiele behandelten Dachbinders unter folgenden Voraussetzungen zu berechnen. Binderweite $b = 4$ m, Winddruck bei normal getroffener Fläche $\mathfrak{w} = 150$ kg per qm, Windrichtung um $\beta = 10^0$ gegen die Horizontale fallend, parallel der Trägerebene. Es ist einmal die

	Grenzwerthe ohne Winddruck		Einfluss des Winddrucks				Grenzwerthe im Ganzen				Siehe Bem. im Text.	
			I. Binderhälfte		II. Binderhälfte		I. Binderhälfte		II. Binderhälfte			
X_1	— 21,28	— 36,18	2,32	— 6,11	— 1,64	— 2,16	— 18,96	— 42,29	— 21,28	— 38,34	— 21,28	— 46,82
X_2	— 18,88	— 32,10	2,13	— 4,53	— 0,56	— 2,23	— 16,75	— 36,63	— 18,88	— 34,33	— 18,88	— 41,54
X_3	— 17,08	— 29,04	1,17	— 3,46	0,13	— 2,42	— 15,91	— 32,50	— 16,95	— 31,46	— 17,08	— 37,58
X_4	— 16,12	— 27,40	0,53	— 2,76	0,63	— 2,86	— 15,59	— 30,16	— 15,49	— 30,26	— 16,12	— 35,46
Z_1	29,72	17,48	7,89	— 5,57	1,17	0,55	37,61	11,91	31,49	17,48	38,46	17,48
Z_2	28,49	16,76	7,57	— 5,34	1,70	0,53	36,06	11,42	30,19	16,76	36,87	16,76
Z_3	27,68	16,28	5,28	— 4,91	1,92	— 1,55	32,96	11,37	29,60	14,73	35,82	16,28
Z_4	27,27	16,04	3,76	— 4,64	2,27	— 2,97	31,03	11,40	29,54	13,07	35,29	16,04
D_2	0,63	— 0,63	0,28	— 0,21	0,28	— 0,21	0,91	— 0,84	0,91	— 0,84	1,09	— 1,09
D_3	0,71	— 0,71	0,43	— 1,65	0,43	— 1,65	1,14	— 2,36	1,14	— 2,36	1,22	— 1,22
D_4	0,83	— 0,83	0,75	— 1,22	0,75	— 1,22	1,58	— 2,05	1,58	— 2,05	1,42	— 1,42
V_1	4,50	2,40	0,89	— 0,63	0,20	0,06	5,39	1,77	4,70	2,40	6,00	2,40
V_2	5,20	2,40	2,80	— 1,98	0,70	0,12	8,00	0,42	5,90	2,40	7,20	2,40
V_3	5,90	2,40	1,55	— 0,84	0,71	0	7,45	1,56	6,61	2,40	8,40	2,40
V_4	2,66	1,70	0,68	— 0,16	0,68	— 0,16	3,34	1,54	3,34	1,54	2,85	2,40
V, V'	10,20	6,00	1,50	0,71	1,50	0,71	11,70	6,00	11,70	6,00	13,20	6,00
H	0	0	3,36	— 3,36	0	0	3,36	— 3,36	0	0	0	0

dem festen Auflager anliegende, einmal die davon abliegende Dachhälfte vom Winde getroffen anzunehmen.

Knotenpunktskräfte. Für eine Ebene, welche den Winkel α mit der Horizontalen bildet (Fig. 53), hat man nach Beispiel 21 den für die Berechnung allein in Betracht kommenden Normaldruck des Windes per qm

(1) $$\mathfrak{n} = \mathfrak{w} \sin^2 (\alpha + \beta).$$

Der Normaldruck auf den dem $m$ten Binderfeld entsprechenden Theil der getroffenen Dachfläche ist bei einer Binderweite b

$$\mathfrak{n} b x_m,$$

dessen Horizontalcomponente

$$\mathfrak{n} b x_m \frac{\lambda}{x_m} = \mathfrak{n} b \lambda,$$

und seine Verticalcomponente

$$\mathfrak{n} b x_m \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}}{x_m} = \mathfrak{n} b (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}).$$

Wir erhalten nun mit $\mathfrak{w} = 150$, $\beta = 10$, $b = 4$, $\lambda = 4$ und den im vorigen Beispiele gegebenen $\mathfrak{x}$ (Fig. 103)

für				
$m =$	1	2	3	4:
$\lambda \operatorname{tg} \alpha = \mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1} =$	3,5	2,5	1,5	0,5 m
$\alpha =$	41° 11′	32° 0′	20° 33′	7° 8′
$\mathfrak{n} =$	91,06	67,16	38,75	12,49 kg
$\mathfrak{n} b \lambda =$	1457	1075	620	200 kg
$\mathfrak{n} b (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) =$	1275	672	232	25 kg,

und hiernach die horizontalen und verticalen Knotenpunktskräfte der vom Winde getroffenen Binderhälfte in Kilogrammen:

$$L_0 = \frac{1}{2}\, 1457 = 728 \qquad K_0 = \frac{1}{2}\, 1275 = 637$$

$$L_1 = \frac{1}{2} (1457 + 1075) = 1275 \qquad K_1 = \frac{1}{2} (1275 + 672) = 973$$

$$L_2 = \frac{1}{2} (1075 + 620) = 847 \qquad K_2 = \frac{1}{2} (672 + 232) = 452$$

$$L_3 = \frac{1}{2} (620 + 200) = 410 \qquad K_3 = \frac{1}{2} (232 + 25) = 129$$

$$L_4 = \frac{1}{2}\, 200 = 100 \qquad K_4 = \frac{1}{2}\, 25 = 13.$$

Die weitere Berechnung erfolgt ganz wie in Beispiel 40.

Beanspruchungen. Greifen am Träger zwischen den Schnitten 0 und s beliebige Verticalkräfte K bei Abscissen e und beliebige Horizontalkräfte L bei Ordinaten c an, so hat man nach A. 5, 1) das Moment der äussern Kräfte links von s hinsichtlich irgend eines Drehpunkts der Coordinaten u, w

$$(2) \qquad M_s = Vu - Hw - \sum_0^s K(u-e) - \sum_0^s L(w-c),$$

worin die letzte Summe das negative Vorzeichen erhielt, weil wir hier von links nach rechts wirkende L als positiv ansehen wollen. Wird der Schnitt s für X_m, D_m, Z_m durch x_m, d_m, z_m, und für V_m durch x_m, h_m, z_{m+1} gelegt, so hat man nach § 16, 3)—6) bei oben liegender X-Gurtung:

$$(3) \quad \begin{cases} X_m = -M_s \dfrac{x_m}{\lambda h_m} & \text{mit } u = m\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_m, \\ Z_m = M_s \dfrac{z_m}{\lambda h_{m-1}} & \text{,,} \quad u = (m-1)\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_{m-1}, \\ D_m = -M_s \dfrac{d_m}{\lambda \varepsilon h_{m-1}} & \text{,,} \quad u = (m-\varepsilon)\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_m - \varepsilon(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}), \\ V_m = M_s \dfrac{1}{\lambda \nu} & \text{,,} \quad u = (m-\nu)\lambda, \quad w = \mathfrak{z}_m - \nu(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}). \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern für Z_1, D_1 wegen $h_0 = 0$ und mit Rücksicht auf die Werthe von u, v den unbestimmten Ausdruck 0 : 0, doch ergibt die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Untergurts für die ganze Beanspruchung des unteren Gurtungsstabes 1 allgemein

$$(4) \qquad \frac{Z_1}{z_1} = \frac{Z_2}{z_2}.$$

Für die mittlere Verticale hat der vorstehende Ausdruck von V_m keine Gültigkeit.

Nach 3) ergeben sich mit Rücksicht auf die Formberechnung in Beispiel 57 folgende Coordinaten des Momentendrehpunkts.

Im Falle	$m =$	1	2	3	4:
für X_m	$u =$	4	8	12	16
	$w =$	1,75	3	3,75	4
„ Z_m	$u =$	0	4	8	12
	$w =$	0	3,5	6	7,5.

Im Falle	$m =$	1	2	3	4:
für D_m	$u =$	0	$-1,6$	-8	-48
	$w =$	0	0	0	0
„ V_m	$u =$	0,88	1,16	0	
	$w =$	0,77	1,72	3.	

Mit diesen Werthen liefern die Gleichungen 2)—4) bei beliebigen Knotenpunktskräften K, L für die erste Trägerhälfte die Beanspruchungen des Obergurts:

$$X_1 = -(4V - 1,75H - 4K_0 - 1,75L_0)\frac{5,32}{4 \cdot 1,75},$$

$$X_2 = -(8V - 3H - 8K_0 - 4K_1 - 3L_0 + 0,5L_1)\frac{4,72}{4 \cdot 3},$$

$$X_3 = -(12V - 3,75H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 3,75L_0 \\ - 0,25L_1 + 2,25L_2)\frac{4,27}{4 \cdot 3,75},$$

$$X_4 = -(16V - 4H - 16K_0 - 12K_1 - 8K_2 - 4K_3 - 4L_0 \\ - 0,5L_1 + 2L_2 + 3,5L_3)\frac{4,03}{4 \cdot 4},$$

die Beanspruchungen des Untergurts:

$$Z_2 = (4V - 3,5H - 4K_0 - 3,5L_0)\frac{4,19}{4 \cdot 1,75} = \frac{4,19}{4,37}Z_1,$$

$$Z_3 = (8V - 6H - 8K_0 - 4K_1 - 6L_0 - 2,5L_1)\frac{4,07}{4 \cdot 3},$$

$$Z_4 = (12V - 7,5H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 7,5L_0 - 4L_1 \\ - 1,5L_2)\frac{4,01}{4 \cdot 3,75},$$

die Beanspruchungen der Diagonalen:

$$D_2 = -(-1,6V - 0H + 1,6K_0 + 5,6K_1 - 0L_0 + 3,5L_1)\frac{4,07}{4 \cdot 2,4 \cdot 1,75},$$

$$D_3 = -(-8V - 0H + 8K_0 + 12K_1 + 16K_2 - 0L_0 + 3,5L_1 \\ + 6L_2)\frac{4,59}{4 \cdot 5 \cdot 3},$$

$$D_4 = -(-48V - 0H + 48K_0 + 52K_1 + 56K_2 + 60K_3 \\ - 0L_0 + 3,5L_1 + 6L_2 + 7,5L_3)\frac{5,32}{4 \cdot 16 \cdot 3,75},$$

und die Beanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = (0,88V - 0,77H - 0,88K_0 - 0,77L_0)\frac{1}{4 \cdot 0,78},$$

$$V_2 = (1{,}16\,V - 4{,}27\,H - 1{,}16\,K_0 + 2{,}84\,K_1 - 1{,}72\,L_0 + 1{,}78\,L_1)\,\frac{1}{4\,.\,1{,}71},$$

$$V_3 = (0\,V - 3\,H - 0\,K_0 + 4\,K_1 + 8\,K_2 - 3\,L_0 + 0{,}5\,L_1 + 3\,L_2)\,\frac{1}{4\,.\,3}.$$

Denkt man sich den Träger um die mittlere Verticale gedreht bis die Auflager vertauscht sind, so erkennt man, dass vorstehende Gleichungen auch für die zweite Trägerhälfte gelten, wenn V' und 0 für V und H gesetzt werden. Schliesslich folgt aus der auf den mittleren Knotenpunkt des Obergurts angewandten Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" zur Bestimmung von V_4

$$V_4 + K_4 + (X_4 + X_4')\,\frac{0{,}5}{4{,}08} = 0,$$

unter X_4, X_4' die beiden mittleren Stabkräfte des Obergurts verstanden.

Dachfläche beim verschiebbaren Auflager getroffen. Für die Stützenreactionen hat man

$$\begin{aligned} V\,.\,32 &- (973\,.\,4 + 452\,.\,8 + 129\,.\,12 + 13\,.\,16) \\ &- (1275\,.\,3{,}5 + 847\,.\,6 + 410\,.\,7{,}5 + 100\,.\,8) = 0, \\ V + V' &= 637 + 973 + 452 + 129 + 13, \\ H &- 100 - 410 - 847 - 1275 - 728 = 0, \end{aligned}$$

woraus in Kilogrammen:

$$V = 709, \qquad V' = 1495, \qquad H = 3360.$$

Obige Gleichungen für die Stabkräfte liefern für die erste Binderhälfte (beim unverschiebbaren Auflager) mit $V = 709$, $H = 3360$ und verschwindenden K, L,

$X_1 = 2319$	$Z_1 = -5571$		$V_1 = -629$
$X_2 = 2127$	$Z_2 = -5342$	$D_2 = 275$	$V_2 = -1977$
$X_3 = 1165$	$Z_3 = -4914$	$D_3 = 434$	$V_3 = -840$,
$X_4 = 528$	$Z_4 = -4642$	$D_4 = 754$	

sowie für die zweite Binderhälfte (beim verschiebbaren Auflager) mit $V = 1495$, $H = 0$ und den oben berechneten K, L,

$X_1 = -1640$	$Z_1 = 552$		$V_1 = 62$
$X_2 = -560$	$Z_2 = 529$	$D_2 = -207$	$V_2 = 698$
$X_3 = 125$	$Z_3 = -1554$	$D_3 = -1651$	$V_3 = 706$
$X_4 = 630$	$Z_4 = -2974$	$D_4 = -1221$	$V_4 = -157$.

Dachfläche beim unverschiebbaren Auflager getroffen. Für die Stützenreactionen hat man

$$-V'.32+(973.4+452.8+129.12+13.16)$$
$$+(1275.3{,}5+847.6+410.7{,}5+100.8)=0,$$
$$V+V'=637+973+452+129+13,$$
$$H+100+410+847+1275+728=0,$$

woraus in Kilogrammen:

$$V=1495 \qquad V'=709 \qquad H=-3360.$$

Obige Gleichungen für die Stabkräfte liefern für die erste Binderhälfte mit $V=1495$, $H=-3360$ und den oben berechneten K, L,

$$X_1=-6109 \quad Z_1=7894 \quad \quad V_1=891$$
$$X_2=-4525 \quad Z_2=7568 \quad D_2=-207 \quad V_2=2796$$
$$X_3=-3462 \quad Z_3=5284 \quad D_3=-1651 \quad V_3=1546,$$
$$X_4=-2775 \quad Z_4=3763 \quad D_4=-1221$$

und für die zweite Binderhälfte mit $V=709$, $H=0$ und verschwindenden K, L,

$$X_1=-2155 \quad Z_1=1768 \quad \quad V_1=200$$
$$X_2=-2231 \quad Z_2=1698 \quad D_2=275 \quad V_2=120$$
$$X_3=-2422 \quad Z_3=1924 \quad D_3=434 \quad V_3=0$$
$$X_4=-2857 \quad Z_4=2274 \quad D_4=754 \quad V_4=683.$$

Bemerkung. Die Berechnung der Beanspruchungen für die erste Trägerhälfte im zweiten Belastungsfalle vereinfacht sich, wenn beachtet wird, dass für letzteren die erste Trägerhälfte gerade so belastet ist wie die zweite Trägerhälfte im ersten Belastungsfalle, dass also gegenüber den hierfür berechneten Beanspruchungen nur der Einfluss des Horizontalschubs hinzukommt, welcher überdies für die Diagonalen gleich Null ist. Letzteres folgt aus obigen Gleichungen für die Stabkräfte, ist aber in Aufgabe 25 auch allgemein festgestellt.

Beispiel 59. Schwedlerträger einfachen Systems. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Ein Schwedlerträger einfachen Systems mit horizontalem Untergurt soll unter folgenden Voraussetzungen berechnet werden. Spannweite $l=45$ m, grösste Trägerhöhe $h=6$ m, Felderzahl $n=9$, Eigengewicht per laufenden Meter $g=0{,}9$ tn, Verkehrslast $p=2{,}1$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Unter-

gurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts.

Formberechnung. Für diese sei das Eigengewicht per laufenden Meter $g_1 = 0{,}7$ gewählt, womit nach

(1) $$\alpha = \frac{n g_1}{p}$$

$\alpha = 3$ wird. Für die Grenzform einfacher Zugdiagonalen wäre nach § 43, 8)

(2) $$\frac{h_{m-1}}{h_m} < 1 \text{ solange } \frac{(m-1)(n-m+1)(m+\alpha)}{m(n-m)(m-1+\alpha)} < 1.$$

Da nun für $m = 3$

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

und für $m = 4$

$$\frac{3 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{21}{20},$$

so hat man $h_3 = 6$ m zu setzen und die drei mittleren Felder mit parallelen Gurtungen zu versehen, sodass daselbst voraussichtlich Gegendiagonalen nöthig werden (für $g_1 = g$ würde es sicher der Fall sein). Nach § 43, 7) ist nun für $m \leqq 3$

(3) $$h_m = \frac{n-m}{m+\alpha} mc.$$

Mit $m = 3$ folgt hieraus die Constante c

$$c = \frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 3} = 2 \text{ m}$$

und wir erhalten weiter

$$h_1 = \frac{8}{4} 1 \cdot 2 = 4 \text{ m}, \qquad h_2 = \frac{7}{5} 2 \cdot 2 = 5{,}6 \text{ m}.$$

Die Trägerform ist damit festgestellt (Fig. 104). Es entsprechen Fig. 105

für					
$m =$	1	2	3	4	5:
$h_m =$	4	5,6	6	6	6 m
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$	6,403	5,250	5,016	5	5 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$	5	6,403	7,507	7,810	7,810 m
$\varepsilon = \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	3,5	15	∞	∞.

Wir berechnen zunächst das System Fig. 105 und tragen dem Einflusse der Gegendiagonalen nachträglich Rechnung.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 31, 16) bei oben liegender X-Gurtung

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\,m(n-m)\,\dfrac{x_m}{h_m}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\[2ex] \mathfrak{Z}_m = (m-1)\,(n-m+1)\,\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\[2ex] \mathfrak{D}_m = \left(n - 2m + 1 - m\,\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\[2ex] \mathfrak{V}_m = -\left(n - 2m + \dfrac{g_x - g_s}{g} - m\,\dfrac{n-m}{\nu}\right)\dfrac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

und speziell für unsern Fall, mit $n = g$, $\lambda = 5 = z_m$, $g = 0{,}9$, $g_x = 0{,}3$, $g_s = 0{,}6$,

$$\mathfrak{X}_m = -\,m\,(9-m)\,\frac{x_m}{h_m}\,2{,}25,$$

$$\mathfrak{Z}_m = (m-1)\,(10-m)\,\frac{11{,}25}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = \left(10 - 2m - m\,\frac{9-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,2{,}25,$$

$$\mathfrak{V}_m = m\left(2 + \frac{9-m}{\nu}\right)2{,}25 - 19{,}5.$$

Wir erhalten danach folgende Werthe in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -\,28{,}81$	$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2$		$\mathfrak{V}_1 = \quad 3$
$\mathfrak{X}_2 = -\,29{,}53$	$\mathfrak{Z}_2 = 22{,}50$	$\mathfrak{D}_2 = 7{,}20$	$\mathfrak{V}_2 = -\,1{,}5$
$\mathfrak{X}_3 = -\,33{,}86$	$\mathfrak{Z}_3 = 28{,}12$	$\mathfrak{D}_3 = 8{,}45$	$\mathfrak{V}_3 = -\,3{,}3$
$\mathfrak{X}_4 = -\,37{,}50$	$\mathfrak{Z}_4 = 33{,}75$	$\mathfrak{D}_4 = 5{,}86$	$\mathfrak{V}_4 = -\,1{,}5.$
$\mathfrak{X}_5 = -\,37{,}50$	$\mathfrak{Z}_5 = 37{,}50$	$\mathfrak{D}_5 = 0$	

Für $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{D}_1$ folgt zwar aus obigen Gleichungen der unbestimmte Ausdruck $0:0$. Indessen wissen wir bereits aus mehreren ähnlichen Fällen, dass die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Untergurts die ganze Beanspruchung des anliegenden Gurtungsstabs bei jeder Belastung liefert

$$(5)\qquad Z_1 = Z_2.$$

Grenzbeanspruchungen. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben erhaltenen Eigengewichtsbeanspruchungen, die oberen hat man nach § 32, 6)

(6) $$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m\,, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m\,,$$

also wegen $q : g = 10 . 3$ in Tonnen:

$X_1 = -\ \ 96{,}03$	$Z_1 = Z_2$
$X_2 = -\ \ 98{,}43$	$Z_2 = \ \ 75{,}00$
$X_3 = -\ 112{,}87$	$Z_3 = \ \ 93{,}75$
$X_4 = -\ 125{,}00$	$Z_4 = 112{,}50$
$X_5 = -\ 125{,}00$	$Z_5 = 125{,}00.$

Für die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder verwenden wir die Formeln für vorausbestimmte Knotenpunktslasten, auf welchen die Formberechnung beruht. Sie liefern nach § 32, 15) die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

(7) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n - m)(n - m + 1)\left(1 - \frac{m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2n}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - m(m-1)\left(1 + \frac{n - m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2n}, \end{cases}$$

und nach § 32, 17) die Grenzbeanspruchungen der Verticalen

(8) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - (n - m)(n - m - 1)\left(1 - \frac{m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2n}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + m(m+1)\left(1 + \frac{n - m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2n}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen mit $n = 9$, $\lambda = 5$, $p = 2{,}1$ folgende Formen an

$$D_m = \mathfrak{D}_m + (9 - m)(10 - m)\left(1 - \frac{m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,0{,}583\,,$$

$$D_m = \mathfrak{D}_m - m(m-1)\left(1 + \frac{9 - m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,0{,}583\,,$$

$$V_m = \mathfrak{V}_m - (9 - m)(8 - m)\left(1 - \frac{m}{\nu}\right)0{,}583\,,$$

$$V_m = \mathfrak{V}_m + m(m+1)\left(1 + \frac{9 - m}{\nu}\right)0{,}583\,,$$

und wir erhalten danach mit den oben zusammengestellten $\varepsilon, \nu, h_m, d_m$ die nachverzeichneten Grenzwerthe in Tonnen:

$D_2 = 29{,}60$	$D_2 = \ \ \ 1{,}60$	$V_1 = \ \ \ 3{,}00$	$V_1 = 13{,}50$
$D_3 = 34{,}72$	$D_3 = \ \ \ 1{,}88$	$V_2 = -12{,}03$	$V_2 = \ \ 9{,}00$
$D_4 = 28{,}63$	$D_4 = -\ \ 3{,}25$	$V_3 = -17{,}30$	$V_3 = \ \ 6{,}50$
$D_5 = 15{,}18$	$D_5 = -15{,}18$	$V_4 = -13{,}17$	$V_4 = 10{,}17.$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Gegendiagonalen. Da die Diagonalen in den drei mittleren Feldern sowohl Zug als Druck empfangen können, so sind daselbst Gegendiagonalen anzuordnen. Der Einfluss derselben ist durch den am Schlusse des § 51 hervorgehobenen Satz bestimmt, wobei zu beachten, dass bei jeder Belastung

$$K_o = 0{,}3 \,.\, 5 = 1{,}5 \text{ tn}.$$

Für die positive Maximalbeanspruchung der Grenzverticale des Parallelträgerstücks hat man nach § 51, 8)

$$(9) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[m\,(m+1) + (\nu - m)\,(n - 2m - 1)\,\frac{g}{p}\right]\frac{p\lambda}{2n},$$

also in unserm Falle mit $m = 3$

$$V_3 = -\,3{,}3 + \left(3 \,.\, 4 + 12 \,.\, 2\,\frac{0{,}9}{2{,}1}\right)\frac{2{,}1 \,.\, 5}{2 \,.\, 15} = 4{,}5 \text{ tn},$$

doch hätte auch der oben gefundene Werth 6,5 als zu ungünstig (§ 51) beibehalten werden können. Alle gültigen Grenzbeanspruchungen sind in Fig. 106 bei ihren Stäben eingetragen.

Bemerkungen. Wir haben oben die Stabkräfte nach den bei beliebigen Gurtungsformen gültigen Gleichungen bestimmt. Nach § 45, 1) 2) oder § 43 hätten wir jedoch die Eigengewichtsbeanspruchungen und Grenzbeanspruchungen der Diagonalen ausserhalb des Parallelträgerstücks auch aus

$$(10) \qquad \mathfrak{D}_m = \frac{g\lambda}{2c}\,d_m,$$

$$(11) \qquad D_m = \frac{g + g_1}{g}\,\mathfrak{D}_m, \qquad D_m = \frac{g - g_1}{g}\,\mathfrak{D}_m$$

erhalten können, worin wie oben berechnet $c = 2$ ist. Ebenso hätten wir die Stäbe des Parallelträgerstücks (abgesehen von den Grenzverticalen) auch aus den speziell für Parallelträger gültigen Formeln berechnen können, in welche übrigens die oben verwendeten mit $\varepsilon = \nu = \infty$ übergehen.

Angenommen wir hätten die fünf mittleren Felder mit parallelen Gurtungen versehen wollen, dann würde sich nach Berechnung von a mit $h_2 = 6$ aus 3) sofort ergeben haben

$$c = \frac{5 \,.\, 6}{7 \,.\, 2} = \frac{15}{7}, \qquad h_1 = \frac{8 \,.\, 1 \,.\, 15}{4 \,.\, 7} = 4{,}276 \text{ m},$$

womit die Trägerform bestimmt ist und wie oben nur in den drei Mittelfeldern Gegendiagonalen nöthig sind (Beispiel 41).

Beispiel 60. Schwedlerträger einfachen Systems. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Für eine eingeleisige Eisenbahnbrücke sollen Schwedlerträger einfachen Systems mit horizontalem Untergurt verwendet werden. Spannweite $l = 45$ m, Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, wovon 0,3 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,6 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. In Letzteren greift die Fahrbahnlast an. Die Grenzwerthe der Stabkräfte zu berechnen, welche beim Befahren durch Züge von Locomotiven der Radanordnung Fig. 18 entstehen.

Formberechnung. Wird für diese das Eigengewicht per Längeneinheit der Sicherheit halber nur $g_1 = 0{,}7$ tn gewählt und für Belastung durch Zug II (Fig. 22) von 0 bis $m - 1$, Vorderrad O bei Verticale $m - 1$,

$$\alpha = \frac{2}{l\lambda g_1} \sum_0^{m-1} Pa \tag{1}$$

gesetzt, so hat man nach § 44, 8) für die Form einfacher Zugdiagonalen

$$\frac{h_{m-1}}{h_m} \leq 1 \quad \text{solange} \quad \frac{n-m+1}{n-m} \frac{m-1+\alpha}{m+\alpha} < 1. \tag{2}$$

Wir entnehmen aus der Tabelle in Beispiel 6 oder berechnen ganz wie in Beispiel 42

für	$m =$	1	2	3	4	5:
	$\sum_0^{m-1} Pa =$	0	60,4	170	316	529
womit	$\alpha =$	0	0,852	2,404	4,458	7,463.

Da nun für $m = 3$ $\quad \frac{8 \,.\, 4{,}404}{7 \,.\, 5{,}404} < 1$

und für $m = 4$ $\quad \frac{7 \,.\, 7{,}458}{6 \,.\, 8{,}458} > 1$,

so folgt $h_3 = h = 6$ m und sind in den vier mittleren Feldern parallele Gurtungen anzuordnen. Für $m \leq 3$ hat man nach § 44, 7)

$$h_{m-1} = \frac{n-m+1}{n-m} \frac{m-1+\alpha}{m+\alpha} h_m, \tag{3}$$

sodass wir erhalten:

$$h_2 = \frac{8 \,.\, 4{,}404}{7 \,.\, 5{,}404}\, 6 \qquad = 5{,}588 \text{ m},$$

$$h_1 = \frac{9 \,.\, 1{,}852}{8 \,.\, 2{,}852}\, 5{,}588 = 4{,}082 \text{ m}.$$

Die Trägerform ist damit festgestellt (Fig. 107), es entsprechen Fig. 108

für					
$m =$	1	2	3	4	5:
$h_m =$	4,082	5,588	6	6	6 m
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$	6,076	4,745	5,519	4,5	4,5 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$	4,5	6,076	7,145	7,5	7,5 m
$\varepsilon = \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	3,71	14,56	∞	∞.

Wir berechnen zunächst das System Fig. 108 und tragen dem Einflusse der Gegendiagonalen nachträglich Rechnung.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte gelten die im vorigen Beispiele verwendeten Gleichungen 4), welche mit $n = 10$, $\lambda = 4{,}5$, $g = 0{,}9$, $g_x = 0{,}3$, $g_z = 0{,}6$ ergeben

$$\mathfrak{X}_m = - m\,(10 - m)\,\frac{x_m}{h_m}\, 2{,}025,$$

$$\mathfrak{Z}_m = (m - 1)\,(11 - m)\,\frac{9{,}112}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = \left(11 - 2m - m\,\frac{10 - m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\, 2{,}025,$$

$$\mathfrak{V}_m = m\left(2 + \frac{10 - m}{\nu}\right) 2{,}025 - 19{,}575.$$

Wir erhalten danach folgende Beanspruchungen in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -27{,}16$	$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2$		$\mathfrak{V}_1 = 2{,}70$
$\mathfrak{X}_2 = -27{,}47$	$\mathfrak{Z}_2 = 20{,}10$	$\mathfrak{D}_2 = 8{,}11$	$\mathfrak{V}_2 = -2{,}74$
$\mathfrak{X}_3 = -32{,}03$	$\mathfrak{Z}_3 = 26{,}08$	$\mathfrak{D}_3 = 9{,}18$	$\mathfrak{V}_3 = -4{,}50$
$\mathfrak{X}_4 = -36{,}45$	$\mathfrak{Z}_4 = 31{,}89$	$\mathfrak{D}_4 = 7{,}53$	$\mathfrak{V}_4 = -3{,}37$
$\mathfrak{X}_5 = -37{,}97$	$\mathfrak{Z}_5 = 36{,}45$	$\mathfrak{D}_5 = 2{,}53$	$\mathfrak{V}_5 = 0{,}67$.

Wie im vorigen Beispiele hat man die Beanspruchung des Untergurtstabs 1 bei jeder Belastung $Z_1 = Z_2$.

Grenzbeanspruchungen. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind die soeben angeführten Eigengewichtsbeanspruchungen,

für die oberen hat man nach § 33, 1) 2), wenn bei Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(4)\qquad C_m = (n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)$$

gesetzt wird,

$$(5)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m - C_m \frac{x_m}{lh_m},\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + C_{m-1}\frac{1}{nh_{m-1}}.$$

Die Summenausdrücke in 4) lassen sich aus der Tabelle des Beispiels 6 entnehmen oder wie in Beispiel 42 berechnen. Wir erhalten dann die oberen Grenzbeanspruchungen des Obergurts:

$$X_1 = -27{,}16 - (9\,.\,54{,}2 + 1\,.\,1996)\frac{6{,}08}{45\,.\,4{,}08} = -109{,}72 \text{ tn } (-105{,}44)$$

$$X_2 = -27{,}47 - (8\,.\,144 + 2\,.\,1586)\frac{4{,}74}{45\,.\,5{,}59} = -108{,}95 \text{ „ } (-106{,}71)$$

$$X_3 = -32{,}03 - (7\,.\,285 + 3\,.\,1208)\frac{4{,}52}{45\,.\,6} = -126{,}10 \text{ „ } (-125{,}95)$$

$$X_4 = -36{,}45 - (6\,.\,490 + 4\,.\,\ 884)\frac{4{,}5}{45\,.\,6} = -143{,}38 \text{ „ } (-142{,}48)$$

$$X_5 = -37{,}97 - (5\,.\,714 + 5\,.\,\ 617)\frac{4{,}5}{45\,.\,6} = -148{,}89 \text{ „ } (-148{,}89),$$

und diejenigen des Untergurts:

$$Z_1 = Z_2 = 20{,}10 + (9\,.\,54{,}2 + 1\,.\,1996)\frac{1}{40{,}8} = 80{,}98 \text{ tn } (78{,}04)$$

$$Z_3 = 26{,}08 + (8\,.\,144 + 2\,.\,1586)\frac{1}{55{,}9} = 103{,}43 \text{ „ } (101{,}30)$$

$$Z_4 = 31{,}89 + (7\,.\,285 + 3\,.\,1208)\frac{1}{60} = 125{,}54 \text{ „ } (125{,}39)$$

$$Z_5 = 36{,}45 + (6\,.\,490 + 4\,.\,\ 884)\frac{1}{60} = 143{,}38 \text{ „ } (142{,}48).$$

Die Ansätze beziehen sich auf die erste Richtung des Zuges I, während die Resultate für die zweite Richtung in Klammern beigefügt sind. Wie bisher immer hätte die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung genügt, was man nach vorausgegangener Berechnung eines andern Beispiels mit $l = 45$, $n = 10$ (Beispiel 36) im Voraus wissen konnte.

Die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder ergeben sich nach § 33, 7) 8) 11) 12) wie folgt:

Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(6)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{lh_{m-1}}\left(1-\frac{m}{\varepsilon}\right)\sum_m^n P(l-a),$$

Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(7)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{l h_{m-1}}\left(1 + \frac{n-m}{\varepsilon}\right)\sum_0^{m-1} Pa;$$

Zug II von $m+1$ bis n, Vorderrad O bei Verticale $m+1$,

$$(8)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{1}{l}\left(1 - \frac{m}{\nu}\right)\sum_{m+1}^{n} P(l-a),$$

Zug II von 0 bis m, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(9)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{1}{l}\left(1 + \frac{n-m}{\nu}\right)\sum_0^{m} Pa.$$

Diese Gleichungen liefern mit den aus der Tabelle des Beispiels 6 entnommenen oder wie in Beispiel 42 zu berechnenden Werthen der Summenausdrücke (welche theilweise schon bei Berechnung der α verwendet wurden) in Tonnen die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_2 = 8{,}11 + \frac{6{,}08 \,.\, 1{,}71 \,.\, 1836}{45 \,.\, 4{,}08 \,.\, 3{,}71} = 36{,}13$$

$$D_3 = 9{,}18 + \frac{7{,}17 \,.\, 11{,}56 \,.\, 1442}{45 \,.\, 5{,}59 \,.\, 14{,}56} = 41{,}81$$

$$D_4 = 7{,}59 + \frac{7{,}5 \,.\, 1087}{45 \,.\, 6} = 37{,}78$$

$$D_5 = 2{,}53 + \frac{7{,}5 \,.\, 776}{45 \,.\, 6} = 24{,}09,$$

$$D_2 = 8{,}11 - \frac{6{,}08 \,.\, 11{,}71 \,.\, 60{,}4}{45 \,.\, 4{,}08 \,.\, 3{,}71} = 1{,}80$$

$$D_3 = 9{,}18 - \frac{7{,}17 \,.\, 21{,}56 \,.\, 170}{45 \,.\, 5{,}59 \,.\, 14{,}56} = 2{,}04$$

$$D_4 = 7{,}59 - \frac{7{,}5 \,.\, 316}{45 \,.\, 6} = -\,1{,}19$$

$$D_5 = 2{,}53 - \frac{7{,}5 \,.\, 529}{45 \,.\, 6} = -\,12{,}16,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = 2{,}70 - \frac{0 \,.\, 1836}{45 \,.\, 1} = 2{,}70$$

$$V_2 = -\,2{,}74 - \frac{1{,}71 \,.\, 1442}{45 \,.\, 3{,}71} = -\,17{,}51$$

$$V_3 = -\,4{,}50 - \frac{11{,}56 \,.\, 1087}{45 \,.\, 14{,}56} = -\,23{,}68$$

$$V_4 = -3{,}37 - \frac{776}{45} = -20{,}61$$

$$V_5 = 0{,}67 - \frac{530}{45} = -11{,}11,$$

$$V_1 = 2{,}70 + \frac{10 \cdot 60{,}4}{45 \cdot 1} = 16{,}12$$

$$V_2 = -2{,}74 + \frac{11{,}71 \cdot 170}{45 \cdot 3{,}71} = 9{,}18$$

$$V_3 = -4{,}50 + \frac{21{,}56 \cdot 316}{45 \cdot 14{,}56} = 5{,}90$$

$$V_4 = -3{,}37 + \frac{530}{45} = 8{,}41$$

$$V_5 = 0{,}67 + \frac{776}{45} = 17{,}91.$$

Ganz wie in Beispiel 36 erhält man mit Zug I, Rad O bei Verticale 1, ein grösseres V_1 wie vorstehend mit Zug II, nämlich

$$V_1 = K_u = 2{,}70 + 6 + 2 \cdot 6 \frac{3{,}2}{4{,}5} + 4 \frac{2}{4{,}5} = 19{,}01 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt.

Gegendiagonalen. Da die Diagonalen in den vier mittleren Feldern sowohl Zug als Druck empfangen können, so sind daselbst Gegendiagonalen anzuordnen. Der Einfluss derselben ist durch den am Schlusse des § 51 hervorgehobenen Satz bestimmt und dabei constant $K_o = 0{,}3 \cdot 4{,}5 = 1{,}35$ tn. Die positive Maximalbeanspruchung der Grenzverticale des Parallelträgerstücks ist nach § 51, 9) mit der für 9) gültigen Belastung

$$(10) \quad V_m = \mathfrak{B}_m + \left[\sum_0^m Pa + (\nu - m)(n - 2m - 1)\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{\nu\lambda},$$

also in unserm Falle

$$V_3 = -4{,}50 + (316 + 11{,}56 \cdot 3 \cdot 0{,}45 \cdot 4{,}5^2)\frac{1}{14{,}56 \cdot 4{,}5} = 5{,}15 \text{ tn},$$

doch hätte auch der oben gefundene Werth 5,9 als zu ungünstig beibehalten werden können (§ 51). Die Beanspruchung der mittleren Verticale für Eigengewicht allein ist deren untere Grenzbeanspruchung. Sämmtliche Grenzbeanspruchungen sind in Fig. 109 eingetragen.

Bemerkungen. Anstatt wie oben nach den Gleichungen für beliebige Gurtungsformen hätten wir die Beanspruchungen der Diagonalen ausserhalb des Parallelträgerstücks auch nach § 45, 3) 4)

berechnen können, wonach insbesondere die unteren Grenzbeanspruchungen der Diagonalen wie im vorigen Beispiele

$$D_m = \frac{g - g_1}{g} \mathfrak{D}_m = \frac{2}{9} \mathfrak{D}_m$$

sind und für $g_1 = g$ verschwinden würden. Die Stäbe des Parallelträgerstücks, abgesehen von dessen Grenzverticale, hätten sich auch direct nach den Spezialformeln für Parallelträger berechnen lassen.

Wollte man den betrachteten Träger in vielfach vorkommender Weise für diejenige gleichmässig vertheilte bewegte Last berechnen, welche den grössten Momenten entspricht, so würde nach Beispiel 8 die Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn zu setzen sein. Damit erhielte man ganz wie im vorigen Beispiel der Reihe nach $\alpha = 2{,}660$, $h_3 = h = 6$ m, $c = 1{,}617$,

$$h_1 = 3{,}976, \qquad h_2 = 5{,}552 \text{ m},$$

während sich oben fanden

$$h_1 = 4{,}082, \qquad h_2 = 5{,}588 \text{ m}.$$

Diese Verringerung der Verticalenlängen hat mindestens in dem Falle rechnungsmässigen Druck in den Zugdiagonalen d_2, d_3 zur Folge, dass nicht wie hier mit $g_1 < g$ gerechnet wird. Wird nun noch, wie häufig genug, p zu klein angenommen, so sind beim Ueberfahren ungünstiger Lastzüge Einknickungen der Diagonalen zu erwarten, welche nur durch ganz uncontrolirbare Secundärspannungen verhindert werden könnten (Vernietungen). Wenn man also mit Lastäquivalenten rechnen will, so sollte wenigstens die richtige Wahl getroffen werden (Beispiel 61).

Aufgabe 36. Träger einfachen Systems nach der Grenzform gleichartiger Diagonalenbeanspruchungen. Anwendung von Lastäquivalenten.

Die Gleichungen zur Formbestimmung von Trägern nach der Grenzform gleichartiger Diagonalenbeanspruchungen so zu gestalten, dass die Berechnung mit Rücksicht auf die Lastäquivalente direct befahrener vollwandiger Träger erfolgen kann.

In § 44 sind Gleichungen für die verlangte Formbestimmung gegeben, in welchen nur α, β von der Verkehrslast abhängen. Man hat für Belastung durch Zug II von 0 bis $m - 1$, Vorderrad O bei Verticale $m - 1$,

(1) $$\alpha = \frac{2}{l\lambda g_1} \sum_0^{m-1} Pa,$$

und für Belastung durch Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

(2) $$\beta = \frac{2}{l\lambda g_1} \sum_m^n P(l - a).$$

Bezeichnen nun p_c, p_v diejenigen Lastäquivalente, welche für einen durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem neg max V_x bei $x = c = (m - 1)\lambda$ bezw. dem pos max V_x bei $x = v = m\lambda$ entsprechen, so hat man nach A. 11, 9)—12) für die eben erwähnten Belastungen:

(3) $$2 \sum_0^{m-1} Pa = c^2 p_c = (m - 1)^2 \lambda^2 p_c,$$

(4) $$2 \sum_m^n P(l - a) = (l - v)^2 p_v = (n - m)^2 \lambda^2 p_v$$

und also aus 1) 2) wegen $l = n\lambda$

(5) $$\alpha = (m - 1)^2 \frac{p_c}{n g_1},$$

(6) $$\beta = (n - m)^2 \frac{p_v}{n g_1}.$$

Mit diesen Ausdrücken an Stelle von § 44, 4) 5) gelten nun sämmtliche in §§ 44, 45 gegebenen Gleichungen. Die dort nicht ausgedrückten Beanspruchungen sind nach den für beliebige Gurtungsformen gültigen Festsetzungen der Aufgabe 32 zu berechnen.

Anstatt wie hier vorzugehen, hätten wir die Beziehungen zur Formberechnung auch ganz wie in den §§ 43, 44 auf Grund der Gleichungen A. 32, 1) oder mit p nach A. 29, 1) 3) auf Grund der in § 43 verwendeten Gleichungen § 32, 15) ableiten können.

Beispiel 61. Schwedlerträger einfachen Systems. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Träger des vorigen Beispiels auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselbe Form und dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder sowie annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den dort angenommenen Radlastzügen entstehen.

Formberechnung. Bezeichnet p_c dasjenige Lastäquivalent, welches für einen durch den angenommenen Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger dem neg max V_x bei $x = c$ entspricht, so gelten nach Aufgabe 36 mit $c = (m - 1)\lambda$ und

(1) $$\alpha = (m - 1)^2 \frac{p_c}{n g_1}$$

die Gleichungen 2) 3) des vorigen Beispiels. Setzen wir wieder das Eigengewicht per laufenden Meter für die Formberechnung $g_1 = 0,7$ und entnehmen aus der Tabelle in Beispiel 8

für	$m =$	1	2	3	4:
	$p_c =$	∞	5,94	4,21	3,46
so folgen	$\alpha =$	0	0,849	2,406	4,449.

Da für $m = 3$ $\quad \frac{8 \,.\, 4,406}{7 \,.\, 5,406} < 1$

und „ $m = 4$ $\quad \frac{7 \,.\, 7,449}{6 \,.\, 8,449} > 1$,

so wird $h_3 = h = 6$ m und sind die vier mittleren Felder mit parallelen Gurtungen anzuordnen. Aus B. 60, 3) erhält man

$$h_2 = \frac{8 \,.\, 4,406}{7 \,.\, 5,406}\, 6 = 3,589 \text{ m},$$

$$h_1 = \frac{9 \,.\, 1,849}{8 \,.\, 2,849}\, 5,589 = 4,081 \text{ m},$$

womit die Trägerform festgestellt ist. Da dieselbe mit der im vorigen Beispiele erhaltenen übereinstimmt, so bleiben auch die dort zusammengestellten h, x, d, ε, v gültig. Wir berechnen wieder zunächst das System Fig. 108 und tragen dem Einflusse der Gegendiagonalen nachträglich Rechnung.

Beanspruchungen. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte ergeben sich ganz wie im vorigen Beispiele die dort berechneten Werthe, womit auch die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen bestimmt sind. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Letzteren hat man nach Aufgabe 32 mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für einen durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem max M_x bei der Trägermitte entspricht. Aus Beispiel 8 entnehmen wir $p = 2,63$ oder nach oben abgerundet $p = 2,7$ tn, und erhalten nach

(2) $$X_m = \frac{q}{g}\, \mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\, \mathfrak{Z}_m,$$

mit $q : g = 3{,}6 : 0{,}9 = 4$ die folgenden Grenzwerthe in Tonnen:

$$\begin{aligned} X_1 &= -108{,}64 & Z_1 &= Z_2 \\ X_2 &= -109{,}88 & Z_2 &= 80{,}40 \\ X_3 &= -128{,}12 & Z_3 &= 104{,}32 \\ X_4 &= -148{,}80 & Z_4 &= 127{,}56 \\ X_5 &= -151{,}88 & Z_5 &= 144{,}80. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 32 hat man wie in Beispiel 37 die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen, mit $c = (m - 1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} D_m &= \mathfrak{D}_m + \frac{\lambda d_m}{2nh_{m-1}}\left(1 - \frac{m}{\varepsilon}\right)(n - m)^2 p_v, \\ D_m &= \mathfrak{D}_m - \frac{\lambda d_m}{2nh_{m-1}}\left(1 + \frac{n - m}{\varepsilon}\right) m^2 p_c, \end{aligned} \right.$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen, mit $c = m\lambda$, $v = (m + 1)\lambda$,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} V_m &= \mathfrak{V}_m - \frac{\lambda}{2n}\left(1 - \frac{m}{v}\right)(n - m - 1)^2 p_v, \\ V_m &= \mathfrak{V}_m + \frac{\lambda}{2n}\left(1 + \frac{n - m}{v}\right) m^2 p_c, \end{aligned} \right.$$

worin p_v das Lastäquivalent, welches für einen durch Lastzug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem pos max V_x bei $x = v$ entspricht. Wir entnehmen die p_c, p_v aus der Tabelle des Beispiels 8 und erhalten in Tonnen für die Diagonalen:

$$\begin{aligned} D_2 &= 8{,}11 + \frac{0{,}225 \,.\, 6{,}08 \,.\, 1{,}71}{4{,}08 \,.\, 3{,}71}\, 64 \,.\, 2{,}83 = 36{,}10 \\ D_3 &= 9{,}18 + \frac{0{,}225 \,.\, 7{,}17 \,.\, 11{,}56}{5{,}59 \,.\, 14{,}56}\, 49 \,.\, 2{,}90 = 41{,}74 \\ D_4 &= 7{,}59 + \frac{0{,}225 \,.\, 7{,}5}{6}\, 36 \,.\, 2{,}98 = 37{,}78 \\ D_5 &= 2{,}53 + \frac{0{,}225 \,.\, 7{,}5}{6}\, 25 \,.\, 3{,}06 = 24{,}05, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= 8{,}11 - \frac{0{,}225 \,.\, 6{,}08 \,.\, 11{,}71}{4{,}08 \,.\, 3{,}71}\, 1 \,.\, 5{,}94 = 1{,}81 \\ D_3 &= 9{,}18 - \frac{0{,}225 \,.\, 7{,}17 \,.\, 21{,}56}{5{,}59 \,.\, 14{,}56}\, 4 \,.\, 4{,}21 = 1{,}98 \\ D_4 &= 7{,}59 - \frac{0{,}225 \,.\, 7{,}5}{6}\, 9 \,.\, 3{,}46 = -1{,}17 \\ D_5 &= 2{,}53 - \frac{0{,}225 \,.\, 7{,}5}{6}\, 16 \,.\, 3{,}27 = -12{,}18, \end{aligned}$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = 2{,}70 - \frac{0{,}225\,.\,0}{1}\,64\,.\,2{,}83 = 2{,}70$$

$$V_2 = -2{,}74 - \frac{2{,}225\,.\,1{,}71}{3{,}71}\,49\,.\,2{,}90 = -17{,}48$$

$$V_3 = -4{,}50 - \frac{0{,}225\,.\,11{,}56}{14{,}56}\,36\,.\,2{,}98 = -23{,}67$$

$$V_4 = -3{,}37 - 0{,}225\,.\,25\,.\,3{,}06 = -20{,}58$$

$$V_5 = 0{,}67 - 0{,}225\,.\,16\,.\,3{,}27 = -10{,}10,$$

$$V_1 = 2{,}70 + \frac{0{,}225\,.\,10}{1}\,1\,.\,5{,}94 = 16{,}07$$

$$V_2 = -2{,}74 + \frac{0{,}225\,.\,11{,}71}{3{,}71}\,4\,.\,4{,}21 = 9{,}22$$

$$V_3 = -4{,}50 + \frac{0{,}225\,.\,21{,}56}{14{,}56}\,9\,.\,3{,}46 = 5{,}88$$

$$V_4 = -3{,}37 + 0{,}225\,.\,16\,.\,3{,}27 = 8{,}40$$

$$V_5 = 0{,}67 + 0{,}225\,.\,25\,.\,3{,}06 = 17{,}88.$$

Ganz wie in Beispiel 37 erhält man ein noch grösseres V_1 als 16,07 mit demjenigen p, welches für einen durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite $v = 9$ m dem max M_x bei der Trägermitte entspricht, nämlich

$$V_1 = \mathfrak{B}_1 + p\lambda = 2{,}70 + 3{,}62\,.\,4{,}5 = 18{,}99 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Gegendiagonalen. In den vier mittleren Feldern sind Gegendiagonalen nöthig, deren Einfluss durch den am Schlusse des § 51 hervorgehobenen Satz bestimmt ist. Es bleiben danach die negativen Maximalbeanspruchungen der Verticalen des Parallelträgerstücks wie oben berechnet, während die positive Maximalbeanspruchung der Grenzverticale desselben nach § 51, 9) mit A. 36, 3) und $c = m\lambda$

$$V_m = \mathfrak{B}_m + [m^2 p_c + (v - m)(n - 2m - 1)g]\,\frac{\lambda}{2\,v},$$

also speziell in unserem Falle

$$V_5 = -4{,}50 + [9\,.\,3{,}46 + 11{,}56\,.\,3\,.\,0{,}9]\,\frac{4{,}5}{2\,.\,14{,}56} = 5{,}15 \text{ tn}.$$

Doch hätte auch der oben erhaltene Werth 5,88 als zu ungünstig beibehalten werden können (§ 51).

Die positiven Maximalbeanspruchungen der übrigen Verticalen des Parallelträgerstücks sind — 0,3 . 4,5 = — 1,35 tn und den gleichen Werth hat die Beanspruchung der mittleren Verticale für Eigengewicht allein. Alle übrigen Stabkräfte bleiben wie oben bestimmt.

Sämmtliche hier berechnete Grenzbeanspruchungen der Füllungs-

glieder sowie die Form des Trägers müssen, soweit nicht kleine Differenzen durch vernachlässigte Decimalen und Interpolationen bedingt sind, genau mit den im vorigen Beispiele erhaltenen Resultaten für bewegte Radlastzüge übereinstimmen. Bezüglich der Verwendbarkeit von Spezialformeln anstatt der obigen Gleichungen für beliebige Gurtungsformen gilt das in den Bemerkungen zum letzten Beispiele Gesagte.

Beispiel 62. Paulischer Segmentträger einfachen Systems. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sollen Träger einfachen Systems mit Verticalen, horizontalem Untergurt und constanter Maximalbeanspruchung des Obergurts unter folgenden Voraussetzungen berechnet werden: Spannweite $l = 45$ m, grösste Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, wovon 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts kommen, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts. Die bewegte Last ist zu $p = 2{,}63$ tn per laufenden Meter der ergriffenen Strecke anzunehmen.

Formberechnung. Denkt man sich zunächst alle Diagonalen von der in Fig. 110 angedeuteten Stellung (X-Gurtung oben), so besteht nach § 46, 6) 8) 10) mit

$$(1) \qquad c = \frac{n\,l}{4f}, \qquad \alpha = \frac{c}{m\,(n-m)}$$

zur Berechnung der Verticalenlängen die Gleichung

$$(2) \qquad h_m = \frac{-h_{m-1} + \sqrt{\alpha^2(\lambda^2 + h^2_{m-1}) - \lambda^2}}{\alpha^2 - 1},$$

woraus in unserm Falle mit $f = h$, $h_0 = h_{10} = 0$,

$$c = \frac{10\,.\,45}{4\,.\,6} = 18{,}75,$$

$$\alpha_1 = \frac{18{,}75}{1\,.\,9} = 2{,}083$$

$$\alpha_2 = \frac{18{,}75}{2\,.\,8} = 1{,}172$$

$$\alpha_3 = \frac{18{,}75}{3\,.\,7} = 0{,}893$$

$$\alpha_4 = \frac{18{,}75}{4\,.\,6} = 0{,}781$$

$$\alpha_5 = \frac{18{,}75}{5\,.\,5} = 0{,}750$$

$$\alpha_6 = \frac{18,75}{6 \,.\, 4} = 0,781$$

$$\alpha_7 = \frac{18,75}{7 \,.\, 3} = 0,893$$

$$\alpha_8 = \frac{18,75}{8 \,.\, 2} = 1,172$$

$$\alpha_9 = \frac{18,75}{9 \,.\, 1} = 2,083,$$

$$h_1 = \frac{-0 + \sqrt{2,083^2 (4,5^2 + 0^2) - 4,5^2}}{2,083^2 - 1} = 2,463 \text{ m } (2,162)$$

$$h_2 = \frac{-2,463 + \sqrt{1,172^2 (4,5^2 + 2,463^2) - 4,5^2}}{1,172^2 - 1} = 4,080 \text{ „ } (3,843)$$

$$h_3 = \frac{-4,080 + \sqrt{0,893^2 (4,5^2 + 4,080^2) - 4,5^2}}{0,893^2 - 1} = 5,192 \text{ „ } (5,044)$$

$$h_4 = \frac{-5,192 + \sqrt{0,781^2 (4,5^2 + 5,192^2) - 4,5^2}}{0,781^2 - 1} = 5,818 \text{ „ } (5,765)$$

$$h_5 = \frac{-5,818 + \sqrt{0,750^2 (4,5^2 + 5,818^2) - 4,5^2}}{0,750^2 - 1} = 6,005 \text{ „ } (6,005)$$

$$h_6 = \frac{-6,005 + \sqrt{0,781^2 (4,5^2 + 6,005^2) - 4,5^2}}{0,781^2 - 1} = 5,770 \text{ „ } (5,765)$$

$$h_7 = \frac{-5,770 + \sqrt{0,893^2 (4,5^2 + 5,770^2) - 4,5^2}}{0,893^2 - 1} = 5,097 \text{ „ } (5,044)$$

$$h_8 = \frac{-5,097 + \sqrt{1,172^2 (4,5^2 + 5,097^2) - 4,5^2}}{1,172^2 - 1} = 3,960 \text{ „ } (3,843)$$

$$h_9 = \frac{-3,960 + \sqrt{2,083^3 (4,5^2 + 3,960^2) - 4,5^2}}{2,083^2 - 1} = 2,302 \text{ „ } (2,162).$$

Des Vergleichs halber sind in Klammer diejenigen Verticalenlängen beigesetzt, welche einem Parabelträger der Höhe 6,005 m entsprechen würden.

Die erhaltene Trägerform Fig. 110 ist zur Mitte nicht symmetrisch, es kann jedoch, wie in Fig. 111 und 112 angedeutet, sowohl die erste als die zweite Hälfte zur Bildung eines symmetrischen Trägers verwendet werden. Beide so entstehenden Träger erhalten dieselben Grenzbeanspruchungen des Obergurts, während die Eigengewichtsbeanspruchungen und grössten Grenzbeanspruchungen der Diagonalen für Fig. 111 Zug, für Fig. 112 Druck bedeuten. Wir wählen das System Fig. 111 und erhalten mit den oben berechneten α, h unter Berücksichtigung von § 46, 8)

für $m =$	1	2	3	4	5:
$x_m = \alpha h_m =$	5,130	4,782	4,636	4,544	4,504 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$	4,5	5,130	6,074	6,871	7,355 m
$\nu = \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	2,52	4,67	9,29	32,11.

Wäre von vorn herein beabsichtigt gewesen, das jetzt angenommene symmetrische System zu verwenden, so hätte natürlich die obige Berechnung der h auf der zweiten Trägerhälfte unterbleiben können.

Wir haben hier angenommen, dass die ermittelte Trägerhöhe von 6,005 m genügend genau mit der gewünschten von 6 m übereinstimmt, um den Träger damit ausführen zu lassen oder 6 m ohne Aenderung der Rechnung zu wählen. Hätte man jedoch noch genauer vorgehen wollen, so würde nach Ermittelung der h_m und von $x_\sigma = x_5$ die Berechnung zufolge § 46, 13) mit

$$c = \frac{n^2}{4h} x_\sigma = \frac{100}{4 \,.\, 6} 4{,}504 = 18{,}767$$

von Neuem zu beginnen und in gleicher Weise wie oben durchzuführen gewesen sein.

Beanspruchungen. Für die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen hat man nach § 46, 1) 2) 7)

$$(3) \qquad X = -c \frac{q\lambda}{2}, \qquad \mathfrak{X}_m = \frac{g}{q} X,$$

$$(4) \qquad Z_m = c \frac{q\lambda}{2} \frac{z_m}{x_{m-1}}, \qquad \mathfrak{Z}_m = \frac{g}{q} Z_m,$$

worin im vorliegenden Falle $q = 0{,}9 + 2{,}63 = 3{,}53$. Eine Ausnahme macht Stab 1 des Untergurts, für welchen das Gleichgewicht des anliegenden Knotenpunkts 1 bei jeder Belastung verlangt

$$(5) \qquad Z_1 = Z_2 .$$

Wir erhalten für den Obergurt constant

$$X = -18{,}75 \,.\, 3{,}53 \,.\, 2{,}25 = -148{,}92 \text{ tn},$$
$$\mathfrak{X} = -18{,}75 \,.\, 0{,}9 \,.\, 2{,}25 = -37{,}97 \text{ ,, },$$

und für den Untergurt mit $z_m = \lambda$

$Z_1 = Z_2 = 130{,}63 \quad Z_3 = 140{,}14 \quad Z_4 = 144{,}55 \quad Z_5 = 147{,}48$ tn,

$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = 33{,}31 \quad \mathfrak{Z}_3 = 35{,}73 \quad \mathfrak{Z}_4 = 36{,}85 \quad \mathfrak{Z}_5 = 37{,}60$,, .

Die Beanspruchungen der Füllungsglieder durch das Eigengewicht allein sind nach § 31, 16)

$$(6) \qquad \mathfrak{D}_m = \left(n + 1 - 2m - m \frac{n-m}{\varepsilon}\right) \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2},$$

(7) $$\mathfrak{V}_m = m\left(2 + \frac{n-m}{\nu}\right)\frac{g\lambda}{2} - \left(n - \frac{g_s - g_x}{g}\right)\frac{g\lambda}{2},$$

während nach § 32, 7) die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

(8) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(\varepsilon - m)(n-m)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(\varepsilon - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

und nach § 32, 9) die Grenzbeanspruchungen der Verticalen

(9) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{(\nu - m)(n - m - 1)^2}{(n-1)\nu + m}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{(\nu - m + n)m^2}{(n-1)\nu + m}\,\dfrac{\nu + 1}{\nu}\,\dfrac{p\lambda}{2} \end{cases}$$

Eine Ausnahme bildet die mittlere Verticale, für welche das Gleichgewicht des Knotenpunkts 5 im Obergurt bei jeder Belastung verlangt

(10) $$V_5 + 0{,}3\,.\,4{,}5 + \frac{0{,}19}{4{,}50}\,2X_5 = 0.$$

Nach vorstehenden Gleichungen erhalten wir in Tonnen die Eigengewichtsbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen:

$$\mathfrak{D}_2 = 2{,}025\left(7 - \frac{2\,.\,8}{2{,}52}\right)\frac{5{,}13}{2{,}46} = 2{,}75$$

$$\mathfrak{D}_3 = 2{,}025\left(5 - \frac{3\,.\,7}{4{,}67}\right)\frac{6{,}07}{4{,}08} = 1{,}52$$

$$\mathfrak{D}_4 = 2{,}025\left(3 - \frac{4\,.\,6}{9{,}29}\right)\frac{6{,}87}{5{,}19} = 1{,}12$$

$$\mathfrak{D}_5 = 2{,}025\left(1 - \frac{5\,.\,5}{32{,}11}\right)\frac{7{,}35}{5{,}82} = 0{,}57,$$

$$\mathfrak{V}_1 = 2{,}025\,.\,1\left(2 + \frac{9}{1}\right) - 19{,}575 = 2{,}70$$

$$\mathfrak{V}_2 = 2{,}025\,.\,2\left(2 + \frac{8}{2{,}52}\right) - 19{,}575 = 1{,}38$$

$$\mathfrak{V}_3 = 2{,}025\,.\,3\left(2 + \frac{7}{4{,}67}\right) - 19{,}575 = 1{,}68$$

$$\mathfrak{V}_4 = 2{,}025\,.\,4\left(2 + \frac{6}{9{,}29}\right) - 19{,}575 = 1{,}86$$

$$\mathfrak{V}_5 = 37{,}97\,\frac{19}{225} - 1{,}35 = 1{,}86;$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_2 = 2{,}75 + 5{,}917\,\frac{0{,}52\,.\,64\,.\,1{,}52\,.\,5{,}13}{14{,}68\,.\,2{,}52\,.\,2{,}46} = 19{,}62$$

$$D_3 = 1{,}52 + 5{,}917\ \frac{1{,}67\ .\ 49\ .\ 3{,}67\ .\ 6{,}07}{35{,}03\ .\ 4{,}67\ .\ 4{,}08} = 17{,}68$$

$$D_4 = 1{,}12 + 5{,}917\ \frac{5{,}29\ .\ 36\ .\ 8{,}29\ .\ 6{,}87}{77{,}61\ .\ 9{,}29\ .\ 5{,}19} = 18{,}12$$

$$D_5 = 0{,}57 + 5{,}917\ \frac{27{,}11\ .\ 25\ .\ 31{,}11\ .\ 7{,}35}{284{,}0\ .\ 32{,}11\ .\ 5{,}82} = 17{,}85,$$

$$D_2 = 2{,}75 - 5{,}917\ \frac{10{,}52\ .\ 1\ .\ 5{,}13}{14{,}68\ .\ 2{,}46} = -\ 6{,}09$$

$$D_3 = 1{,}52 - 5{,}917\ \frac{11{,}67\ .\ 4\ .\ 6{,}07}{35{,}03\ .\ 4{,}08} = -\ 10{,}21$$

$$D_4 = 1{,}12 - 5{,}917\ \frac{15{,}29\ .\ 9\ .\ 6{,}87}{77{,}61\ .\ 5{,}19} = -\ 12{,}77$$

$$D_5 = 0{,}57 - 5{,}917\ \frac{37{,}11\ .\ 16\ .\ 7{,}35}{284{,}0\ .\ 5{,}82} = -\ 15{,}05,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = 2{,}70 - 5{,}917\ \frac{0\ .\ 64}{10} = 2{,}70$$

$$V_2 = 1{,}38 - 5{,}917\ \frac{0{,}52\ .\ 49}{24{,}68} = -\ 4{,}73$$

$$V_3 = 1{,}68 - 5{,}917\ \frac{1{,}67\ .\ 36}{45{,}03} = -\ 6{,}22$$

$$V_4 = 1{,}86 - 5{,}917\ \frac{5{,}29\ .\ 25}{87{,}61} = -\ 7{,}07$$

$$V_5 = \mathfrak{B}_5 = 1{,}86,$$

$$V_1 = 2{,}70 - 5{,}917\ \frac{10\ .\ 1\ .\ 2}{10\ .\ 1} = 14{,}53$$

$$V_2 = 1{,}38 - 5{,}917\ \frac{10{,}52\ .\ 4\ .\ 3{,}52}{24{,}68\ .\ 2{,}52} = 15{,}47$$

$$V_3 = 1{,}68 - 5{,}917\ \frac{11{,}67\ .\ 9\ .\ 5{,}67}{45{,}03\ .\ 4{,}67} = 18{,}44$$

$$V_4 = 1{,}86 - 5{,}917\ \frac{15{,}29\ .\ 16\ .\ 10{,}29}{87{,}61\ .\ 9{,}29} = 20{,}16$$

$$V_5 = 148{,}92\ \frac{19}{225} - 1{,}35 = 10{,}78.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Für einen parabolischen Segmentträger wären nach §§ 41, 42 die Eigengewichtsbeanspruchungen der Diagonalen gleich Null, diejenigen der Verticalen $\lambda g_s = 2{,}7$ tn, beide Grenzbeanspruchungen einer bestimmten Diagonale numerisch gleich und die Grenzbeanspruchungen des Untergurts für alle Stäbe gleich gross gewesen. — Wie in Beispiel 35 hätten wir auch hier je eine der beiden Grenzbean-

spruchungen der Füllungsglieder aus den dortigen Gleichungen 8) 9) berechnen können. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 73.

Beispiel 63. Paulischer Segmentträger einfachen Systems. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für Züge von Locomotiven der Radanordnung Fig. 18 berechnet werden. Die Stäbe sind symmetrisch zur Trägermitte und die X-Gurtung auf der ersten Trägerhälfte oben anzunehmen (Fig. 213).

Formberechnung. Wird für die ungünstigste Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(1)\qquad R_m = m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)$$

gesetzt, so hat man nach § 47a mit $n = 2\sigma$ und

$$(2)\qquad c = \frac{\lambda}{h} R_\sigma, \qquad \alpha = \frac{c}{R_m}$$

zur Berechnung der Verticalenlängen wie im vorigen Beispiele

$$(3)\qquad h_m = \frac{-h_{m-1} + \sqrt{\alpha^2(\lambda^2 + h^2_{m-1}) - \lambda^2}}{\alpha^2 - 1}.$$

Die Summenwerthe in 1) können aus der Tabelle in Beispiel 6 entnommen oder wie in Beispiel 42 berechnet werden. Man erhält dann für die erste Richtung des Zuges I

$$R_1 = 1\,.\,9\,.\,91{,}125 + 9\,.\,54{,}2 + 1\,.\,1961 = 3304$$
$$R_2 = 2\,.\,8\,.\,91{,}125 + 8\,.\,144 + 2\,.\,1586 = 5782$$
$$R_3 = 3\,.\,7\,.\,91{,}125 + 7\,.\,285 + 3\,.\,1208 = 7533$$
$$R_4 = 4\,.\,6\,.\,91{,}125 + 6\,.\,490 + 4\,.\,884 = 8663$$
$$R_5 = 5\,.\,5\,.\,91{,}125 + 5\,.\,714 + 5\,.\,617 = 8933,$$

und für die zweite Richtung des Zuges I

$$R_1 = 1\,.\,9\,.\,91{,}125 + 9\,.\,19{,}2 + 1\,.\,2191 = 3184$$
$$R_2 = 2\,.\,8\,.\,91{,}125 + 8\,.\,89{,}4 + 2\,.\,1745 = 5663$$
$$R_3 = 3\,.\,7\,.\,91{,}125 + 7\,.\,222 + 3\,.\,1352 = 7524$$
$$R_4 = 4\,.\,6\,.\,91{,}125 + 6\,.\,383 + 4\,.\,1016 = 8549$$
$$R_5 = 5\,.\,5\,.\,91{,}125 + 5\,.\,617 + 5\,.\,714 = 8933,$$

sodass wieder die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung allein genügt hätte. Die Gleichungen 2) 3) ergeben nun

$$c = \frac{4{,}5}{6}\,8933 = 6700,$$

$$\alpha_1 = \frac{6700}{3304} = 2{,}028$$

$$\alpha_2 = \frac{6700}{5782} = 1{,}159$$

$$\alpha_3 = \frac{6700}{7533} = 0{,}889$$

$$\alpha_4 = \frac{6700}{8663} = 0{,}773$$

$$\alpha_5 = \frac{6700}{8933} = 0{,}750,$$

$$h_1 = \frac{-0 \quad + \sqrt{2{,}028^2\,(4{,}5^2 + 0 \quad) - 4{,}5^2}}{2{,}028^2 - 1} = 2{,}551 \text{ m}$$

$$h_2 = \frac{-2{,}551 + \sqrt{1{,}159^2\,(4{,}5^2 + 2{,}551^2) - 4{,}5^2}}{1{,}159^2 - 1} = 4{,}109 \text{ „}$$

$$h_3 = \frac{-4{,}109 + \sqrt{0{,}889^2\,(4{,}5^2 + 4{,}109^2) - 4{,}5^2}}{0{,}889^2 - 1} = 5{,}211 \text{ „}$$

$$h_4 = \frac{-5{,}211 + \sqrt{0{,}773^2\,(4{,}5^2 + 5{,}211^2) - 4{,}5^2}}{0{,}773^2 - 1} = 5{,}887 \text{ „}$$

$$h_5 = \frac{-5{,}887 + \sqrt{0{,}750^2\,(4{,}5^2 + 5{,}887^2) - 4{,}5^2}}{0{,}750^2 - 1} = 6{,}002 \text{ „}.$$

Mit diesen α, h unter Berücksichtigung von § 47, 7) folgen weiter

für $m =$	1	2	3	4	5:
$x_m = \alpha h_m =$	5,173	4,762	4,633	4,551	4,501 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$	4,5	5,173	6,094	6,885	7,410 m
$\varepsilon = \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	2,64	4,73	8,71	52,19.

Die ermittelte Trägerhöhe von 6,002 m kommt der gewünschten von 6 m so nahe, dass man den Träger damit ausführen oder 6 m ohne Aenderung der Rechnung annehmen kann. Andernfalls würde nach Ermittelung der h_m und von $x_\sigma = x_5$ die Berechnung der α, h_m zufolge § 47, 8) mit

$$c = \frac{x_\sigma}{h} R_\sigma = \frac{4{,}501}{6}\,8933 = 6701$$

nochmals zu beginnen und alles Weitere ganz wie vorstehend durchzuführen sein.

Beanspruchungen. Für die Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe hat man nach § 47, 5) 7) und § 31, 16)

$$(4) \qquad X = -\frac{c}{l}, \qquad \mathfrak{X}_m = -m(n-m)\alpha\frac{g\lambda}{2},$$

$$(5) \qquad Z_m = \frac{c}{l}\frac{z_m}{x_{m-1}}, \qquad \mathfrak{Z}_m = -\frac{z_m}{x_{m-1}}\mathfrak{X}_{m-1}.$$

Die constante obere Grenzbeanspruchung des Obergurts ist also

$$X = -\frac{6700}{45} = -148{,}89 \text{ tn},$$

während die Eigengewichtsbeanspruchungen oder unteren Grenzbeanspruchungen desselben in Tonnen:

$$\mathfrak{X}_1 = -1 \,.\, 9 \,.\, 2{,}028 \,.\, 2{,}025 = -36{,}96$$
$$\mathfrak{X}_2 = -2 \,.\, 8 \,.\, 1{,}159 \,.\, 2{,}025 = -37{,}55$$
$$\mathfrak{X}_3 = -3 \,.\, 7 \,.\, 0{,}889 \,.\, 2{,}025 = -37{,}80$$
$$\mathfrak{X}_4 = -4 \,.\, 6 \,.\, 0{,}773 \,.\, 2{,}025 = -37{,}57$$
$$\mathfrak{X}_5 = -5 \,.\, 5 \,.\, 0{,}750 \,.\, 2{,}025 = -37{,}97,$$

und beide Grenzbeanspruchungen des Untergurts mit $z_m = \lambda$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{670}{5{,}173} = 129{,}52 \qquad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \frac{4{,}5}{5{,}173}\,36{,}96 = 32{,}15$$

$$Z_3 = \frac{670}{4{,}762} = 140{,}70 \qquad \mathfrak{Z}_3 = \frac{4{,}5}{4{,}762}\,37{,}55 = 35{,}44$$

$$Z_4 = \frac{670}{4{,}633} = 144{,}61 \qquad \mathfrak{Z}_4 = \frac{4{,}5}{4{,}633}\,37{,}80 = 36{,}71$$

$$Z_5 = \frac{670}{4{,}551} = 147{,}22 \qquad \mathfrak{Z}_5 = \frac{4{,}5}{4{,}551}\,37{,}57 = 37{,}15.$$

Für die Beanspruchungen der Füllungsglieder durch Eigengewicht allein bleiben die Gleichungen 6) 7) des vorigen Beispiels gültig, welche bei gleichem Vorgehen wie dort die folgenden Werthe in Tonnen liefern:

$$\mathfrak{D}_2 = 3{,}86 \qquad \mathfrak{D}_3 = 1{,}68 \qquad \mathfrak{D}_4 = 0{,}65 \qquad \mathfrak{D}_5 = 1{,}33$$
$$\mathfrak{V}_1 = 2{,}70 \qquad \mathfrak{V}_2 = 0{,}80 \qquad \mathfrak{V}_3 = 1{,}57 \qquad \mathfrak{V}_4 = 2{,}21.$$

Zur Berechnung der mittleren Verticale ergibt die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf Knotenpunkt 5 des Obergurts für beliebige Belastung

$$(6) \qquad V_5 + 0{,}3 \,.\, 4{,}5 + \frac{0{,}115}{4{,}501}\,2\,X_5 = 0,$$

wonach die Eigengewichtsbeanspruchung $\mathfrak{V}_5 = 0{,}59$ tn. Die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder berechnet man nach § 33, 7) 8) 11) 12) wie folgt:

Zug II (Fig. 22) von Verticale m bis n, Vorderrad O bei m,

(7) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon l} \sum_m^n P(l-a),$$

Zug II von 0 bis Verticale $m-1$, Vorderrad O bei $m-1$,

(8) $$D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m + n}{\varepsilon l} \sum_0^{m-1} Pa;$$

Zug II von Verticale $m+1$ bis n, Vorderrad O bei $m+1$,

(9) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{v - m}{v l} \sum_{m+1}^n P(l-a),$$

Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

(10) $$V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{v - m + n}{v l} \sum_0^m Pa.$$

Diese Gleichungen liefern mit den aus der Tabelle des Beispiels 6 entnommenen, oder wie in Beispiel 42 berechneten Werthen der Summenausdrücke in Tonnen für die Diagonalen:

$$D_2 = 3{,}86 + \frac{5{,}17 \,.\, 0{,}64 \,.\, 1836}{2{,}55 \,.\, 2{,}64 \,.\, 45} = 23{,}91$$

$$D_3 = 1{,}68 + \frac{6{,}09 \,.\, 1{,}73 \,.\, 1442}{4{,}11 \,.\, 4{,}73 \,.\, 45} = 19{,}05$$

$$D_4 = 0{,}65 + \frac{6{,}88 \,.\, 4{,}71 \,.\, 1087}{5{,}21 \,.\, 8{,}71 \,.\, 45} = 17{,}90$$

$$D_5 = 1{,}33 + \frac{7{,}41 \,.\, 47{,}19 \,.\, 776}{5{,}89 \,.\, 52{,}19 \,.\, 45} = 20{,}95,$$

$$D_2 = 3{,}86 - \frac{5{,}17 \,.\, 10{,}64 \,.\, 60{,}4}{2{,}55 \,.\, 2{,}64 \,.\, 45} = -\ 7{,}11$$

$$D_3 = 1{,}68 - \frac{6{,}09 \,.\, 11{,}73 \,.\, 170}{4{,}11 \,.\, 4{,}73 \,.\, 45} = -\ 12{,}20$$

$$D_3 = 0{,}65 - \frac{6{,}88 \,.\, 14{,}71 \,.\, 316}{5{,}21 \,.\, 8{,}71 \,.\, 45} = -\ 15{,}01$$

$$D_5 = 1{,}33 - \frac{7{,}41 \,.\, 57{,}19 \,.\, 530}{5{,}89 \,.\, 52{,}19 \,.\, 45} = -\ 14{,}91,$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = 2{,}70 - \frac{0 \,.\, 1836}{1 \,.\, 45} = 2{,}70$$

$$V_2 = 0{,}80 - \frac{0{,}64 \,.\, 1442}{2{,}64 \,.\, 45} = -\ 6{,}97$$

$$V_3 = 1{,}57 - \frac{1{,}73 \,.\, 1087}{4{,}73 \,.\, 45} = -\ 7{,}26$$

$$V_4 = 2,21 - \frac{4,71 \,.\, 776}{8,71 \,.\, 45} = -\,7,12$$

$$V_5 = \mathfrak{V}_5 = 2,36,$$

$$V_1 = 2,70 + \frac{10 \,.\, 60,4}{1 \,.\, 45} = 16,12$$

$$V_2 = 0,80 + \frac{10,64 \,.\, 170}{2,64 \,.\, 45} = 15,56$$

$$V_3 = 1,57 + \frac{11,73 \,.\, 316}{4,73 \,.\, 45} = 18,98$$

$$V_4 = 2,21 + \frac{14,71 \,.\, 530}{8,71 \,.\, 45} = 22,10$$

$$V_5 = 148,89 \frac{0,23}{4,5} - 1,35 = 6,26.$$

Ganz wie in Beispiel 36 wird der obere Grenzwerth von V_1 noch grösser als mit Zug II, wenn Zug I mit Rad O bei Verticale 1 steht, nämlich

$$V_1 = K_u = 2,70 + 6 + 2 \,.\, 6 \frac{3,2}{4,5} + 4 \frac{2}{4,5} = 19,01 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 73.

Beispiel 64. Paulischer Segmentträger einfachen Systems. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Träger des vorletzten Beispiels auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen.

Nach A. 32 sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für einen durch den angenommenen Zug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem max M_x bei der Trägermitte entspricht. Die Tabelle in Beispiel 8 gibt hierfür $p = 2,63$ tn, und da dieser Werth bereits im vorletzten Beispiele verwendet wurde (wobei sich die obere Gurtungsbeanspruchung des Polygonalgurts — 148,92 gegen — 148,89 im vorigen Beispiele ergab), so bleiben Form, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzwerthe der Gurtungskräfte genau wie dort bestimmt. Nur die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder sind abweichend zu berechnen.

Aufgabe 32 liefert die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen, mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(1)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{\lambda}{2n}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon}(n-m)^2 p_v, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{\lambda}{2n}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{\varepsilon - m + n}{\varepsilon}(m-1)^2 p_c, \end{cases}$$

und diejenigen der Verticalen, mit $c = m\lambda$, $v = (m+1)\lambda$,

$$(2)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{\lambda}{2n}\frac{\nu - m}{\nu}(n-m-1)^2 p_v, \\ V_m = \mathfrak{B}_m + \frac{\lambda}{2n}\frac{\nu - m + n}{\nu} m^2 p_c, \end{cases}$$

unter p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente verstanden, welche bei einem durch den angenommenen Zug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem pos max V_x bei $x = v$ bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen. Wir entnehmen dieselben aus der Tabelle des Beispiels 8 und erhalten damit in Tonnen für die Diagonalen:

$$D_2 = 2{,}75 + 0{,}225\frac{5{,}13 \,.\, 0{,}52}{2{,}46 \,.\, 2{,}52}\, 64 \,.\, 2{,}83 = 20{,}29$$

$$D_3 = 1{,}52 + 0{,}225\frac{6{,}07 \,.\, 1{,}67}{4{,}08 \,.\, 4{,}67}\, 49 \,.\, 2{,}90 = 18{,}53$$

$$D_4 = 1{,}12 + 0{,}225\frac{6{,}87 \,.\, 5{,}29}{5{,}19 \,.\, 9{,}29}\, 36 \,.\, 2{,}98 = 19{,}32$$

$$D_5 = 0{,}57 + 0{,}225\frac{7{,}35 \,.\, 27{,}11}{5{,}82 \,.\, 32{,}11}\, 25 \,.\, 3{,}06 = 18{,}92,$$

$$D_2 = 2{,}75 - 0{,}225\frac{5{,}13 \,.\, 10{,}52}{2{,}46 \,.\, 2{,}52}\, 1 \,.\, 5{,}94 = -\ 8{,}88$$

$$D_3 = 1{,}52 - 0{,}225\frac{6{,}07 \,.\, 11{,}67}{4{,}08 \,.\, 4{,}67}\, 4 \,.\, 4{,}21 = -\ 12{,}57$$

$$D_4 = 1{,}12 - 0{,}225\frac{6{,}87 \,.\, 15{,}29}{5{,}19 \,.\, 9{,}29}\, 9 \,.\, 3{,}46 = -\ 14{,}14$$

$$D_5 = 0{,}57 - 0{,}225\frac{7{,}35 \,.\, 37{,}11}{5{,}82 \,.\, 32{,}11}\, 16 \,.\, 3{,}27 = -\ 16{,}61,$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = 2{,}70 - 0{,}225\frac{0}{1}\, 64 \,.\, 2{,}83 = \ 2{,}70$$

$$V_2 = 1{,}38 - 0{,}225\frac{0{,}52}{2{,}52}\, 49 \,.\, 2{,}90 = -\ 4{,}42$$

$$V_3 = 1{,}68 - 0{,}225\,\frac{1{,}67}{4{,}67}\,36\,.\,2{,}98 = -\,6{,}95$$

$$V_4 = 1{,}86 - 0{,}225\,\frac{5{,}29}{9{,}29}\,25\,.\,3{,}06 = -\,7{,}94,$$

$$V_1 = 2{,}70 + 0{,}225\,\frac{10}{1}\quad 1\,.\,5{,}94 = 16{,}07$$

$$V_2 = 1{,}38 + 0{,}225\,\frac{10{,}52}{2{,}52}\quad 4\,.\,4{,}21 = 17{,}20$$

$$V_3 = 1{,}68 + 0{,}225\,\frac{11{,}67}{4{,}67}\quad 9\,.\,3{,}46 = 19{,}19$$

$$V_4 = 1{,}86 + 0{,}225\,\frac{15{,}29}{9{,}29}\,16\,.\,3{,}27 = 21{,}23.$$

Die Grenzwerthe von V_5 bleiben wie in Beispiel 62 bestimmt.

Wie im vorigen Beispiele mit Zug I ein grösseres V_1 als mit Zug II entstehen konnte, so gilt Analoges für die entsprechenden Lastäquivalente. Wir erhalten wie am Schlusse des Beispiels 61 den oberen Grenzwerth von V_1

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 + p\lambda = 2{,}70 + 3{,}62\,.\,4{,}5 = 18{,}99 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Bemerkungen. Vorstehende Zahlenwerthe müssen nach Aufgabe 32 (abgesehen von den durch Interpolationen der p und Vernachlässigung von Decimalen entstehenden kleinen Differenzen) genau mit denjenigen Werthen übereinstimmen, welche sich für die betrachtete Trägerform mit den Radlastzügen selbst ergeben. Von den Resultaten des vorigen Beispiels weichen sie deshalb ab, weil infolge der dem Zuge I nur näherungsweise entsprechenden Annahme eines constanten p für die Gurtungskräfte hier eine etwas andere Form wie dort erhalten wurde. Berechnet man für die eine oder andere dieser beiden Formen die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder mit Radlastzügen und mit Lastäquivalenten, so ergeben sich genau dieselben Grenzbeanspruchungen. Wenn irgendwo, so ist beim Paulischen Träger die Berechnung mit Lastäquivalenten berechtigt (wenigstens für die Formberechnung), weil man damit eine regelmässigere Form als mit Radlastzügen erhält.

Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 73.

Beispiel 65. Paulischer Linsenträger einfachen Systems. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sollen Träger einfachen Systems mit Verticalen, zu einer Horizontalen symmetrischen Gurtungen und constanter Maximalbean-

spruchung des Obergurts unter folgenden Voraussetzungen berechnet werden: Spannweite $l = 45$ m, grösste Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, wovon 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts kommen. Die bewegte Last ist zu $p = 2{,}63$ tn per laufenden Meter der ergriffenen Strecke anzurechnen.

Formberechnung. Denkt man sich zunächst alle Diagonalen von der in Fig. 114 angedeuteten Stellung, so hat man mit den in Beispiel 62 ausgedrückten und berechneten c, α zur Ermittelung der Verticalenlängen nach § 46, 12) die Gleichung

$$(1) \qquad h_m = \frac{-h_{m-1} + 2\sqrt{\alpha^2 (4\lambda^2 + h^2_{m-1}) - \lambda^2}}{4\alpha^2 - 1}.$$

Wir erhalten daraus

$$h_1 = \frac{-0 + 2\sqrt{2{,}083^2(81 + 0) - 20{,}25}}{4 \cdot 2{,}083^2 - 1} = 2{,}225 \text{ m } (2{,}161)$$

$$h_2 = \frac{-2{,}225 + 2\sqrt{1{,}172^2(81 + 2{,}225^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 1{,}172^2 - 1} = 3{,}907 \text{ ,, } (3{,}841)$$

$$h_3 = \frac{-3{,}907 + 2\sqrt{0{,}893^2(81 + 3{,}907^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 0{,}893^2 - 1} = 5{,}082 \text{ ,, } (5{,}041)$$

$$h_4 = \frac{-5{,}082 + 2\sqrt{0{,}781^2(81 + 5{,}082^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 0{,}781^2 - 1} = 5{,}779 \text{ ,, } (5{,}762)$$

$$h_5 = \frac{-5{,}779 + 2\sqrt{0{,}750^2(81 + 5{,}779^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 0{,}750^2 - 1} = 6{,}002 \text{ ,, } (6{,}002)$$

$$h_6 = \frac{-6{,}002 + 2\sqrt{0{,}781^2(81 + 6{,}002^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 0{,}781^2 - 1} = 5{,}764 \text{ ,, } (5{,}762)$$

$$h_7 = \frac{-5{,}764 + 2\sqrt{0{,}893^2(81 + 5{,}764^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 0{,}893^2 - 1} = 5{,}072 \text{ ,, } (5{,}041)$$

$$h_8 = \frac{-5{,}072 + 2\sqrt{1{,}172^2(81 + 5{,}072^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 1{,}172^2 - 1} = 3{,}874 \text{ ,, } (3{,}841)$$

$$h_9 = \frac{-3{,}874 + 2\sqrt{2{,}083^2(81 + 3{,}874^2) - 20{,}25}}{4 \cdot 2{,}083^2 - 1} = 2{,}137 \text{ ,, } (2{,}161).$$

In Klammern haben wir diejenigen Verticalenlängen beigesetzt, welche einem Parabelträger der Höhe 6,002 m entsprechen würden. Die Annäherung der beiden Linsenträger ist grösser als die der entsprechenden Segmentträger (Beispiel 62).

Sowohl die erste als die zweite Hälfte des erhaltenen, zur Trägermitte unsymmetrischen Trägers können zur Herstellung eines sym-

metrischen Trägers verwendet werden. Beide so entstehenden Träger erhalten dieselben Grenzbeanspruchungen des Obergurts, während die Eigengewichtsbeanspruchungen und grössten Grenzbeanspruchungen der Diagonalen für Fig. 115 Zug, für Fig. 116 Druck bedeuten. Wir wählen das System Fig. 115 und erhalten mit den berechneten α, h unter Berücksichtigung von 46, 11) und § 16, 1) 17) 18)

für	$m =$ 1	2	3	4	5:
$x_m = z_m = \alpha h_m =$	4,634	4,579	4,538	4,513	4,501 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m + h_{m-1}}{2}\right)^2} =$	4,634	5,445	6,360	7,054	7,413 m
$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	2,32	4,33	8,29	26,91
$\nu = \frac{2h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}} =$	1,14	2,74	5,43	12,56	∞.

Wäre von vorn herein beabsichtigt gewesen, einen symmetrischen Träger des Systems Fig. 115 anzuwenden, so hätte natürlich die obige Berechnung der h auf der zweiten Trägerhälfte unterbleiben können.

Die ermittelte Trägerhöhe von 6,002 m stimmt genügend mit der gewünschten von 6 m überein, um den Träger danach ausführen oder 6 m ohne Aenderung der Rechnung wählen zu können. Andernfalls wäre nach Ermittelung der h und von $x_\sigma = x_5$ die Berechnung zufolge § 46) 13) mit

$$c = \frac{n^2}{4h} x_\sigma = \frac{100}{4 \cdot 6} 4{,}501 = 18{,}754$$

anstatt 18,75 nochmals zu beginnen und ganz wie oben durchzuführen gewesen.

Beanspruchungen. Für die Grenzwerthe der Gurtungskräfte gelten die Gleichungen B. 62, 3) 4). Eine Ausnahme macht die Beanspruchung des Stabes 1 im Untergurt, für welche die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf Knotenpunkt 0 für beliebige Belastung liefert

$$(2) \qquad Z_1 = -X_1.$$

Wir erhalten aus diesen Gleichungen die Grenzbeanspruchungen des Obergurts wie beim Segmentträger des Beispiels 62

$$X = -148{,}92, \qquad \mathfrak{X} = -37{,}97 \text{ tn},$$

und diejenigen des Untergurts:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 148{,}92 \text{ tn} & \mathfrak{Z}_1 &= 37{,}97 \text{ tn} \\ Z_2 &= 147{,}15 \text{ „} & \mathfrak{Z}_2 &= 37{,}52 \text{ „} \\ Z_3 &= 147{,}60 \text{ „} & \mathfrak{Z}_3 &= 37{,}64 \text{ „} \\ Z_4 &= 148{,}03 \text{ „} & \mathfrak{Z}_4 &= 37{,}75 \text{ „} \\ Z_5 &= 148{,}47 \text{ „} & \mathfrak{Z}_5 &= 37{,}86 \text{ „.} \end{aligned}$$

Wenn also auch theoretisch die Grenzbeanspruchungen des Untergurts nicht constant sind, so kommen sie doch den constanten Grenzbeanspruchungen des Obergurts so nahe, dass man auch dem Untergurte constanten Querschnitt geben kann.

Die Eigengewichtsbeanspruchungen und Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder sind durch die Gleichungen B. 62, 6)—9) bestimmt. Nur für die mittlere Verticale ergibt abweichend davon die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 5 des Obergurts bei jeder Belastung

$$(3) \qquad V_5 + 0{,}3 \,.\, 4{,}5 + \frac{0{,}22}{4{,}50} X_5 = 0\,.$$

Wir erhalten danach bei gleichem Vorgehen wie in Beispiel 62 in Tonnen die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{D}_2 = 0{,}51 & \mathfrak{D}_3 = 0{,}49 & \mathfrak{D}_4 = 0{,}30 & \mathfrak{D}_5 = 0{,}09 \\ \mathfrak{V}_1 = 0{,}46 & \mathfrak{V}_2 = 0{,}35 & \mathfrak{V}_3 = 0{,}41 & \mathfrak{V}_4 = 0{,}48 & \mathfrak{V}_5 = 0{,}51\,, \end{array}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_2 = 0{,}51 + 5{,}917 \frac{0{,}32 \,.\, 64 \,.\, 1{,}32 \,.\, 5{,}44}{12{,}38 \,.\, 2{,}32 \,.\, 2{,}22} = 13{,}63$$

$$D_3 = 0{,}49 + 5{,}917 \frac{1{,}33 \,.\, 49 \,.\, 3{,}33 \,.\, 6{,}36}{31{,}97 \,.\, 4{,}33 \,.\, 3{,}91} = 15{,}58$$

$$D_4 = 0{,}30 + 5{,}917 \frac{4{,}29 \,.\, 36 \,.\, 7{,}29 \,.\, 7{,}05}{68{,}61 \,.\, 8{,}29 \,.\, 5{,}08} = 16{,}55$$

$$D_5 = 0{,}09 + 5{,}917 \frac{21{,}91 \,.\, 25 \,.\, 25{,}97 \,.\, 7{,}41}{237{,}2 \,.\, 26{,}91 \,.\, 5{,}78} = 16{,}97,$$

$$D_2 = 0{,}51 - 5{,}917 \frac{10{,}32 \,.\, 1 \,.\, 5{,}44}{12{,}88 \,.\, 2{,}22} = -\,11{,}11$$

$$D_3 = 0{,}49 - 5{,}917 \frac{11{,}33 \,.\, 4 \,.\, 6{,}36}{31{,}97 \,.\, 3{,}91} = -\,13{,}15$$

$$D_4 = 0{,}30 - 5{,}917 \frac{14{,}29 \,.\, 9 \,.\, 7{,}05}{68{,}61 \,.\, 5{,}08} = -\,15{,}09$$

$$D_5 = 0{,}09 - 5{,}917 \frac{31{,}91 \,.\, 16 \,.\, 7{,}41}{237{,}2 \,.\, 5{,}78} = -\,16{,}25,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = 0{,}46 - 5{,}917 \frac{0{,}14 \cdot 64}{11{,}26} = -\ 4{,}25$$

$$V_2 = 0{,}35 - 5{,}917 \frac{0{,}74 \cdot 49}{26{,}66} = -\ 7{,}70$$

$$V_3 = 0{,}41 - 5{,}917 \frac{2{,}43 \cdot 36}{51{,}87} = -\ 9{,}48$$

$$V_4 = 0{,}48 - 5{,}917 \frac{8{,}56 \cdot 25}{117{,}0} = -\ 10{,}34$$

$$V_5 = \mathfrak{V}_5 = 0{,}51,$$

$$V_1 = 0{,}46 + 5{,}917 \frac{10{,}14 \cdot 1 \cdot 2{,}14}{11{,}26 \cdot 1{,}14} = 10{,}46$$

$$V_2 = 0{,}35 + 5{,}917 \frac{10{,}74 \cdot 4 \cdot 3{,}74}{26{,}66 \cdot 2{,}74} = 13{,}27$$

$$V_3 = 0{,}41 + 5{,}917 \frac{12{,}43 \cdot 9 \cdot 6{,}43}{51{,}87 \cdot 5{,}43} = 15{,}52$$

$$V_4 = 9{,}48 + 5{,}917 \frac{18{,}56 \cdot 16 \cdot 13{,}56}{117{,}0 \cdot 12{,}56} = 16{,}69$$

$$V_5 = 148{,}92 \frac{11}{225} - 1{,}35 = 5{,}93.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Für einen parabolischen Linsenträger wären nach §§ 41, 42 die Eigengewichtsbeanspruchungen der Diagonalen gleich Null, diejenigen der Verticalen $\frac{g_s - g_x}{2} \lambda = 0{,}675$ und beide Grenzbeanspruchungen einer bestimmten Diagonale sowie entsprechende Grenzbeanspruchungen der zwei Gurtungsstäbe eines Feldes numerisch gleich gewesen. — Wie in Beispiel 35 hätten wir auch hier je eine der beiden Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder aus den dortigen Gleichungen 8) 9) berechnen können.

Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 74.

Beispiel 66. Paulischer Linsenträger einfachen Systems. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für Züge von Locomotiven der Radanordnung Fig. 18 berechnet werden. Die Stäbe sind symmetrisch zur Trägermitte und die X-Gurtung auf der ersten Trägerhälfte oben anzunehmen (Fig. 117).

Formberechnung. Mit den wie in Beispiel 63 ausgedrückten und

berechneten R, c, α hat man zur Berechnung der Verticalenlängen wie im vorigen Beispiele

$$(1) \qquad h_m = \frac{-h_{m-1} + 2\sqrt{\alpha^2(4\lambda^2 + h^2_{m-1}) - \lambda^2}}{4\alpha^2 - 1},$$

woraus in Metern folgen:

$$h_1 = \frac{-0 \quad + 2\sqrt{2{,}028^2(81 + 0 \quad) - 20{,}25}}{4 \, . \, 2{,}028^2 - 1} = 2{,}290$$

$$h_2 = \frac{-2{,}290 + 2\sqrt{1{,}159^2(81 + 2{,}290^2) - 20{,}25}}{4 \, . \, 1{,}159^2 - 1} = 3{,}948$$

$$h_3 = \frac{-3{,}948 + 2\sqrt{0{,}889^2(81 + 3{,}948^2) - 20{,}25}}{4 \, . \, 0{,}889^2 - 1} = 5{,}103$$

$$h_4 = \frac{-5{,}103 + 2\sqrt{0{,}773^2(81 + 5{,}103^2) - 20{,}25}}{4 \, . \, 0{,}773^2 - 1} = 5{,}841 \, .$$

$$h_5 = \frac{-5{,}841 + 2\sqrt{0{,}750^2(81 + 5{,}841^2) - 20{,}25}}{4 \, . \, 0{,}750^2 - 1} = 6{,}001 \, .$$

Weiter erhalten wir unter Berücksichtigung von § 47, 7) und § 16, 1) 17) 18)

für	$m =$ 1	2	3	4	5:
$x_m = z_m = \alpha h_m =$	4,644	4,576	4,537	4,515	4,501 m
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m + h_{m-1}}{2}\right)^2} =$	4,644	5,475	6,382	7,085	7,437 m
$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	2,38	4,42	7,92	37,51
$v = \frac{2h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}} =$	1,16	2,81	5,39	13,01	∞.

Die ermittelte Trägerhöhe von 6,001 m kommt der gewünschten von 6 m so nahe, dass man den Träger damit ausführen oder 6 m ohne Aenderung der Rechnung annehmen kann. Andernfalls wäre nach Ermittelung der h_m und von $x_\sigma = x_5$ die Berechnung der α, h_m zufolge § 47, 8) mit

$$c = \frac{x_\sigma}{h} R_\sigma = \frac{4{,}501}{6} 8933 = 6701$$

nochmals zu beginnen und alles Weitere wie vorstehend durchzuführen gewesen.

Beanspruchungen. Die Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind durch die Gleichungen B. 63, 4) 5) bestimmt. Eine Ausnahme macht die Beanspruchung des Stabes 1 im Untergurt, für welchen wie im

vorigen Beispiele bei jeder Belastung $Z_1 = - X_1$ ist. Wir erhalten danach die constante obere Grenzbeanspruchung und die Eigengewichtsbeanspruchungen oder unteren Grenzbeanspruchungen des Obergurts wie beim Segmentträger des Beispiels 63 in Tonnen:

$$X = - 148{,}89$$

$$\mathfrak{X}_1 = - 36{,}96 \qquad \mathfrak{X}_2 = - 37{,}55 \qquad \mathfrak{X}_3 = - 37{,}80$$

$$\mathfrak{X}_4 = - 37{,}57 \qquad \mathfrak{X}_5 = - 37{,}97,$$

während die Grenzbeanspruchungen des Untergurts folgen:

$$Z_1 = 148{,}89 \qquad \mathfrak{Z}_1 = 36{,}96$$

$$Z_2 = 146{,}66 \qquad \mathfrak{Z}_2 = 36{,}41$$

$$Z_3 = 147{,}55 \qquad \mathfrak{Z}_3 = 37{,}21$$

$$Z_4 = 148{,}14 \qquad \mathfrak{Z}_4 = 37{,}61$$

$$Z_5 = 148{,}44 \qquad \mathfrak{Z}_5 = 37{,}46.$$

Wie in Beispiel 65 können auch hier beide Gurtungen constante Querschnitte erhalten.

Für die Beanspruchungen der Füllungsglieder durch Eigengewicht allein bleiben die Gleichungen B. 62, 6) 7) gültig, welche bei gleichem Vorgehen wie dort nachstehende Werthe in Tonnen liefern:

$$\mathfrak{D}_2 = 1{,}43 \qquad \mathfrak{D}_3 = 0{,}81 \qquad \mathfrak{D}_4 = - 0{,}09 \qquad \mathfrak{D}_5 = 0{,}86$$

$$\mathfrak{V}_1 = 0{,}19 \qquad \mathfrak{V}_2 = 0{,}06 \qquad \mathfrak{V}_3 = 0{,}47 \qquad \mathfrak{V}_4 = 0{,}36 \qquad \mathfrak{V}_5 = 1{,}35.$$

Nur die Beanspruchung der mittleren Verticale ergibt sich aus der bei beliebiger Belastung gültigen Gleichung

$$(2) \qquad V_5 + 0{,}3 \,.\, 4{,}5 + \frac{0{,}160}{4{,}501} 2\, X_5 = 0,$$

welche die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ für den mittleren Knotenpunkt des Obergurts ausdrückt. Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen ergeben sich aus B. 63, 7) 8) in Tonnen:

$$D_2 = 1{,}43 + \frac{5{,}47 \,.\, 0{,}38 \,.\, 1836}{2{,}29 \,.\, 2{,}38 \,.\, 45} = 16{,}99$$

$$D_3 = 0{,}81 + \frac{6{,}38 \,.\, 1{,}42 \,.\, 1442}{3{,}95 \,.\, 4{,}42 \,.\, 45} = 17{,}44$$

$$D_4 = - 0{,}09 + \frac{7{,}08 \,.\, 3{,}92 \,.\, 1087}{5{,}10 \,.\, 7{,}92 \,.\, 45} = 16{,}46$$

$$D_5 = 0{,}86 + \frac{7{,}44 \,.\, 32{,}51 \,.\, 776}{5{,}84 \,.\, 37{,}51 \,.\, 45} = 19{,}91,$$

$$D_2 = \quad 1{,}43 - \frac{5{,}47 \cdot 10{,}38 \cdot 60{,}4}{2{,}29 \cdot 2{,}38 \cdot 45} = -12{,}55$$

$$D_3 = \quad 0{,}81 - \frac{6{,}38 \cdot 11{,}42 \cdot 170}{3{,}95 \cdot 4{,}42 \cdot 45} = -14{,}96$$

$$D_4 = -0{,}09 - \frac{7{,}08 \cdot 13{,}92 \cdot 316}{5{,}10 \cdot 7{,}92 \cdot 45} = -17{,}22$$

$$D_5 = \quad 0{,}86 - \frac{7{,}44 \cdot 42{,}51 \cdot 530}{5{,}84 \cdot 37{,}51 \cdot 45} = -16{,}12,$$

und diejenigen der Verticalen nach B. 63, 9) 10):

$$V_1 = 0{,}19 - \frac{0{,}16 \cdot 1836}{1{,}16 \cdot 45} = -\ 5{,}44$$

$$V_2 = 0{,}06 - \frac{0{,}81 \cdot 1442}{2{,}81 \cdot 45} = -\ 9{,}18$$

$$V_3 = 0{,}47 - \frac{2{,}39 \cdot 1087}{5{,}39 \cdot 45} = -10{,}24$$

$$V_4 = 0{,}36 - \frac{9{,}01 \cdot 776}{13{,}01 \cdot 45} = -11{,}55$$

$$V_5 = \mathfrak{V}_5 \qquad\qquad = \quad 1{,}35,$$

$$V_1 = 0{,}19 + \frac{10{,}16 \cdot 60{,}4}{1{,}16 \cdot 45} = 11{,}95$$

$$V_2 = 0{,}06 + \frac{10{,}81 \cdot 170}{2{,}81 \cdot 45} = 14{,}59$$

$$V_3 = 0{,}47 + \frac{12{,}39 \cdot 316}{5{,}39 \cdot 45} = 16{,}61$$

$$V_4 = 0{,}36 + \frac{19{,}01 \cdot 530}{13{,}01 \cdot 45} = 17{,}52$$

$$V_5 = \frac{0{,}32}{4{,}50}\, 148{,}89 - 1{,}35 \quad = \ 9{,}24.$$

Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt.

Für V_1 ergibt Zug I bei der in Fig. 118 angedeuteten Stellung einen grössern positiven Maximalwerth als vorstehend mit Zug II erhalten wurde. Als Ausdruck desselben hat man nach § 33, 5) bei beliebigen (gewöhnlichen) Gurtungsformen und auf die Knotenpunkte der unten liegenden Z-Gurtung wirkender Fahrbahnlast

$$(3) \quad V_1 = \mathfrak{V}_1 + \Big[(n - 1 + v) \sum_0^1{}' Pa + (nv - v + 1) \sum_1^z{}' P(z - a)\Big] \frac{1}{vl}$$

$$\text{mit} \quad z = \frac{v + 1}{nv - v + 1}\, l,$$

wonach in unserm Falle mit $z = 8{,}50$

$$V_1 = 0{,}46 + [10{,}16\,(6\,.\,4{,}5 + 6\,.\,3{,}2 + 4\,.\,2) + 11{,}44\,.\,6\,.\,2{,}70]\,\frac{1}{1{,}16\,.\,45} = 14{,}56 \text{ tn}.$$

Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 74.

Beispiel 67. Paulischer Linsenträger einfachen Systems. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Träger des vorletzten Beispiels auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen.

Das im ersten Absatze des Beispiels 64 Gesagte ist hier zu wiederholen. Demgemäss bleiben die Form, Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und sämmtliche Stabkräfte für Eigengewicht allein ganz wie in Beispiel 65 bestimmt. Für die Füllungsglieder hat man weiter die Gleichungen B. 64, 1) 2); sie liefern in Tonnen die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_2 = 0{,}51 + 0{,}225\,\frac{5{,}44\,.\,0{,}32}{2{,}22\,.\,2{,}32}\,64\,.\,2{,}83 = 14{,}28$$

$$D_3 = 0{,}49 + 0{,}225\,\frac{6{,}36\,.\,1{,}33}{3{,}91\,.\,4{,}33}\,49\,.\,2{,}90 = 16{,}47$$

$$D_4 = 0{,}30 + 0{,}225\,\frac{7{,}05\,.\,4{,}29}{5{,}08\,.\,8{,}29}\,36\,.\,2{,}98 = 17{,}64$$

$$D_5 = 0{,}48 + 0{,}225\,\frac{7{,}41\,.\,21{,}91}{5{,}78\,.\,26{,}91}\,25\,.\,3{,}06 = 18{,}06,$$

$$D_2 = 0{,}51 - 0{,}225\,\frac{5{,}44\,.\,10{,}32}{2{,}22\,.\,2{,}32}\,1\,.\,5{,}94 = -\,14{,}06$$

$$D_3 = 0{,}49 - 0{,}225\,\frac{6{,}36\,.\,11{,}33}{3{,}91\,.\,4{,}33}\,4\,.\,4{,}21 = -\,12{,}32$$

$$D_4 = 0{,}30 - 0{,}225\,\frac{7{,}05\,.\,14{,}29}{5{,}08\,.\,8{,}29}\,9\,.\,3{,}46 = -\,16{,}46$$

$$D_5 = 0{,}48 - 0{,}225\,\frac{7{,}41\,.\,31{,}91}{5{,}78\,.\,26{,}91}\,16\,.\,3{,}27 = -\,17{,}81,$$

und diejenigen der Verticalen:

$$V_1 = 0{,}46 - 0{,}225\,\frac{0{,}14}{1{,}14}\,64\,.\,2{,}83 = -\;\;4{,}54$$

$$V_2 = 0{,}35 - 0{,}225\,\frac{0{,}74}{2{,}74}\,49\,.\,2{,}90 = -\;\;8{,}29$$

$$V_3 = 0{,}41 - 0{,}225 \frac{2{,}43}{5{,}43} 36 \,.\, 2{,}98 = -10{,}39$$

$$V_4 = 0{,}48 - 0{,}225 \frac{8{,}56}{12{,}56} 25 \,.\, 3{,}06 = -11{,}25,$$

$$V_1 = 0{,}46 + 0{,}225 \frac{10{,}14}{1{,}14} \; 1 \,.\, 5{,}94 = 12{,}35$$

$$V_2 = 0{,}35 + 0{,}225 \frac{10{,}74}{2{,}74} \; 4 \,.\, 4{,}21 = 15{,}20$$

$$V_3 = 0{,}41 + 0{,}225 \frac{12{,}43}{5{,}43} \; 9 \,.\, 3{,}46 = 16{,}45$$

$$V_4 = 0{,}48 + 0{,}225 \frac{18{,}56}{12{,}56} 16 \,.\, 3{,}27 = 17{,}87\,.$$

Für die Grenzbeanspruchungen von V_5 gelten die in Beispiel 65 berechneten Werthe. Die Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Wie im vorigen Beispiele mit Zug I ein grösseres positives V_1 als mit Zug II entstehen konnte, so gilt Analoges für die entsprechenden Lastäquivalente. Nach B. 66, 3) mit $P = pda$ von $a = 0$ bis $a = z$ drückt sich der positive Maximalwerth von V_1 bei beliebigen (gewöhnlichen) Gurtungsformen und auf die Knotenpunkte der untenliegenden Z-Gurtung wirkender Fahrbahnlast aus

$$V_1 = \mathfrak{B}_1 + \left[n - 1 + \nu + (n\nu - \nu + 1)\left(\frac{z - \lambda}{\lambda}\right)^2\right] \frac{p\lambda}{2 n \nu} \text{ mit } z = \frac{\nu + 1}{n\nu - \nu + 1} l,$$

worin p den max M_x eines durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite z entspricht. Wir entnehmen aus der Tabelle in Beispiel 8 für $l = z = 8{,}5$ m $p = 3{,}76$ und erhalten damit

$$V_1 = 0{,}46 + \left(10{,}14 + 11{,}26 \frac{4{,}05^2}{4{,}5^2}\right) \frac{3{,}76}{1{,}14} 0{,}225 = 14{,}76 \text{ tn}.$$

Abgesehen von diesem nur angenähert gültigen Werthe kann der vorletzte Absatz des Beispiels 64 hier Wort für Wort wiederholt werden. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 74.

IV. Abschnitt.

Einfluss der Gegendiagonalen.*

Beispiel 68. Einfaches System mit Gegendiagonalen bei beliebigen Gurtungsformen (Halbparabelträger). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Halbparabelträger einfachen Systems des rechtwinkligen Dreiecks mit horizontalem Untergurte zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe in der Mitte $h = 6$ m, an den Enden $h_0 = 4$ m, Felderzahl $n = 9$. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte festzustellen, wenn sämmtliche Diagonalen nur auf Zug widerstandsfähig sein sollen (Fig. 119).

Wir gehen nach der Anleitung am Schlusse des § 52 vor.

Formberechnung. Nach § 17, 31) hat man für den Pfeil des Parabelbogens, welchem der Obergurt einzuschreiben ist, bei ungeradem n

(1) $$f = \frac{n^2}{n^2 - 1}(h - h_0),$$

also in unserm Falle

$$f = \frac{81}{80} 2 = \frac{81}{40}.$$

Die Länge der Verticale m ist nach § 17, 28)

(2) $$h_m = h_0 + m(n - m)\frac{4f}{n^2}.$$

Wir erhalten nun bei horizontaler Z-Gurtung mit Rücksicht auf § 16, 1) 14) 15)

---

* Träger mit Gegendiagonalen sind ausserhalb dieses Abschnitts behandelt in den Beispielen 41—48 (einfache Parallelträger), 59—61 (Schwedlerträger), 80—83 (continuirliche Gelenkträger), 101—102 (continuirliche Bogenträger).

für						
$m =$	0	1	2	3	4	5:
$h_m =$	4	4,8	5,4	5,8	6	6 m
$\nu = \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		6	9	14,5	30	∞
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$		6,40	6,93	7,36	7,66	7,81 m
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$		5,06	5,04	5,02	5,00	5 m.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 31, 16) bei oben liegender X-Gurtung

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -m(n-m)\frac{x_m}{h_m}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = (m-1)(n-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \left(n - 2m + 1 - m\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(n - 2m + \frac{g_x - g_z}{g} - m\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

also im vorliegenden Falle, mit $n = 9$, $\lambda = 5$, $g = 0{,}9$, $g_x = 0{,}3$, $g_z = 0{,}6$,

$$\mathfrak{X}_m = -2{,}25\, m(9 - m)\frac{x_m}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = 11{,}25\,(m-1)(10-m)\frac{1}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = 2{,}25\left(10 - 2m - m\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = 2{,}25\, m\left(2 + \frac{9-m}{\nu}\right) - 19{,}5\,.$$

Diese Gleichungen liefern nachstehende Werthe in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -18{,}98$	$\mathfrak{Z}_1 = 0$	$\mathfrak{D}_1 = 24{,}00$	$\mathfrak{V}_1 = -12{,}00$
$\mathfrak{X}_2 = -29{,}40$	$\mathfrak{Z}_2 = 18{,}75$	$\mathfrak{D}_2 = 14{,}44$	$\mathfrak{V}_2 = -7{,}00$
$\mathfrak{X}_3 = -35{,}05$	$\mathfrak{Z}_3 = 29{,}17$	$\mathfrak{D}_3 = 8{,}46$	$\mathfrak{V}_3 = -3{,}21$
$\mathfrak{X}_4 = -37{,}50$	$\mathfrak{Z}_4 = 34{,}91$	$\mathfrak{D}_4 = 3{,}96$	$\mathfrak{V}_4 = 0$
$\mathfrak{X}_5 = -37{,}50$	$\mathfrak{Z}_5 = 37{,}50$	$\mathfrak{D}_5 = 0$	$\mathfrak{V}_5 = 3{,}00.$

Die wirkliche Eigengewichtsbeanspruchung der Verticale 5 ist jedoch 0 wie für Verticale 4, während der berechnete Werth $\mathfrak{V}_5 = 3$ tn gelten würde, wenn in den Feldern 5 und 6 die nach 0 hin ansteigenden

Diagonalen (X-Gurtung oben) wirksam wären. Für die Verticale 0 hat man nach A. 19, 5)

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{g_s \lambda}{2} - \frac{g l}{2}, \tag{4}$$

woraus $\mathfrak{V}_0 = -18{,}75$ tn.

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben berechneten Beanspruchungen durch Eigengewicht allein. Für die oberen Grenzwerthe gibt § 32, 6)

$$X_m = \frac{q}{g}\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\mathfrak{Z}_m, \tag{5}$$

wonach wegen $q : g = 3{,}53 : 0{,}9 = 3{,}922$ in Tonnen:

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\ \ 74{,}44 & Z_1 &= 0 \\
X_2 &= -115{,}31 & Z_2 &= 73{,}54 \\
X_3 &= -137{,}47 & Z_3 &= 114{,}40 \\
X_4 &= -147{,}08 & Z_4 &= 136{,}92 \\
X_5 &= -147{,}08 & Z_5 &= 147{,}08.
\end{aligned}$$

Wenn die Hauptdiagonalen allein vorhanden und widerstandsfähig wären, hätte man nach § 32, 7) deren Grenzbeanspruchungen

$$\left\{\begin{aligned}
D_m &= \mathfrak{D}_m + \frac{(\varepsilon - m)(n - m)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{p\lambda}{2}, \\
D_m &= \mathfrak{D}_m - \frac{(\varepsilon - m + n)(m - 1)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{p\lambda}{2},
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

also nach Einsetzen der Zahlenwerthe in Tonnen:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 24{,}00 + \frac{5 \cdot 64 \cdot 5 \cdot 6{,}4}{40 \cdot 6 \cdot 4}\,6{,}575 = 94{,}13 \\
D_2 &= 14{,}44 + \frac{7 \cdot 49 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{65 \cdot 9 \cdot 4{,}8}\,6{,}575 = 58{,}97 \\
D_3 &= \ \ 8{,}46 + \frac{11{,}5 \cdot 36 \cdot 13{,}5 \cdot 7{,}36}{110 \cdot 14{,}5 \cdot 5{,}4}\,6{,}575 = 39{,}86 \\
D_4 &= \ \ 3{,}96 + \frac{26 \cdot 25 \cdot 29 \cdot 7{,}66}{235 \cdot 30 \cdot 5{,}8}\,6{,}575 = 27{,}18 \\
D_5 &= \ \ 0 \ \ \ + \frac{\infty \cdot 16 \cdot \infty \cdot 7{,}81}{8 \cdot \infty \cdot \infty \cdot 6}\,6{,}575 = 17{,}12,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= 24{,}00 - \frac{14 \cdot 0^2 \cdot 6{,}4}{40 \cdot 4}\,6{,}575 = 24{,}00 \\
D_2 &= 14{,}44 - \frac{16 \cdot 1 \cdot 6{,}98}{65 \cdot 4{,}8}\,6{,}575 = 12{,}41
\end{aligned}$$

$$D_3 = \ 8{,}46 - \frac{20{,}5 \,.\, 4 \,.\, 7{,}36}{110 \,.\, 5{,}4}\, 6{,}575 = \quad 1{,}58$$

$$D_4 = \ 3{,}96 - \frac{35 \,.\, 9 \,.\, 7{,}66}{235 \,.\, 5{,}8}\, 6{,}575 = - \ 7{,}68$$

$$D_5 = \ 0 \quad - \frac{\infty \,.\, 16 \,.\, 7{,}81}{8 \,.\, \infty \,.\, 6}\, 6{,}575 = - \ 17{,}12.$$

Hiernach sind in den drei mittleren Feldern Gegendiagonalen nöthig, die vorstehenden Grenzwerthe D_1 bis D_3 bleiben gültig, für die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen in den Feldern 4 und 5 hat man

$$D_4 = 17{,}18, \qquad D_4' = 7{,}68\, \frac{7{,}81}{7{,}66} = 7{,}83,$$

$$D_5 = D_5' = 17{,}12 \text{ tn},$$

während die unteren Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen daselbst Null sind.

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen bei oben liegender X-Gurtung sind nach § 32, 9)

$$(7) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{(\nu - m)\,(n - m - 1)^2}{(n - 1)\,\nu + m}\, \frac{p\lambda}{2},$$

welcher Ausdruck nach A. 19, 15) auch für V_0 gilt. Wir erhalten in Tonnen:

$$V_0 = - \ 18{,}75 - 8 \,.\, 6{,}575 \qquad = - \ 71{,}35$$

$$V_1 = - \ 12{,}00 - \frac{5 \,.\, 49}{49}\, 6{,}575 = - \ 44{,}88$$

$$V_2 = - \quad 7{,}00 - \frac{7 \,.\, 36}{74}\, 6{,}575 = - \ 29{,}39$$

$$V_3 = - \quad 3{,}21 - \frac{11{,}5 \,.\, 25}{119}\, 6{,}575 = - \ 19{,}10$$

$$V_4 = \quad 0 \quad - \frac{26 \,.\, 16}{244}\, 6{,}575 = - \ 11{,}21$$

$$V_5 = \quad 3{,}00 - \frac{\infty \,.\, 9}{8 \,.\, \infty}\, 6{,}575 = - \quad 4{,}40,$$

wonach vorstehende Werthe V_0 bis V_4 die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind. Für die positiven Grenzbeanspruchungen der Verticalen 0 bis 2 (ohne anschliessende Gegendiagonalen) hat man nach § 32, 9) und Aufgabe 19

$$(8) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{(\nu - m + n)\, m^2}{(n - 1)\,\nu + m}\, \frac{\nu + 1}{\nu}\, \frac{p\lambda}{2},$$

und für die Verticalen 3 und 4 (mit anschliessenden Gegendiagonalen) nach § 53, 18) 4)

(9) $V_m = \mathfrak{V}_m + \left[m(m+1)(\delta - \nu - 1)p + \frac{\nu - m}{4f} g n^2 h_0\right] \frac{\lambda}{2\nu(\delta - m - 1)}$,

worin δ den Werth von ε für das Feld $m+1$ bedeutet. Diese Gleichungen liefern in Tonnen:

$$V_0 = \mathfrak{V}_0 = -18{,}75$$

$$V_1 = -12{,}00 + \frac{14 \cdot 1 \cdot 7}{49 \cdot 6} 6{,}575 = -9{,}81$$

$$V_2 = -7{,}00 + \frac{16 \cdot 4 \cdot 10}{74 \cdot 9} 6{,}575 = -0{,}68$$

$$V_3 = -3{,}21 + \left(3 \cdot 4 \cdot 14{,}5 \cdot 2{,}63 + \frac{11{,}5 \cdot 40}{4 \cdot 81} 0{,}9 \cdot 81 \cdot 4\right) \frac{5}{29 \cdot 26} = 2{,}57$$

$$V_4 = 0 + \left(4 \cdot 5 \cdot \infty \cdot 2{,}63 + \frac{26 \cdot 40}{4 \cdot 81} 0{,}9 \cdot 81 \cdot 4\right) \frac{5}{60 \cdot \infty} = 4{,}38.$$

Damit sind sämmtliche Grenzwerthe der Stabkräfte bekannt. Dieselben wurden in Fig. 120 für eine Trägerhälfte bei ihren Stäben eingetragen. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Beispiel 69. Einfaches System mit Gegendiagonalen bei beliebigen Gurtungsformen (Halbparabelträger). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Wir verfahren wieder nach der Anleitung am Schlusse des § 52. Die Berechnung der Trägerform und der Beanspruchungen durch Eigengewicht allein bleibt wie im vorigen Beispiel. Als untere Grenzwerthe der Gurtungskräfte hat man die dort berechneten Beanspruchungen durch Eigengewicht allein. Setzen wir für Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis l, Rad O bei Verticale m,

(1) $$C_m = (n - m) \sum_0^m Pa + m \sum_m^n P(l - a),$$

so sind nach § 33 die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte:

(2) $$\begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m - C_m \dfrac{x_m}{l h_m}, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m + C_{m-1} \dfrac{z_m}{l h_{m-1}} = - X_{m-1} \dfrac{z_m}{x_{m-1}}. \end{cases}$$

Die Werthe der $\sum$ sind aus der Tabelle des Beispiels 6 zu entnehmen oder wie in Beispiel 42 zu berechnen. Wir erhalten dann für die erste und zweite Richtung des Zuges I

$$C_1 = 8 . 62{,}2 + 1 . 1947 = 2445 \qquad C_1 = 8 . 22{,}2 + 1 . 2140 = 2318$$
$$C_2 = 7 . 167 + 2 . 1499 = 4167 \qquad C_2 = 7 . 117 + 2 . 1650 = 4119$$
$$C_3 = 6 . 348 + 3 . 1089 = 5555 \qquad C_3 = 6 . 271 + 3 . 1239 = 5343$$
$$C_4 = 5 . 580 + 4 . \ 764 = 5956 \qquad C_4 = 5 . 480 + 4 . \ 876 = 5904$$
$$C_5 = 4 . 876 + 5 . \ 480 = 5904 \qquad C_5 = 4 . 764 + 5 . \ 580 = 5956,$$

sodass wie bei allen betrachteten Balkenträgern mit zwei Gelenkauflagern die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung genügt hätte und die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen in Tonnen folgen:

$$X_1 = -18{,}98 - \frac{2445 . 5{,}06}{45 . 4{,}8} = -\ 76{,}25$$
$$X_2 = -29{,}40 - \frac{4167 . 5{,}04}{45 . 5{,}4} = -115{,}83$$
$$X_3 = -35{,}05 - \frac{5555 . 5{,}02}{45 . 5{,}8} = -141{,}89$$
$$X_4 = -37{,}50 - \frac{5956 . 5}{45 . 6} = -147{,}80$$
$$X_5 = -37{,}50 - \frac{5956 . 5}{45 . 6} = -147{,}80,$$

$$Z_1 = 0$$
$$Z_2 = 18{,}75 + \frac{2445}{9 . 4{,}8} = \ 75{,}35$$
$$Z_3 = 29{,}17 + \frac{4167}{9 . 5{,}4} = 114{,}91$$
$$Z_4 = 34{,}91 + \frac{5555}{9 . 5{,}8} = 141{,}33$$
$$Z_5 = 37{,}50 + \frac{5956}{9 . 6} = 147{,}80.$$

Wenn die Hauptdiagonalen allein vorhanden und widerstandsfähig wären, hätte man nach § 33, 7) 8) deren Grenzbeanspruchungen bei Belastung durch Zug II (Fig. 22) von Verticale m bis n, Vorderrad O bei m,

$$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon l} \sum_m^n P(l-a), \tag{3}$$

und bei Belastung durch Zug II von 0 bis Verticale $m - 1$, Vorderrad O bei $m - 1$,

(4) $$D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m + n}{\varepsilon l} \sum_0^{m-1} Pa,$$

also mit den aus Beispiel 6 entnommenen oder wie in Beispiel 42 berechneten Werthen der $\sum$ in Tonnen:

$$D_1 = 24{,}00 + \frac{6{,}4 \cdot 5 \cdot 2248}{4 \cdot 6 \cdot 45} = 90{,}61$$

$$D_2 = 14{,}44 + \frac{6{,}93 \cdot 7 \cdot 1741}{4{,}8 \cdot 9 \cdot 45} = 57{,}88$$

$$D_3 = 8{,}46 + \frac{7{,}36 \cdot 11{,}5 \cdot 1321}{5{,}4 \cdot 14{,}5 \cdot 45} = 40{,}19$$

$$D_4 = 3{,}96 + \frac{7{,}66 \cdot 26 \cdot 938}{5{,}8 \cdot 30 \cdot 45} = 27{,}82$$

$$D_5 = 0 + \frac{7{,}81 \cdot \infty \cdot 638}{6 \cdot \infty \cdot 45} = 18{,}45,$$

$$D_1 = 24{,}00 - \frac{6{,}4 \cdot 14 \cdot 0}{4 \cdot 6 \cdot 45} = 24{,}00$$

$$D_2 = 14{,}44 - \frac{6{,}93 \cdot 16 \cdot 71{,}4}{4{,}8 \cdot 9 \cdot 45} = 10{,}37$$

$$D_3 = 8{,}46 - \frac{7{,}36 \cdot 20{,}5 \cdot 197}{5{,}4 \cdot 14{,}5 \cdot 45} = 0{,}02$$

$$D_4 = 3{,}96 - \frac{7{,}66 \cdot 35 \cdot 382}{5{,}8 \cdot 30 \cdot 45} = -9{,}12$$

$$D_5 = 0 - \frac{7{,}81 \cdot \infty \cdot 638}{6 \cdot \infty \cdot 45} = -18{,}45.$$

Hiernach sind in den drei mittleren Feldern Gegendiagonalen nöthig, die vorstehenden Grenzwerthe D_1 bis D_3 bleiben gültig, als obere Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen in den Feldern 4 und 5 hat man

$$D_4 = 27{,}82, \qquad D_4' = 9{,}12 \frac{7{,}81}{7{,}66} = 9{,}30,$$

$$D_5 = D_5' = 18{,}45 \text{ tn},$$

während die unteren Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen in diesen Feldern Null sind.

Die negativen Grenzbeanspruchen der Verticalen im Falle oben liegender X-Gurtung ergeben sich nach § 33, 11) und A. 19, 16) bei Belastung durch Zug II von Verticale $m+1$ bis n, Vorderrad 0 bei $m+1$,

(5) $$V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{\nu - m}{\nu l} \sum_{m+1}^{n} P(l-a),$$

und mit den wie oben erhaltenen $\sum$ in Tonnen:

$$V_0 = -18{,}75 - \frac{2248}{45} = -68{,}71$$

$$V_1 = -12{,}00 - \frac{5 \,.\, 1741}{6 \,.\, 45} = -44{,}24$$

$$V_2 = -7{,}00 - \frac{7 \,.\, 1321}{9 \,.\, 45} = -29{,}83$$

$$V_3 = -3{,}21 - \frac{11{,}5 \,.\, 938}{14{,}5 \,.\, 45} = -19{,}74$$

$$V_4 = 0 - \frac{26 \,.\, 638}{30 \,.\, 45} = -12{,}29$$

$$V_5 = 3{,}00 - \frac{\infty \,.\, 382}{\infty \,.\, 45} = -5{,}49.$$

Vorstehende Werthe V_0 bis V_4 sind demnach als die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen anzusehen. Die positiven Grenzbeanspruchungen der Verticalen 0 bis 2 (ohne anschliessende Gegendiagonalen) ergeben sich nach § 33, 12) und Aufgabe 19 mit Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

$$(6) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \frac{\nu - m + n}{\nu l} \sum_0^m Pa,$$

und diejenigen der Verticalen 3 und 4 (mit anschliessenden Gegendiagonalen) nach § 53, 18) 5) im gleichen Belastungsfalle

$$(7) \quad V_m = \mathfrak{B}_m + \left[(\delta - \nu - 1) \sum_0^m Pa + \frac{\nu - m}{8f} g l^2 h_0\right] \frac{1}{\nu \lambda (\delta - m - 1)}.$$

Diese Gleichungen liefern mit den aus Beispiel 6 entnommenen oder wie in Beispiel 42 berechneten Werthen der $\sum$ in Tonnen:

$$V_0 = \mathfrak{B}_0 = -18{,}75$$

$$V_1 = -12{,}00 + \frac{14 \,.\, 71{,}4}{6 \,.\, 45} = -8{,}30$$

$$V_2 = -7{,}00 + \frac{16 \,.\, 197}{9 \,.\, 45} = 0{,}78$$

$$V_3 = -3{,}21 + \left(14{,}5 \,.\, 382 + \frac{11{,}5 \,.\, 40}{8 \,.\, 81} 0{,}9 \,.\, 45^2 \,.\, 4\right) \frac{1}{14{,}5 \,.\, 5 \,.\, 26} = 2{,}47$$

$$V_4 = 0 + \left(\infty \,.\, 638 + \frac{26 \,.\, 40}{8 \,.\, 81} 0{,}9 \,.\, 45^2 \,.\, 4\right) \frac{1}{30 \,.\, 5 \,.\, \infty} = 4{,}25.$$

Wir haben hier die positiven Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen für Belastung durch Zug II berechnet. Es kann jedoch nach § 52 vielfach Zug I noch

etwas ungünstiger wirken, insbesondere dann, wenn wie im vorliegenden Falle die Feldlänge gross gegenüber dem Radstande ist. Setzt man entsprechend § 52, 6) für Zug I von 0 bis Verticale $m+1$, Rad O bei m,

$$(8) \qquad S = \sum_0^m Pa + m \sum_m^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a),$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 für $m = 3$ und $m = 4$

$$S = 271 + 3 \,.\, 62{,}2 = 458, \qquad S = 480 + 4 \,.\, 62{,}2 = 729,$$

und mit diesen Werthen an Stelle von $S = \sum_0^m Pa$ in 7) die positiven Grenzbeanspruchungen

$$V_3 = 3{,}05, \qquad V_4 = 4{,}86 \text{ tn.}$$

Zu beachten ist jedoch, dass die bei Ableitung von 7) angenommene Belastung (Verkehrslast von beiden Enden des Trägers kommend, rechts von Verticale m lastfrei) aussergewöhnlich ungünstig ist, sodass man sich bei dem obigen Vorgehen im Allgemeinen beruhigen kann. — Für die negative Grenzbeanspruchung der Verticale 0 hat man nach A. 19, 11) mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei Verticale 1,

$$(9) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{n-1}{l} \sum_0^1 Pa - \frac{1}{l} \sum_1^n P(l-a),$$

also mit den schon für X_1 verwendeten $\sum$, ebenfalls ungünstiger wie oben mit Zug II,

$$V_0 = -18{,}75 - \frac{8 \,.\, 62{,}2 + 1947}{45} = -73{,}08 \text{ tn.}$$

Sämmtliche Grenzwerthe der Stabkräfte einer Trägerhälfte sind in Fig. 121 bei ihren Stäben eingeschrieben. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt.

Aufgabe 37. Positive Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen bei Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die in der Ueberschrift genannten Grenzbeanspruchungen mit Rücksicht auf die Lastäquivalente direct befahrener vollwandiger Träger auszudrücken.

In §§ 50—54 sind die positiven Grenzbeanspruchungen der Ver-

ticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen für beliebige bewegte Last abgeleitet. Die betreffenden Formeln, in welchen S möglichst gross anzunehmen ist, gelten natürlich auch für die Lastäquivalente bewegter Radlastzüge. Wir können uns darauf beschränken, S auszudrücken.

Fahrbahn unten. Bei Berechnung mit bewegten Radlastzügen war für Belastung durch Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

$$S = \sum_0^m Pa.$$

Hieraus folgt mit A. 11, 10) 12) für genaue Lastäquivalente

$$S = m^2 \lambda^2 \frac{p_c}{2}, \tag{1}$$

unter p_c das Lastäquivalent zur Berechnung des neg max V_x eines durch Zug II direct befahrenen vollwandigen Trägers bei $x = c = m\lambda$ verstanden.

Ergeben die für gleichmässig vertheilte bewegte Last in § 53 abgeleiteten Ausdrücke von S oder V_m mit demjenigen p, welches für einen durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite $(m + 1)\lambda$ dem Momente max M_x bei der Trägermitte entspricht, ungünstigere Werthe, so kann man auch diese verwenden.

Fahrbahn oben. Für bewegte Radlastzüge war bei Belastung durch Zug II von 0 bis Verticale $m - 1$, Vorderrad O bei $m - 1$,

$$S = \sum_0^{m-1} Pa.$$

Hieraus folgt wie oben für genaue Lastäquivalente

$$S = (m - 1)^2 \lambda^2 \frac{p_c}{2}, \tag{2}$$

worin p_c das Lastäquivalent zur Berechnung des neg max V_x eines durch Zug II direct befahrenen vollwandigen Trägers bei $x = c = (m - 1)\lambda$ bedeutet.

Ergeben die für gleichmässig vertheilte bewegte Last in § 54 gegebenen Ausdrücke von S oder V_m mit demjenigen p, welches für einen durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite $m\lambda$ dem max M_x bei der Trägermitte entspricht, ungünstigere Werthe, so kann man auch diese verwenden.

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die

Formeln für unten liegende Fahrbahn, für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Formeln für oben liegende Fahrbahn.

Beispiel 70. Einfaches System mit Gegendiagonalen bei beliebigen Gurtungsformen (Halbparabelträger). Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des Beispiels 68 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass dieselben Grenzwerthe der Füllungsglieder und annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen der Gurtungen wie mit den bewegten Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles in Beispiel 68 Gesagte gültig. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind wie dort mit constantem p zu berechnen, und zwar wäre wie für die max M_x eines durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m zu setzen $p = 2{,}63$ tn (Beispiel 8). Da diese Annahme bereits in Beispiel 68 gemacht wurde und die unteren Grenzbeanspruchungen für Eigengewicht allein eintreten, so könnten sämmtliche dort berechnete Grenzwerthe der Gurtungskräfte beibehalten werden. Wir haben in Fig. 122 die dem nach oben abgerundeten $p = 2{,}7$ entsprechenden oberen Grenzwerthe eingetragen, welche $q : g = 4$ mal so gross wie die Eigengewichtsbeanspruchungen sind.

Wenn die Hauptdiagonalen allein vorhanden und widerstandsfähig wären, so hätte man nach A. 32, 1) 2) deren Grenzbeanspruchungen, mit $c = (m - 1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(1)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{\varepsilon - m}{2n\varepsilon}\,\lambda\,(n - m)^2 p_v, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{\varepsilon - m + n}{2n\varepsilon}\,\lambda\,(m - 1)^2 p_c, \end{cases}$$

unter p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente verstanden, welche für einen durch Zug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem pos max V_x bei $x = v$ bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen. Dieselben lassen sich aus der Tabelle des Beispiels 8 entnehmen. Wir erhalten damit in Tonnen:

$$D_1 = 24{,}00 + \frac{6{,}4 \,.\, 5 \,.\, 5}{4 \,.\, 18 \,.\, 6}\, 64 \,.\, 2{,}81 = 90{,}61$$

$$D_2 = 14{,}44 + \frac{6{,}93 \,.\, 7 \,.\, 5}{4{,}8 \,.\, 18 \,.\, 9}\, 49 \,.\, 2{,}84 = 57{,}85$$

$$D_3 = 8{,}46 + \frac{7{,}36 \,.\, 11{,}5 \,.\, 5}{5{,}4 \,.\, 18 \,.\, 14{,}5} 36 \,.\, 2{,}93 = 40{,}21$$

$$D_4 = 3{,}96 + \frac{7{,}66 \,.\, 26 \,.\, 5}{5{,}8 \,.\, 18 \,.\, 30} 25 \,.\, 3{,}00 = 27{,}81$$

$$D_5 = 0 \quad + \frac{7{,}81 \,.\, \infty \,.\, 5}{6 \,.\, 18 \,.\, \infty} 16 \,.\, 3{,}19 = 18{,}45,$$

$$D_1 = 24{,}00 - \frac{6{,}4 \,.\, 14 \,.\, 5}{4 \,.\, 18 \,.\, 6} 0^2 \,.\, \infty = 24{,}00$$

$$D_2 = 14{,}44 - \frac{6{,}93 \,.\, 16 \,.\, 5}{4{,}8 \,.\, 18 \,.\, 9} 1 \,.\, 5{,}71 = 10{,}37$$

$$D_3 = 8{,}46 - \frac{7{,}36 \,.\, 20{,}5 \,.\, 5}{5{,}4 \,.\, 18 \,.\, 14{,}5} 4 \,.\, 3{,}95 = 0{,}01$$

$$D_4 = 3{,}96 - \frac{7{,}66 \,.\, 35 \,.\, 5}{5{,}8 \,.\, 18 \,.\, 30} 9 \,.\, 3{,}39 = -9{,}10$$

$$D_5 = 0 \quad - \frac{7{,}81 \,.\, \infty \,.\, 5}{6 \,.\, 18 \,.\, \infty} 16 \,.\, 3{,}19 = -18{,}45.$$

Demnach sind in den drei mittleren Feldern Gegendiagonalen nöthig, die vorstehenden Grenzwerthe D_1 bis D_3 bleiben gültig, als obere Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen in den Feldern 4 und 5 hat man

$$D_4 = 27{,}81, \qquad D_4' = 9{,}10 \frac{7{,}81}{7{,}66} = 9{,}28,$$
$$D_5 = D_5' = 18{,}45 \text{ tn},$$

während die unteren Grenzbeanspruchungen dieser Diagonalen Null sind.

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen bei oben liegender X-Gurtung ergeben sich nach A. 32, 3) 5) aus

$$(2) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{v-m}{2nv} \lambda (n-m-1)^2 p_v,$$

mit $v = (m+1)\lambda$, welche Formel wie die entsprechende für bewegte Radlastzüge auch für V_0 gilt. Wir erhalten in Tonnen:

$$V_0 = -18{,}75 - \frac{5}{18} 64 \,.\, 2{,}81 = -68{,}71$$

$$V_1 = -12{,}00 - \frac{5 \,.\, 5}{18 \,.\, 6} 49 \,.\, 2{,}84 = -44{,}21$$

$$V_2 = -7{,}00 - \frac{7 \,.\, 5}{18 \,.\, 9} 36 \,.\, 2{,}93 = -29{,}79$$

$$V_3 = -3{,}21 - \frac{11{,}5 \,.\, 5}{18 \,.\, 14{,}5} 25 \,.\, 3{,}00 = -19{,}73$$

$$V_4 = 0 - \frac{26 \,.\, 5}{18 \,.\, 30} 16 \,.\, 3{,}19 = -12{,}29$$

$$V_5 = 3{,}00 - \frac{\infty \,.\, 5}{18 \,.\, \infty} 9 \,.\, 3{,}39 = -5{,}47,$$

sodass vorstehende V_0 bis V_4 als die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen anzusehen sind. Die positiven Grenzbeanspruchungen der Verticalen 0 bis 2. (ohne anschliessende Gegendiagonalen) hat man nach A. 32, 3) 5)

$$(3) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\nu - m + n}{2 n \nu} \lambda m^2 p_c,$$

und diejenigen der Verticalen 3 und 4 (mit anschliessenden Gegendiagonalen) nach § 53, 18) mit A. 37, 1)

$$(4) \quad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[m^2 (\delta - \nu - 1) p_c + \frac{\nu - m}{8f} g n^2 h_0\right] \frac{\lambda}{2\nu(\delta - m - 1)}.$$

In beiden Formeln ist $c = m\lambda$. Dieselben liefern in Tonnen:

$$V_0 = \mathfrak{V}_0 = -18{,}75$$

$$V_1 = -12{,}00 + \frac{14 \,.\, 5}{18 \,.\, 6} 1 \,.\, 5{,}71 = -8{,}30$$

$$V_2 = -\ 7{,}00 + \frac{16 \,.\, 5}{18 \,.\, 9} 4 \,.\, 3{,}95 = \ 0{,}80$$

$$V_3 = -\ 3{,}21 + \left(9 \,.\, 14{,}5 \,.\, 3{,}39 + \frac{11{,}5 \,.\, 40}{4 \,.\, 81} 0{,}9 \,.\, 81 \,.\, 4\right) \frac{5}{29 \,.\, 26} = 2{,}47$$

$$V_4 = \ 0 \ + \left(16 \,.\, \infty \,.\, 3{,}19 + \frac{26 \,.\, 40}{4 \,.\, 81} 0{,}9 \,.\, 81 \,.\, 4\right) \frac{5}{60 \,.\, \infty} = 4{,}25.$$

Sämmtliche bis jetzt berechnete Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder müssen, abgesehen von kleinen Differenzen infolge Vernachlässigung von Decimalstellen, genau mit den im vorigen Beispiele für bewegte Radlastzüge berechneten übereinstimmen.

Wir haben hier die positiven Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen für die Zug II entsprechenden Lastäquivalente berechnet. Nach Aufgabe 37 erhält man unter Umständen noch ungünstigere Werthe, wenn in 4) an Stelle von $\frac{2S}{\lambda^2} = m^2 p_c$ gesetzt wird

$$(5) \qquad \frac{2S}{\lambda^2} = m(m+1)p,$$

worin p den max M_x eines durch Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite $(m+1)\lambda$ entspricht. Für unsern Träger folgen damit

$$V_3 = -3{,}21 + \left(3 \,.\, 4 \,.\, 14{,}5 \,.\, 2{,}84 + \frac{11{,}5 \,.\, 40}{4 \,.\, 81} 0{,}9 \,.\, 81 \,.\, 4\right) \frac{5}{29 \,.\, 26} = 2{,}81 \text{ tn},$$

$$V_4 = -0 \quad + \left(4 \,.\, 5 \,.\, \infty \,.\, 2{,}77 + \frac{26 \,.\, 40}{4 \,.\, 81} 0{,}9 \,.\, 81 \,.\, 4\right) \frac{5}{60 \,.\, \infty} = 4{,}62 \text{ tn},$$

doch kann man sich im Allgemeinen mit dem obigen Vorgehen begnügen. Auch für den negativen Grenzwerth von V_0 wirkt im vorliegenden Falle Zug I etwas ungünstiger als Zug II. Nach A. 19, 15) hat man bei Totalbelastung des ganzen Trägers

$$(7) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{n-1}{2} p\lambda ,$$

woraus mit dem oben für die Gurtungen verwendeten Werthe p folgt

$$V_0 = -18{,}75 - 4 \,.\, 2{,}7 \,.\, 5 = -72{,}75 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt. Sämmtliche erhaltene Grenzbeanspruchungen der Stäbe sind in Fig. 122 für eine Trägerhälfte eingetragen.

Beispiel 71. Einfaches System mit Gegendiagonalen bei beliebigen Gurtungsformen (Ellipsenträger).

Den in Beispiel 35—37 behandelten Ellipsenträger für den Fall zu berechnen, dass die Diagonalen nur auf Zug widerstandsfähig sein sollen (Fig. 76).

Wir verfahren nach der Anleitung am Schlusse des § 52. Die Formberechnung und Beanspruchungen für Eigengewicht allein bleiben wie in Beispiel 35. Mit Rücksicht auf die berechneten Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind in den 6 mittleren Feldern Gegendiagonalen nöthig, deren Längen:

$$d_3' = d_4 = 7{,}12, \qquad d_4' = d_5 = 7{,}40, \qquad d_5' = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = 7{,}50 \text{ m}.$$

Unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in beiden der Verticale m anliegenden Feldern wäre

für	$m =$	5	6	7:
	$\nu = \varepsilon = \dfrac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	50	-49	$-14{,}47$

und nach der schon in Beispiel 35 verwendeten Gleichung

$$\mathfrak{V}_m = 2{,}025 m \left(2 + \frac{10-m}{\nu}\right) - 19{,}575$$

die Eigengewichtsbeanspruchungen:

$$\mathfrak{V}_5 = 1{,}69 \quad , \; \mathfrak{V}_6 = 3{,}73 \qquad \mathfrak{V}_7 = 5{,}84 \text{ tn}.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen in den Feldern mit Gegendiagonalen sind gleich Null. Wir drücken im Folgenden alle Beanspruchungen in Tonnen aus.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Die Grenzwerthe der Gurtungskräfte und von V_1, D_2 bleiben wie in Beispiel 35 bestimmt. Auf Grund der dort berechneten Diagonalenbeanspruchungen hat man die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_3 = 33{,}62 \qquad D_3' = 1{,}31\,\frac{7{,}12}{6{,}58} = 1{,}42$$

$$D_4 = 26{,}60 \qquad D_4' = 7{,}61\,\frac{7{,}40}{7{,}12} = 7{,}91$$

$$D_5 = 20{,}21 \qquad D_5' = 13{,}85\,\frac{7{,}5}{7{,}4} = 14{,}04.$$

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen wären bei obenliegender X-Gurtung in den anliegenden Feldern

$$(9) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{(\nu - m)\,(n - m - 1)^2}{(n-1)\,\nu + m}\,\frac{p\lambda}{2},$$

woraus in Beispiel 35 gefunden wurden:

$$V_2 = -19{,}04 \qquad V_3 = -16{,}42 \qquad V_4 = -12{,}39,$$

und weiter folgen:

$$V_5 = 1{,}69 - \frac{45 \,.\, 16}{455}\,6{,}075 = -7{,}92$$

$$V_6 = 3{,}73 - \frac{55 \,.\, 9}{435}\,6{,}075 = -3{,}18$$

$$V_7 = 5{,}84 - \frac{21{,}47 \,.\, 4}{123{,}23}\,6{,}075 = 1{,}61.$$

Demnach sind vorstehende Werthe V_2 bis V_5 die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 2 bis 5. Als positive Grenzbeanspruchungen derselben hat man nach § 53, 2) 4)

$$(2) \quad V_m = \mathfrak{V}_m + [m(m+1)(\delta - \nu - 1)\,p + ((n-2m-1)\,\delta - (m+1)(n-m-1))(\nu - m)\,g]\,\frac{\lambda}{2\nu\,(\delta - m - 1)},$$

worin δ den Werth von ε für das Feld $m+1$ bezeichnet. Wir erhalten:

$$V_2 = -3{,}37 + [2 \,.\, 3 \,.\, 2{,}86 \,.\, 2{,}7 + (5 \,.\; 7{,}86 - 3 \,.\, 7)\,2 \quad .\, 0{,}9]\,\frac{2{,}25}{4 \,.\, 4{,}86} = 5{,}80$$

$$V_3 = -2{,}01 + [3 \,.\, 4 \,.\, 6{,}61 \,.\, 2{,}7 + (3 \,.\, 15{,}47 - 4 \,.\, 6)\,4{,}86 \,.\, 0{,}9]\,\frac{2{,}25}{7{,}86 \,.\, 11{,}47} = 5{,}78$$

$$V_4 = -0{,}23 + [4\,.\,5\,.\,33{,}53\,.\,2{,}7 + (1\,.\,50 - 5\,.\,5)\,11{,}47\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{15{,}47\,.\,45} = 6{,}46$$

$$V_5 = \quad 1{,}69 + [5\,.\,6\,.\;100\;.\,2{,}7 - (1\,.\,49 - 6\,.\,4)\,45\quad.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{50\,.\,55} = 7{,}49.$$

Sämmtliche berechnete Grenzwerthe der Stabkräfte für eine Trägerhälfte sind in Fig. 123 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Bewegte Radlastzüge. Die Grenzwerthe der Gurtungskräfte und von V_1, D_2 bleiben wie in Beispiel 36 berechnet. Mit Rücksicht auf die dort erhaltenen D sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_3 = 33{,}62 \qquad D_3' = \;3{,}35\,\frac{7{,}12}{6{,}58} = \;3{,}63$$

$$D_4 = 26{,}98 \qquad D_4' = \;8{,}82\,\frac{7{,}40}{7{,}12} = \;9{,}17$$

$$D_5 = 20{,}80 \qquad D_5' = 15{,}03\,\frac{7{,}5}{7{,}4} = 15{,}23.$$

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in beiden anliegenden Feldern sind wie in Beispiel 36

$$(3) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{\nu - m}{\nu l}\sum_{m+1}^{n} P(l-a),$$

wonach wie dort:

$$V_2 = -\,19{,}39 \qquad V_3 = -\,16{,}95 \qquad V_4 = -\,13{,}02,$$

und weiter folgen:

$$V_5 = 1{,}69 - \frac{45\,.\,530}{50\,.\,45} = -\,8{,}91$$

$$V_6 = 3{,}73 - \frac{55\,.\,316}{49\,.\,45} = -\,4{,}15$$

$$V_7 = 5{,}84 - \frac{21{,}47\,.\,170}{14{,}47\,.\,45} = \quad 0{,}23.$$

Es sind also vorstehende Werthe V_2 bis V_5 die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 2 bis 5. Als positive Grenzbeanspruchungen derselben hat man nach § 53, 2) 5) mit Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

$$(4) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \Big[\frac{\delta - \nu - 1}{\lambda}\sum_{0}^{m} Pa + ((n - 2m - 1)\,\delta - (m+1)(n - m - 1))(\nu - m)\frac{g\lambda}{2}\Big]\frac{1}{\nu(\delta - m - 1)}.$$

Wir entnehmen die $\sum$ aus der Tabelle des Beispiels 6 oder berechnen sie wie in Beispiel 42 und erhalten damit:

$$V_2 = -3,37 + \left[\frac{2,86}{4,5} 170 + (5.\ 7,86 - 3.7)\ 2\ \ .2,025\right] \frac{1}{4.4,86} = 6,00$$

$$V_3 = -2,01 + \left[\frac{6,61}{4,5} 316 + (3.15,47 - 4.6)\ 4,86.2,025\right] \frac{1}{7,86.11,47} = 5,59$$

$$V_4 = -0,23 + \left[\frac{33,53}{4,5} 530 + (1.50\ \ - 5.5)11,47.2,025\right] \frac{1}{15,47.45} = 6,28$$

$$V_5 = \ 1,69 + \left[\frac{100}{4,5} 776 - (1.49\ \ - 6.4)45\ \ .2,025\right] \frac{1}{50.55} = 7,13.$$

Sämmtliche berechnete Grenzbeanspruchungen einer Trägerhälfte sind in Fig. 124 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Lastäquivalente. Die Grenzwerthe der Gurtungskräfte und von V_1, D_2 bleiben wie in Beispiel 37 bestimmt. Mit Rücksicht auf die dort berechneten D hat man die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_3 = 33,56 \qquad D_3' = \ 3,38 \frac{7,12}{6,58} = \ 3,66$$

$$D_4 = 26,98 \qquad D_4' = \ 8,79 \frac{7,40}{7,12} = \ 9,14$$

$$D_5 = 20,76 \qquad D_5' = 15,01 \frac{7,5}{7,4} = 15,21.$$

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in beiden anliegenden Feldern sind wie in Beispiel 37

$$(5) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{\nu - m}{2 n \nu} \lambda (n - m - 1)^2 p_o,$$

wonach wie dort:

$$V_2 = -19,36 \qquad V_3 = -16,94 \qquad V_4 = -12,99,$$

und weiter folgen:

$$V_5 = 1,69 - \frac{45.4,5.16}{20.50} 3,27 = -8,90$$

$$V_6 = 3,73 - \frac{55.4,5.9}{20.49} 3,46 = -4,13$$

$$V_7 = 5,84 - \frac{21,47.4,5.4}{20.14,47} 4,21 = \ 0,22.$$

Die vorstehenden Werthe V_2 bis V_5 bilden also die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 2 bis 5. Für die positiven Grenzbeanspruchungen derselben hat man nach § 53, 2) mit A. 37, 1)

(6) $$V_m = \mathfrak{V}_m + [m^2(\delta - \nu - 1)p_c + ((n - 2m - 1)\delta - (m+1)(n - m - 1))(\nu - m)g]\frac{\lambda}{2\nu(\delta - m - 1)},$$

unter p_c das Lastäquivalent zur Berechnung des neg max V_x eines durch Zug II direct befahrenen vollwandigen Trägers bei $x = c = m\lambda$ verstanden. Wir erhalten mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 8

$$V_2 = -3{,}37 + [\;4.\;2{,}86.4{,}21 + (5.\;7{,}86 - 3.7)\;2\;\;.0{,}9]\frac{2{,}25}{4.4{,}86} = 6{,}02$$

$$V_3 = -2{,}01 + [\;9.\;6{,}61.3{,}46 + (3.15{,}47 - 4.6)\;4{,}86.0{,}9]\frac{2{,}25}{7{,}86.11{,}47} = 5{,}57$$

$$V_4 = -0{,}23 + [16.33{,}53.3{,}27 + (1.50\;\;-5.5)11{,}47.0{,}9]\frac{2{,}25}{15{,}47.45} = 6{,}27$$

$$V_5 = \;\;1{,}69 + [25.\;100\;.3{,}06 - (1.49\;\;-6.4)45\;\;.0{,}9]\frac{2{,}25}{50.55} = 7{,}12.$$

Sämmtliche hier erhaltenen Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder müssen, soweit nicht kleine Abweichungen durch Interpolationen der p und Vernachlässigung von Decimalen bedingt sind, genau mit den für bewegte Radlastzüge berechneten übereinstimmen.

Beispiel 72. Parabelträger einfachen Systems mit Gegendiagonalen.

Den in Beispiel 54—56 behandelten Parabelträger für den Fall zu berechnen, dass die Diagonalen nur auf Zug widerstandsfähig sind.

Wir verfahren nach der Anleitung am Schlusse des § 52. Die Formberechnung und die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein bleiben wie in Beispiel 54. Es sind in sämmtlichen Feldern Gegendiagonalen nöthig. Längen derselben:

$$d_2' = d_3 = 3{,}84 \qquad d_3' = d_4 = 4{,}24 \qquad d_4' = \sqrt{3^2 + 3{,}2^2} = 4{,}39 \text{ m}.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen sämmtlicher Diagonalen sind gleich Null. Im Folgenden drücken wir alle Beanspruchungen in Tonnen aus.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Die Grenzwerthe der Gurtungskräfte und Stützenreactionen sind in Beispiel 54 gegeben. Für die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen hat man

(1) $$D_m = \frac{n}{n+1}\frac{pl}{8f}d_m, \qquad D_m' = \frac{n}{n+1}\frac{pl}{8f}d_m',$$

woraus:

$$D_2 = 7{,}64 \qquad D_3 = 8{,}86 \qquad D_4 = \;9{,}79$$
$$D_2' = 8{,}86 \qquad D_3' = 9{,}79 \qquad D_4' = 10{,}13.$$

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung sind

$$(2) \qquad V_m = g_s\lambda - \frac{(m-1)(n-m-1)^2}{(n-m)\,n-m+1}\,\frac{p\lambda}{2},$$

wonach sich in Beispiel 54 ergaben:

$$V_1 = 1{,}59 \qquad V_2 = -0{,}62 \qquad V_3 = -1{,}91,$$

und weiter folgen:

$$V_4 = -2{,}28 \qquad V_5 = -1{,}73 \qquad V_6 = -0{,}30 \qquad V_7 = 1{,}59.$$

Die vier ersten dieser V bilden also die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen, wie wir nach Aufgabe 38 von vornherein wissen könnten. Positive Grenzbeanspruchungen der Verticalen nach § 53, 13)

$$V_m = g_s\lambda + p\lambda = 1{,}59 + 2{,}77\,.\,3 = 9{,}90.$$

Sämmtliche berechnete Grenzwerthe der Stabkräfte sind in Fig. 125 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Bewegte Radlastzüge. Die Grenzwerthe der Gurtungskräfte und Stützenreactionen sind in Beispiel 55 bestimmt. Mit Rücksicht auf die dort berechneten Diagonalenbeanspruchungen hat man die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_2 = 8{,}67 \qquad D_2' = 10{,}55\,\frac{3{,}84}{3{,}31} = 12{,}24$$

$$D_3 = 10{,}19 \qquad D_3' = 12{,}45\,\frac{4{,}24}{3{,}84} = 13{,}75$$

$$D_4 = 11{,}35 \qquad D_4' = 12{,}54\,\frac{4{,}39}{4{,}24} = 11{,}80.$$

Für die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in beiden anliegenden Feldern hat man wie in Beispiel 55

$$(3) \qquad V_m = g_s\lambda - \frac{\nu - m}{\nu l}\sum_{m+1}^{n} P(l-a),$$

woraus sich dort fanden:

$$V_1 = 1{,}59 \qquad V_2 = -1{,}06 \qquad V_3 = -2{,}69.$$

Da für $m = \quad 4 \qquad 5 \qquad 6 \qquad 7:$

$$\nu = \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \quad 16 \qquad -15 \qquad -4 \qquad -1{,}4,$$

so folgen weiter:

$$V_4 = 1{,}59 - \frac{12 \cdot 170}{16 \cdot 24} = -3{,}72$$

$$V_5 = 1{,}59 - \frac{20 \cdot 93{,}4}{15 \cdot 24} = -3{,}60$$

$$V_6 = 1{,}59 - \frac{10 \cdot 30{,}6}{4 \cdot 24} = -1{,}60$$

$$V_7 = 1{,}59 - \frac{8{,}4 \cdot 0}{1{,}4 \cdot 24} = 1{,}59,$$

und die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind:

$$V_1 = 1{,}59 \qquad V_2 = -1{,}60 \qquad V_3 = -3{,}60 \qquad V_4 = -3{,}72,$$

während die positiven Grenzbeanspruchungen nach § 53, 16) mit möglichst grossem K_u (wie für V_1 in Beispiel 55)

$$V_m = g_s\lambda + K_u = 1{,}59 + 6 + 2 \cdot 6\,\frac{1{,}7}{3} + 4\,\frac{0{,}5}{3} = 15{,}06.$$

Die berechneten Grenzwerthe der Stabkräfte sind in Fig. 126 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Lastäquivalente. Die Grenzwerthe der Gurtungskräfte und Stützenreactionen sind in Beispiel 56 gegeben. Auf Grund der dort berechneten D hat man die Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_2 = 8{,}65 \qquad D_2' = 10{,}55\,\frac{3{,}84}{3{,}31} = 12{,}24$$

$$D_3 = 10{,}17 \qquad D_3' = 12{,}46\,\frac{4{,}24}{3{,}84} = 13{,}76$$

$$D_4 = 11{,}35 \qquad D_4' = 12{,}54\,\frac{4{,}39}{4{,}24} = 11{,}81.$$

Für die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung hat man wie in Beispiel 56

$$(4) \qquad V_m = g_s\lambda - \frac{\lambda}{2n}\,\frac{m-1}{n-m}\,(n-m-1)^2 p_v,$$

woraus dort bestimmt wurden:

$$V_1 = 1{,}59 \qquad V_2 = -1{,}06 \qquad V_3 = -2{,}69,$$

und weiter folgen:

$$V_4 = 1{,}59 - \frac{3 \cdot 3 \cdot 9}{16 \cdot 4}\,4{,}21 = -3{,}73$$

$$V_5 = 1{,}59 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{16 \cdot 3}\,5{,}19 = -3{,}60$$

$$V_6 = 1{,}59 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 1}{16 \cdot 2}\,6{,}80 = -1{,}60$$

$$V_7 = 1{,}59 - \frac{3 \cdot 6 \cdot 0^2}{16 \cdot 1}\,\infty = 1{,}59.$$

Die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind also:

$$V_1 = 1{,}59 \quad V_2 = -1{,}60 \quad V_3 = -3{,}60 \quad V_4 = -3{,}73,$$

während die positiven Grenzbeanspruchungen nach § 53, 13) mit demjenigen p, welches dem max M_x eines Trägers der Spannweite 2λ bei der Trägermitte entspricht (Beispiel 8),

$$V_m = g_1 \lambda + p\lambda = 1{,}59 + 4{,}49 \,.\, 3 = 15{,}06 \,.$$

Sämmtliche hier berechnete Grenzbeanspruchungen müssen genau mit den oben für bewegte Radlastzüge erhaltenen übereinstimmen.

Beispiel 73. Paulischer Segmentträger einfachen Systems mit Gegendiagonalen.

Den in Beispiel 62—64 behandelten Paulischen Segmentträger für den Fall zu berechnen, dass die Diagonalen nur auf Zug widerstandsfähig sind.

Wir verfahren nach der Anleitung am Schlusse des § 52. Mit Rücksicht auf die in den Beispielen 62—64 berechneten Diagonalenbeanspruchungen sind in sämmtlichen Feldern Gegendiagonalen nöthig. Die unteren Grenzbeanspruchungen aller Diagonalen sind gleich Null. Für die Beanspruchungen der Verticalen durch Eigengewicht allein unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung bleibt die in Beispiel 62 verwendete Formel

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_m = 2{,}025\, m \left(2 + \frac{n-m}{\nu}\right) - 19{,}575$$

gültig. Im Folgenden sind die Beanspruchungen in Tonnen ausgedrückt.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Die Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind in Beispiel 62 bestimmt. Längen der Gegendiagonalen:

$$d_2' = d_3 = 6{,}07 \qquad d_3' = d_4 = 6{,}87$$
$$d_4' = d_5 = 7{,}35 \qquad d_5' = \sqrt{4{,}5^2 + 6{,}005^2} = 7{,}50 \text{ m}.$$

Auf Grund der in Beispiel 62 berechneten D folgen die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_2 = 19{,}62 \qquad D_2' = 6{,}09 \frac{6{,}07}{5{,}13} = 7{,}21$$

$$D_3 = 17{,}68 \qquad D_3' = 10{,}21 \frac{6{,}87}{6{,}07} = 11{,}56$$

$$D_4 = 18{,}12 \qquad D_4' = 12{,}77\,\frac{7{,}85}{6{,}87} = 13{,}66$$

$$D_5 = 17{,}85 \qquad D_5' = 15{,}05\,\frac{7{,}50}{7{,}85} = 15{,}36\,.$$

Bei oben liegender X-Gurtung hätte man

für $m = \quad 5 \qquad 6 \qquad 7 \qquad 8 \qquad 9:$

$$\nu = \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = 32{,}11 \quad -31{,}11 \quad -8{,}29 \quad -3{,}67 \quad -1{,}52,$$

und damit nach 1):

$$\mathfrak{B}_5 = 2{,}24 \quad \mathfrak{B}_6 = 3{,}17 \quad \mathfrak{B}_7 = 3{,}64 \quad \mathfrak{B}_8 = 4{,}00 \quad \mathfrak{B}_9 = 4{,}88\,.$$

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in beiden anliegenden Feldern sind wie in Beispiel 62

$$(2) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{(\nu - m)\,(n - m - 1)^2}{(n-1)\,\nu + m}\,\frac{p\lambda}{2},$$

wonach sich dort fanden:

$$V_1 = 2{,}70 \quad V_2 = -4{,}73 \quad V_3 = -6{,}22 \quad V_4 = -7{,}07,$$

und weiter folgen:

$$V_5 = 2{,}24 - \frac{27{,}11\,.\,16}{294{,}0}\,5{,}917 = -6{,}49$$

$$V_6 = 3{,}17 - \frac{37{,}11\,.\,9}{274{,}0}\,5{,}917 = -4{,}04$$

$$V_7 = 3{,}64 - \frac{15{,}29\,.\,4}{67{,}61}\,5{,}917 = -1{,}71$$

$$V_8 = 4{,}00 - \frac{11{,}67\,.\,1}{25{,}03}\,5{,}917 = \quad 1{,}24$$

$$V_9 = 4{,}88 - \frac{10{,}52\,.\,0^2}{4{,}68}\,5{,}917 = \quad 4{,}88,$$

sodass vorstehende V_1 bis V_5 die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind. Positive Grenzbeanspruchungen nach § 53, 2) 4)

$$(3) \quad V_m = \mathfrak{B}_m + [m(m+1)\,(\delta - \nu - 1)\,p + ((n - 2m - 1)\,\delta - (m+1)(n - m - 1))(\nu - m)g]\,\frac{\lambda}{2\,\nu\,(\delta - m - 1)},$$

unter δ den Werth von ε für das Feld $m + 1$ verstanden. Wir erhalten:

$$V_2 = 1{,}38 + [2\,.\,3\,.\,1{,}15\,.\,2{,}63 + (5\,.\,4{,}67 - 3\,.\,7)\,0{,}52\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{2{,}52\,.\,1{,}67} = 11{,}68$$

$$V_3 = 1{,}68 + [3\,.\,4\,.\,3{,}62\,.\,2{,}63 + (3\,.\,9{,}29 - 4\,.\,6)\,1{,}67\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{4{,}67\,.\,5{,}29} = 12{,}62$$

$$V_4 = 1{,}86 + [4\,.\,5\,.\,21{,}82\,.\,2{,}63 + (1\,.\,32{,}11 - 5\,.\,5)\,5{,}29\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{9{,}29\,.\,27{,}11} = 12{,}38$$

$$V_5 = 2{,}24 + [5\,.\,6\,.\,64{,}22\,.\,2{,}63 - (1\,.\,31{,}11 - 6\,.\,4)\,27{,}11\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{32{,}11\,.\,37{,}11} = 11{,}44\,.$$

V_1 kann zwar ebenfalls nach 3) bestimmt werden, muss sich aber wie in Beispiel 62 ergeben (§ 53). Die berechneten Grenzbeanspruchungen sind in Fig. 127 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Bewegte Radlastzüge. Die Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Gurtungen bleiben wie in Beispiel 63 bestimmt. Längen der Gegendiagonalen:

$$d_2' = d_3 = 6{,}09 \qquad d_3' = d_4 = 6{,}88$$

$$d_4' = d_5 = 7{,}41 \qquad d_5' = \sqrt{4{,}5^2 + 6{,}002^2} = 7{,}50 \text{ m}.$$

Mit Rücksicht auf die in Beispiel 63 berechneten D sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_2 = 23{,}91 \qquad D_2' = 7{,}11\,\frac{6{,}09}{5{,}17} = 8{,}38$$

$$D_3 = 19{,}05 \qquad D_3' = 12{,}20\,\frac{6{,}88}{6{,}09} = 13{,}78$$

$$D_4 = 17{,}90 \qquad D_4' = 15{,}01\,\frac{7{,}41}{6{,}88} = 16{,}17$$

$$D_5 = 20{,}95 \qquad D_5' = 14{,}91\,\frac{7{,}50}{7{,}41} = 15{,}09\,.$$

Unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in den Feldern m und $m+1$ ist

für $m = 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$:

$$v = \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = 52{,}19 \quad -51{,}19 \quad -7{,}71 \quad -3{,}73 \quad -1{,}64,$$

womit aus 1):

$$\mathfrak{B}_5 = 1{,}64 \quad \mathfrak{B}_6 = 3{,}78 \quad \mathfrak{B}_7 = 3{,}26 \quad \mathfrak{B}_8 = 4{,}14 \quad \mathfrak{B}_9 = 5{,}76\,.$$

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen im gleichen Falle sind wie in Beispiel 63

$$(4) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{v - m}{v\,l} \sum_{m+1}^{n} P\,(l - a),$$

wonach sich dort ergaben:

$$V_1 = 2{,}70 \quad V_2 = -6{,}97 \quad V_3 = -7{,}26 \quad V_4 = -7{,}12,$$

und weiter folgen:

$$V_5 = 1{,}64 - \frac{47{,}19 \,.\, 530}{52{,}19 \,.\, 45} = -9{,}01$$

$$V_6 = 3{,}78 - \frac{57{,}19 \,.\, 316}{51{,}19 \,.\, 45} = -4{,}06$$

$$V_7 = 3{,}26 - \frac{14{,}71 \,.\, 170}{7{,}71 \,.\, 45} = -3{,}95$$

$$V_8 = 4{,}14 - \frac{11{,}71 \,.\, 60{,}4}{3{,}73 \,.\, 45} = -0{,}07$$

$$V_9 = 5{,}76 - \frac{10{,}64 \,.\, 0}{1{,}64 \,.\, 45} = 5{,}76.$$

Es sind also vorstehende V_1 bis V_5 die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen. Die positiven Grenzbeanspruchungen ergeben sich nach § 53, 2) 5) mit Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

$$(5) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \Big[\frac{\delta - m - 1}{\lambda} \sum_0^m Pa + ((n - 2m - 1)\delta$$
$$- (m + 1)(n - m - 1))(v - m)\frac{g\lambda}{2}\Big] \frac{1}{v(\delta - m - 1)};$$

nur V_1 bleibt wie in Beispiel 63 bestimmt. Wir erhalten mit den aus Beispiel 6 entnommenen oder wie in Beispiel 42 berechneten Werthen der $\sum$:

$$V_2 = 0{,}80 + \Big[\frac{1{,}09}{4{,}5} 170 + (5.\ 4{,}73 - 3.7)\ 0{,}64.2{,}025\Big]\frac{1}{2{,}64.1{,}73} = 9{,}06$$

$$V_3 = 1{,}57 + \Big[\frac{2{,}98}{4{,}5} 316 + (3.\ 8{,}71\ \ 4.6)\ 1{,}73.2{,}025\Big]\frac{1}{4{,}73.4{,}71} = 10{,}63$$

$$V_4 = 2{,}21 + \Big[\frac{42{,}48}{4{,}5} 530 + (1.52{,}19 - 5.5)\ 4{,}71.2{,}025\Big]\frac{1}{8{,}71.47{,}19} = 13{,}75$$

$$V_5 = 1{,}64 + \Big[\frac{104{,}38}{4{,}5} 776 - (1.51{,}19 - 6.4) 47{,}19.2{,}025\Big]\frac{1}{52{,}19.57{,}19} = 6{,}80.$$

Die berechneten Grenzbeanspruchungen sind in Fig. 128 bei ihren Stäben eingetragen.

Lastäquivalente. Bezüglich der Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Gurtungen gilt das in Beispiel 64 Gesagte. Demnach sind die Längen der Gegendiagonalen wie oben für gleichmässig vertheilte bewegte Last angegeben. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen folgen mit Rücksicht auf die in Beispiel 64 berechneten D:

$$D_2 = 20{,}29 \qquad D_2' = 8{,}88\,\frac{6{,}07}{5{,}18} = 10{,}51$$

$$D_3 = 18{,}53 \qquad D_3' = 12{,}57\,\frac{6{,}87}{6{,}07} = 14{,}23$$

$$D_4 = 19{,}32 \qquad D_4' = 14{,}14\,\frac{7{,}35}{6{,}87} = 15{,}13$$

$$D_5 = 18{,}92 \qquad D_5' = 16{,}61\,\frac{7{,}50}{7{,}35} = 16{,}95.$$

Für die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung hat man wie in Beispiel 64

(6) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{\lambda}{2n}\,\frac{v-m}{v}\,(n-m-1)^2 p_v,$$

wonach sich dort ergaben:

$$V_1 = 2{,}70 \quad V_2 = -4{,}42 \quad V_3 = -6{,}95 \quad V_4 = -7{,}94,$$

und mit den oben für gleichmässig vertheilte bewegte Last berechneten v, $\mathfrak{V}$ weiter folgen:

$$V_5 = 2{,}24 - 0{,}225\,\frac{27{,}11}{32{,}11}\,16\,.\,3{,}27 = -7{,}69$$

$$V_6 = 3{,}17 - 0{,}225\,\frac{37{,}11}{31{,}11}\,9\,.\,3{,}46 = -5{,}19$$

$$V_7 = 3{,}64 - 0{,}225\,\frac{15{,}29}{8{,}29}\,4\,.\,4{,}21 = -3{,}35$$

$$V_8 = 4{,}00 - 0{,}225\,\frac{11{,}67}{3{,}67}\,1\,.\,5{,}94 = -0{,}25$$

$$V_9 = 4{,}88 - 0{,}225\,\frac{10{,}52}{1{,}52}\,0^2\,.\,\infty = 4{,}88.$$

Vorstehende V_1 bis V_5 sind also die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen. Für die positiven Grenzbeanspruchungen hat man nach § 53, 2) mit A. 37, 1)

(7) $$V_m = \mathfrak{V}_m + [m^2(\delta - v - 1)p_c + ((n-2m-1)\delta - (m+1)(n-m-1))(v-m)g]\,\frac{1}{2v(\delta-m-1)},$$

worin p_c das Lastäquivalent zur Berechnung des neg max V_x eines durch Zug II direct befahrenen vollwandigen Trägers bei $x = c = m\lambda$. Wir erhalten mit den aus der Tabelle des Beispiels 9 entnommenen Werthen von p_c:

$$V_2 = 1{,}38 + [\,4\,.\,0{,}86\,.\,4{,}21 + (5\,.\,4{,}67 - 3\,.\,7)\,0{,}52\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{2{,}52\,.\,1{,}67} = 9{,}72$$

$$V_3 = 1{,}68 + [\,9\,.\,5{,}13\,.\,3{,}46 + (3\,.\,9{,}29 - 4\,.\,6)\,1{,}67\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{4{,}67\,.\,5{,}29} = 15{,}08$$

$$V_4 = 1{,}86 + [16\,.\,15{,}32\,.\,3{,}27 + (1\,.\,32{,}11 - 5\,.\,5)\;5{,}29\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{9{,}29\,.\,27{,}11} = 9{,}32$$

$$V_5 = 2{,}24 + [25\,.\,53{,}64\,.\,3{,}06 - (1\,.\,31{,}11 - 6\,.\,4)\;27{,}11\,.\,0{,}9]\,\frac{2{,}25}{32{,}11\,.\,37{,}11} = 9{,}63\,.$$

V_1 bleibt wie in Beispiel 64 bestimmt. Hinsichtlich der Abweichung der hier erhaltenen Resultate von den für bewegte Radlastzüge gefundenen gilt das am Schlusse des Beispiels 64 Gesagte. Bei gleicher Trägerform würden die Resultate genau überstimmen.

Beispiel 74. Paulischer Linsenträger einfachen Systems mit Gegendiagonalen.

Den in Beispiel 65—67 behandelten Paulischen Linsenträger für den Fall zu berechnen, dass die Diagonalen nur auf Zug widerstandsfähig sind.

Wir verfahren wieder nach der Anleitung am Schlusse des § 52. Mit Rücksicht auf die in den Beispielen 65—67 berechneten Diagonalenbeanspruchungen sind in sämmtlichen Feldern Gegendiagonalen nöthig, welche gleiche Längen wie die entsprechenden Hauptdiagonalen haben. Die unteren Grenzbeanspruchungen aller Diagonalen sind gleich Null. Für die Beanspruchungen der Verticalen durch Eigengewicht allein unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung bleibt die in Beispiel 65 verwendete Formel

$$(1) \qquad \mathfrak{V}_m = 2{,}025\, m \left(2 + \frac{n-m}{\nu}\right) - 19{,}575$$

gültig. Alle Beanspruchungen im Folgenden sind in Tonnen ausgedrückt.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Die Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Gurtungskräfte sind in Beispiel 65 bestimmt. Auf Grund der dort berechneten D hat man die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_2 = 13{,}63 \quad D_3 = 15{,}58 \quad D_4 = 16{,}55 \quad D_5 = 16{,}97$$
$$D_2' = 11{,}11 \quad D_3' = 13{,}15 \quad D_4' = 15{,}09 \quad D_5' = 16{,}25\,.$$

Unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in den Feldern m und $m+1$ ist

für $m = 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$:

$$\nu = \frac{2\,h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}} = \infty \quad -12{,}56 \quad -5{,}43 \quad -2{,}74 \quad -1{,}14,$$

und damit nach 1)

$$\mathfrak{B}_5 = 0{,}68 \quad \mathfrak{B}_6 = 0{,}86 \quad \mathfrak{B}_7 = 0{,}95 \quad \mathfrak{B}_8 = 1{,}00 \quad \mathfrak{B}_9 = 0{,}89\,.$$

Die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen im gleichen Falle sind wie in Beispiel 65

$$(2) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{(\nu - m)(n - m - 1)^2}{(n-1)\nu + m}\frac{p\lambda}{2},$$

wonach sich dort fanden:

$$V_1 = -4{,}25 \quad V_2 = -7{,}70 \quad V_3 = -9{,}48 \quad V_4 = -10{,}34,$$

und weiter folgen:

$$V_5 = 0{,}68 - \frac{\infty \,.\, 16}{9 \,.\, \infty} 5{,}917 = -9{,}84$$

$$V_6 = 0{,}86 - \frac{18{,}56 \,.\, 9}{107{,}0} 5{,}917 = -8{,}38$$

$$V_7 = 0{,}95 - \frac{12{,}43 \,.\, 4}{41{,}87} 5{,}917 = -6{,}08$$

$$V_8 = 1{,}00 - \frac{10{,}74 \,.\, 1}{13{,}92} 5{,}917 = -3{,}57$$

$$V_9 = 0{,}89 - \frac{10{,}14 \,.\, 0^2}{1{,}26} 5{,}917 = 0{,}89,$$

sodass vorstehende V_1 bis V_5 die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind. Die positiven Grenzbeanspruchungen gibt § 53, 2) 4)

$$(3) \quad V_m = \mathfrak{B}_m + [m(m+1)(\delta - \nu - 1)p + ((n-2m-1)\delta - (m+1)(n-m-1))(\nu - m)g]\frac{\lambda}{2\nu(\delta - m - 1)},$$

worin δ den Werth von ε für das Feld $m+1$ bezeichnet. Wir erhalten:

$$V_1 = 0{,}46 + [1 \,.\, 2 \,.\, 0{,}18 \,.\, 2{,}63 + (7 \,.\, 2{,}32 - 2 \,.\, 8)\, 0{,}14 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{1{,}14 \,.\, 0{,}32} = 6{,}50$$

$$V_2 = 0{,}35 + [2 \,.\, 3 \,.\, 0{,}59 \,.\, 2{,}63 + (5 \,.\, 4{,}33 - 3 \,.\, 7)\, 0{,}74 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{2{,}74 \,.\, 1{,}33} = 6{,}36$$

$$V_3 = 0{,}41 + [3 \,.\, 4 \,.\, 1{,}86 \,.\, 2{,}63 + (3 \,.\, 8{,}29 - 4 \,.\, 6)\, 2{,}43 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{5{,}43 \,.\, 4{,}29} = 6{,}26$$

$$V_4 = 0{,}48 + [4 \,.\, 5 \,.\, 13{,}35 \,.\, 2{,}63 + (1 \,.\, 26{,}91 - 5 \,.\, 5)\, 8{,}56 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{12{,}56 \,.\, 21{,}91} = 6{,}34$$

$$V_5 = 0{,}68 + [5 \,.\, 6 \,.\, \infty \,.\, 2{,}63 - (1 \,.\, 25{,}91 - 6 \,.\, 4)\, \infty \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{\infty \,.\, 31{,}91} = 6{,}83.$$

Die berechneten Grenzbeanspruchungen sind in Fig. 129 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Bewegte Radlastzüge. Die Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Gurtungen bleiben wie in Beispiel 66 bestimmt. Auf Grund der dort berechneten D sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$$D_2 = 16{,}99 \quad D_3 = 17{,}44 \quad D_4 = 16{,}46 \quad D_5 = 19{,}91$$
$$D_2' = 12{,}55 \quad D_3' = 14{,}96 \quad D_4' = 17{,}22 \quad D_5' = 16{,}12.$$

Unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in den Feldern m und $m+1$ hat man

für $m = 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9:$

$$v = \frac{2h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}} = \infty \quad -13{,}01 \quad -5{,}39 \quad -2{,}81 \quad -1{,}16,$$

und damit nach 1):

$$\mathfrak{V}_5 = 0{,}68 \quad \mathfrak{V}_6 = 0{,}99 \quad \mathfrak{V}_7 = 0{,}89 \quad \mathfrak{V}_8 = 1{,}30 \quad \mathfrak{V}_9 = 1{,}16.$$

Für die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen im gleichen Falle gilt wie in Beispiel 66

$$(4) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{v-m}{vl} \sum_{m+1}^{n} P(l-a),$$

wonach sich dort ergaben:

$$V_1 = -5{,}44 \quad V_2 = -9{,}18 \quad V_3 = -10{,}24 \quad V_4 = -11{,}55,$$

und weiter folgen:

$$V_5 = 0{,}68 - \frac{\infty \,.\, 530}{\infty \,.\, 45} = -11{,}10$$
$$V_6 = 0{,}99 - \frac{19{,}01 \,.\, 316}{13{,}01 \,.\, 45} = -9{,}27$$
$$V_7 = 0{,}89 - \frac{12{,}39 \,.\, 170}{5{,}39 \,.\, 45} = -7{,}79$$
$$V_8 = 1{,}30 - \frac{10{,}81 \,.\, 60{,}4}{2{,}81 \,.\, 45} = -4{,}86$$
$$V_9 = 1{,}16 - \frac{10{,}16 \,.\, 0}{1{,}16 \,.\, 45} = 1{,}16.$$

Vorstehende Werthe V_1 bis V_8 bilden also die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen. Für die positiven Grenzbeanspruchungen hat man nach § 53, 2) 5) mit Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

(5) $$V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\frac{\delta - \frac{v}{\lambda} - 1}{} \sum_0^m Pa + ((n - 2m - 1)\delta - (m+1)(n-m-1))(v-m)\frac{g\lambda}{2}\right]\frac{1}{v(\delta - m - 1)}.$$

Wir erhalten mit den aus Beispiel 6 entnommenen oder wie in Beispiel 42 berechneten $\sum$:

$$V_1 = 0,68 + \left[\frac{0,22}{4,5}60,4 + (7.\ 2,38 - 2.8)\,0,16.2,025\right]\frac{1}{1,16.0,38} = 7,86$$

$$V_2 = 0,99 + \left[\frac{0,61}{4,5}170 + (5.\ 4,42 - 3.7)\,0,81.2,025\right]\frac{1}{2,81.1,42} = 7,22$$

$$V_3 = 0,89 + \left[\frac{1,53}{4,5}316 + (3.\ 7,92 - 4.6)\,2,39.2,025\right]\frac{1}{5,39.3,92} = 5,92$$

$$V_4 = 1,30 + \left[\frac{23,50}{4,5}530 + (1.37,51 - 5.5)\,9,01.2,025\right]\frac{1}{13,01.32,51} = 8,36$$

$$V_5 = 1,16 + \left[\frac{\infty}{4,5}776 - (1.36,51 - 6.4)\,\infty\,.2,025\right]\frac{1}{\infty\,.\,42,51} = 5,81.$$

V_1 ergibt sich noch ungünstiger, wenn in 5) an Stelle von $\sum_0^m Pa$ entsprechend § 53, 6) mit Zug I von 0 bis Verticale $m+1$, Rad O bei m, gesetzt wird

$$\sum_0^1 Pa + \sum_1^2 P(2\lambda - a) = 6(4,5 + 3,2) + 6.3,2 + 4.2 = 73,4,$$

nämlich $V_1 = 9,35$. Die berechneten Grenzbeanspruchungen sind in Fig. 130 bei ihren Stäben eingeschrieben.

Lastäquivalente. Bezüglich der Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Gurtungen gilt das in Beispiel 67 Gesagte. Mit Rücksicht auf die dort berechneten D sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen:

$D_2 = 14,28 \quad D_3 = 16,47 \quad D_4 = 17,64 \quad D_5 = 18,06$

$D_2' = 14,06 \quad D_3' = 12,32 \quad D_4' = 16,46 \quad D_5' = 17,81.$

Für die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung in beiden anliegenden Feldern hat man wie in Beispiel 67

(6) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{\lambda}{2n}\frac{v-m}{v}(n-m-1)^2 p_v,$$

wonach sich dort fanden:

$V_1 = -4,54 \quad V_2 = -8,29 \quad V_3 = -10,39 \quad V_4 = -11,25,$

und mit den oben für gleichmässig vertheilte bewegte Last berechneten ν, $\mathfrak{V}$ weiter ergeben:

$$V_5 = 0{,}68 - 0{,}225 \frac{\infty}{\infty} 16 \,.\, 3{,}27 = -\ 11{,}09$$

$$V_6 = 0{,}86 - 0{,}225 \frac{18{,}56}{12{,}56}\ 9 \,.\, 3{,}46 = -\ 9{,}49$$

$$V_7 = 0{,}95 - 0{,}225 \frac{12{,}48}{5{,}48}\ 4 \,.\, 4{,}21 = -\ 7{,}72$$

$$V_8 = 1{,}00 - 0{,}225 \frac{10{,}74}{2{,}74}\ 1 \,.\, 5{,}94 = -\ 4{,}24$$

$$V_9 = 0{,}89 - 0{,}225 \frac{10{,}14}{1{,}14}\ 0^2 \,.\, \infty = 0{,}89.$$

Vorstehende V_1 bis V_5 sind also die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen. Für die positiven Grenzbeanspruchungen hat man nach § 53, 2) mit A. 37, 1)

$$(7) \quad V_m = \mathfrak{V}_m + [m^2 (\delta - \nu - 1) p_c + ((n - 2m - 1)\delta - (m+1)(n - m - 1))(\nu - m) g] \frac{\lambda}{2\nu(\delta - m - 1)},$$

worin p_c das Lastäquivalent zur Berechnung des neg max V_x eines durch Zug II direct befahrenen vollwandigen Trägers bei $x = c = m\lambda$ bedeutet. Wir erhalten mit Rücksicht auf die in Beispiel 8 gegebene Tabelle der p_c:

$$V_1 = 0{,}46 + [1 \,.\, 0{,}18 \,.\, 5{,}94 + (7 \,.\, 2{,}32 - 2 \,.\, 8)\, 0{,}14 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{1{,}14 \,.\, 0{,}32} = 7{,}24$$

$$V_2 = 0{,}35 + [2 \,.\, 0{,}59 \,.\, 4{,}21 + (5 \,.\, 4{,}33 - 3 \,.\, 7)\, 0{,}74 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{2{,}74 \,.\, 1{,}33} = 6{,}75$$

$$V_3 = 0{,}41 + [9 \,.\, 1{,}86 \,.\, 3{,}46 + (3 \,.\, 8{,}29 - 4 \,.\, 6)\, 2{,}43 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{5{,}43 \,.\, 4{,}29} = 6{,}19$$

$$V_4 = 0{,}48 + [16 \,.\, 13{,}35 \,.\, 3{,}27 + (1 \,.\, 26{,}91 - 5 \,.\, 5)\, 8{,}56 \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{12{,}56 \,.\, 21{,}91} = 6{,}31$$

$$V_5 = 0{,}68 + [25 \,.\, \infty \,.\, 3{,}06 - (1 \,.\, 25{,}91 - 6 \,.\, 4)\ \infty \,.\, 0{,}9] \frac{2{,}25}{\infty \,.\, 31{,}91} = 6{,}19.$$

Wie bei Berechnung mit bewegten Radlastzügen durch Zug I ein grösserer positiver Grenzwerth von V_1 als durch Zug II erreicht werden konnte, so gilt das Gleiche für die betreffenden Lastäquivalente. Wir erhalten zufolge Aufgabe 37 nach 3) mit demjenigen

p, welches dem max M_x in der Mitte eines durch Zug I direct befahrenen Trägers der Spannweite 2λ entspricht (Beispiel 8),

$$V_1 = 0{,}46 + [1 . 2 . 0{,}18 . 3{,}62 + (7 . 2{,}32 - 2 . 8)\, 0{,}14 . 0{,}9] \frac{2{,}25}{1{,}14 . 0{,}32} = 8{,}68 .$$

Bezüglich der Abweichung der hier berechneten Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder von den für bewegte Radlastzüge erhaltenen ist auf das am Schlusse des Beispiels 64 Gesagte zu verweisen.

Aufgabe 38. Verticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen beim Parabelträger.

Es soll festgestellt werden, ob beim parabolischen Segmentträger und parabolischen Linsenträger mit oben liegender X-Gurtung und unten liegender Fahrbahn für gleichmässig vertheilte bewegte Last die negative Grenzbeanspruchung einer Verticale m der ersten Trägerhälfte numerisch grösser ist als diejenige der Verticale $n - m$ der zweiten Trägerhälfte.

Segmentträger. Bei horizontaler Z-Gurtung und auf die Knotenpunkte derselben wirkender Fahrbahnlast ist nach § 42, 5) mit $\omega = 1$ und § 41, 7) die negative Grenzbeanspruchung der Verticale m

$$V_m = g_z \lambda - \frac{(m-1)(n-m-1)^2}{(n-m)\, n - m + 1} \frac{p\lambda}{2},$$

und diejenige der Verticale $n - m$

$$V_{n-m} = g_z \lambda - \frac{(n-m-1)(m-1)^2}{mn - n + m + 1} \frac{p\lambda}{2}.$$

Da hiernach

$$V_{n-m} - V_m = \frac{2(m-1)(n-m-1)(n-2m)}{(mn - n + m + 1)(n^2 - nm - m + 1)} \frac{p\lambda}{2},$$

und dieser Werth für $2m \leqq n$ positiv ist, so sind die negativen Grenzbeanspruchungen der ersten Trägerhälfte grösser wie die der zweiten.

Linsenträger. Bei oben liegender X-Gurtung und auf die Knotenpunkte des Untergurts wirkender Fahrbahnlast ist nach § 42, 5) mit $\omega = 0$ und § 41, 8) die negative Grenzbeanspruchung der Verticale m

$$V_m = \frac{g_z - g_x}{2} \lambda - \frac{m(n-m-1)^2}{(n-m)\, n - m} \frac{p\lambda}{2},$$

und diejenige der Verticale $n - m$

$$V_{n-m} = \frac{g_s - g_x}{2} \lambda - \frac{(n-m)(m-1)^2}{mn - n + m} \frac{p \lambda}{2}.$$

Es folgt daraus

$$V_{n-m} - V_m = \frac{[n(m-1)(n-2m) + (n-2)m^2](n-2m)}{(mn-n+m)(n^2-nm-m)} \frac{p\lambda}{2},$$

welchen Werth man wieder für $2m \leqq n$ als positiv erkennt, sodass der oben gezogene Schluss auch hier gilt.

In beiden betrachteten Fällen genügt es also bei Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last die negativen Grenzbeanspruchungen der ersten Trägerhälfte einschliesslich eventuell der mittleren Verticale (bei gerader Felderzahl) nach den Formeln für oben liegende X-Gurtung zu berechnen (§ 52). Dasselbe hat sich in § 50 für den Parallelträger ergeben und gleiche Feststellungen lassen sich für andre Fälle vornehmen.

V. Abschnitt.

Continuirliche Gelenkträger.

Beispiel 75. Continuirlicher Gelenkträger (Dachbinder) einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen.

Die Dachbinder einer Halle sollen als continuirliche Gelenkträger nach der Andeutung in Fig. 131 construirt werden (von den 4 Gelenken in der Mittelöffnung und über den Endstützen ist ein beliebiges horizontal verschiebbar anzuordnen). Spannweite der Mittelöffnung 12 . 4 = 48 m, der beiden äussern Oeffnungen 5 . 4 = 20 m. Die gekrümmten Gurtungen sind Kreisbogen eingeschrieben, deren Scheitel 10 und 14 m über dem Untergurt der äussern Oeffnungen liegen. Feste Last per laufenden Meter Träger $g = 0{,}5$ tn, Belastung durch Wind- und Schneedruck $p = 0{,}55$ tn. Von der festen Last sind 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,1 tn auf diejenigen des Untergurts zu rechnen. Die bewegte Last soll beliebige Theile der Dachfläche treffen können. Es sind die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Das Trägerstück zwischen den beiden mittleren Gelenken ist ein einfacher Balkenträger, dessen vollständige Berechnung Beispiel 38 enthält. Da der ganze Träger zur Mitte symmetrisch ist, so haben wir hier nur die Berechnung des ersten Trägerstücks vom linken Endauflager bis zum ersten Zwischengelenke durchzuführen (Fig. 132). Beim Ansatze der Formeln für die Beanspruchungen beachten wir, dass g, p, λ für alle Oeffnungen gleich gross vorausgesetzt sind. Im Folgenden bedeuten $r = \varrho\lambda$, $t = \tau\lambda$ die Abstände der Zwischengelenke von der Verticalen durch die erste Zwischenstütze. Alle Beanspruchungen sind in Tonnen, alle Längen in Metern ausgedrückt.

Formberechnung. Nach § 17, 37) hat man die Gleichung eines Kreisbogens der horizontalen Sehnenlänge l und des Pfeiles f, wenn der Ursprung der Coordinaten an einem Sehnenende liegt,

(1) $$y = -\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right)^2 + x(l - x)}.$$

Mit $l = 48$, $f = 14$ folgt daraus die Gleichung des steileren Gurtungsbogens hinsichtlich eines Coordinatensystems, dessen Ursprung im zweiten Auflager liegt,

$$y = -13{,}5714 + \sqrt{184{,}1829 + x(48 - x)}.$$

Für $x = 8$ wird $y = 8{,}8826$, sodass die Scheitel der beiden Kreisbogen um $14 - 8{,}8826 = 5{,}1174$ und $1{,}1174$ über den Zwischengelenken liegen, wie dies in Beispiel 38 der dortigen Formberechnung zu Grunde gelegt wurde. Weiter erhält man für $x = 4$ die Ordinate $y = 5{,}407$.

Da nach § 17, 36) der Durchmesser eines Kreisbogens von beliebigen l, f,

(2) $$d = f + \frac{l^2}{4f},$$

so hat man für den Pfeil f des flacheren Gurtungsbogens

$$d = 1{,}1174 + \frac{32^2}{4 \cdot 1{,}1174} = f + \frac{88^2}{4f}, \quad f = 8{,}742,$$

wonach $10 - 8{,}742 = 1{,}258$ die Länge der Verticalen über den Endauflagern ist. Die Gleichung des flacheren Gurtungsbogens hinsichtlich eines Coordinatensystems mit dem Ursprunge an seinem Ende links folgt aus 1) mit $l = 88$, $f = 8{,}742$,

$$y = -106{,}359 + \sqrt{11312 + x(88 - x)},$$

und in Hinsicht eines Coordinatensystems mit dem Ursprunge im Endauflager links

$$\mathfrak{x} = y + 1{,}258 = -105{,}101 + \sqrt{11312 + x(88 - x)}.$$

Wir erhalten nun in der ersten Oeffnung

für	$m = 0$	1	2	3	4	5:
$h_m = \mathfrak{x}_m =$	1,258	2,826	4,225	5,462	6,542	7,470
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$		4,296	4,238	4,187	4,143	4,106
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$		4,193	4,898	5,818	6,770	7,668
$\varepsilon = \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		1,80	3,02	4,42	6,06	8,05,

und in der zweiten Oeffnung

für	$m =$ 0	1	2:
$\mathfrak{x}_m =$	7,470	8,258	8,883
$\mathfrak{z}_m =$	0	5,407	8,883

für	$m =$	0	1	2:
	$h_m = \mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m =$	7,470	2,851	0
	$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1})^2} =$		4,077	4,049
	$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1})^2} =$		6,726	5,299
	$d_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_m)^2} =$		4,501	4,049
	$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		— 0,62	0
	$\nu = \frac{h_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}} =$	— 1,67	— 1,06	0.

Eigengewicht allein. Nach § 60, 16) 21) gelten für die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein in der ersten Oeffnung folgende Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -m\left(n - m - \frac{\varrho\tau}{n}\right)\frac{x_m}{h_m}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = (m-1)\left(n + 1 - m - \frac{\varrho\tau}{n}\right)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = -\left(2m - n - 1 + m\frac{n-m}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon}\frac{\varrho\tau}{n}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = \left(2m - n - \frac{g_x - g_z}{g} + m\frac{n-m}{\nu} + \frac{\nu - m}{\nu}\frac{\varrho\tau}{n}\right)\frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Wir erhalten daraus mit $n = 5$, $\lambda = 4$, $z_m = 4$, $\varrho = 2$, $\tau = 10$, $g = 0{,}5$, $g_x = 0{,}4$, $g_z = 0{,}1$ und

$$\frac{\varrho\tau}{n} = 4, \qquad \frac{g\lambda}{2} = 1, \qquad \frac{g_x - g_z}{g} = 0{,}6$$

die Beanspruchungen der Gurtungsstäbe:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= -1\,.\,0\,\frac{4{,}30}{2{,}83} = 0 & \mathfrak{Z}_1 &= 0\,.\,1\,\frac{4}{1{,}26} = 0 \\ \mathfrak{X}_2 &= 2\,.\,1\,\frac{4{,}24}{4{,}22} = 2{,}01 & \mathfrak{Z}_2 &= 1\,.\,0\,\frac{4}{2{,}83} = 0 \\ \mathfrak{X}_3 &= 3\,.\,2\,\frac{4{,}19}{5{,}46} = 4{,}60 & \mathfrak{Z}_3 &= -2\,.\,1\,\frac{4}{4{,}22} = -1{,}90 \\ \mathfrak{X}_4 &= 4\,.\,3\,\frac{4{,}14}{6{,}54} = 7{,}60 & \mathfrak{Z}_4 &= -3\,.\,2\,\frac{4}{5{,}46} = -4{,}40 \\ \mathfrak{X}_5 &= 5\,.\,4\,\frac{4{,}11}{7{,}47} = 11{,}00 & \mathfrak{Z}_5 &= -4\,.\,3\,\frac{4}{6{,}54} = -7{,}34, \end{aligned}$$

und die Beanspruchungen der Füllungsglieder:

$$\mathfrak{D}_1 = -\left(-4 + \frac{7{,}20}{1{,}80}\right)\frac{4{,}19}{1{,}26} = 0 \qquad \mathfrak{V}_1 = -3{,}6 + \frac{7{,}20}{1{,}80} = 0{,}40$$

$$\mathfrak{D}_2 = -\left(-2 + \frac{10{,}08}{3{,}02}\right)\frac{4{,}90}{2{,}83} = -2{,}32 \qquad \mathfrak{V}_2 = -1{,}6 + \frac{10{,}08}{3{,}02} = 1{,}74$$

$$\mathfrak{D}_3 = -\left(0 + \frac{11{,}68}{4{,}42}\right)\frac{5{,}82}{4{,}22} = -3{,}64 \qquad \mathfrak{V}_3 = 0{,}4 + \frac{11{,}68}{4{,}42} = 3{,}04$$

$$\mathfrak{D}_4 = -\left(2 + \frac{12{,}24}{6{,}06}\right)\frac{6{,}77}{5{,}46} = -4{,}97 \qquad \mathfrak{V}_4 = 2{,}4 + \frac{12{,}24}{6{,}06} = 4{,}42.$$

$$\mathfrak{D}_5 = -\left(4 + \frac{12{,}20}{8{,}05}\right)\frac{7{,}67}{6{,}54} = -6{,}47$$

Für die zweite Oeffnung sind nach § 60, 19) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein wie folgt ausgedrückt:

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = (\varrho - m)\,(\tau - m)\,\dfrac{x_m}{h_m}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = -\,(\varrho + 1 - m)\,(\tau + 1 - m)\,\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \left(\varrho + \tau + 1 - 2m + \dfrac{(\varrho - m)\,(\tau - m)}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(\varrho + \tau - 2m + \dfrac{g_x - g_s}{g} + \dfrac{(\varrho - m)(\tau - m)}{\nu}\right)\dfrac{g\lambda}{2} \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern:

$$\mathfrak{X}_1 = 1\,.\,9\,\frac{4{,}08}{2{,}85} = 12{,}88 \qquad \mathfrak{Z}_1 = -\,2\,.\,10\,\frac{6{,}78}{7{,}47} = -18{,}02$$

$$\mathfrak{X}_2 = 0\,.\,8\,\frac{4{,}05}{0} \qquad \mathfrak{Z}_2 = -\,1\,.\,9\,\frac{5{,}30}{2{,}85} = -16{,}74$$

$$\mathfrak{D}_1 = \left(11 - \frac{1\,.\,9}{0{,}62}\right)\frac{4{,}50}{7{,}47} = -\,2{,}13 \qquad \mathfrak{V}_0 = -\,12{,}6 + \frac{2\,.\,10}{1{,}67} = -\,0{,}62$$

$$\mathfrak{D}_2 = \left(9 + \frac{0\,.\,8}{0}\right)\frac{4{,}05}{2{,}85} \qquad \mathfrak{V}_1 = -\,10{,}6 + \frac{1\,.\,9}{1{,}06} = -\,2{,}11.$$

Für $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{D}_2$ erhält man wie ersichtlich unbestimmte Ausdrücke, doch ergibt die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Obergurts die ganze Beanspruchung des Obergurtstabs 2 bei jeder Belastung

$$(5) \qquad X_2 = X_1\,\frac{x_2}{x_1},$$

sodass die Beanspruchung für Eigengewicht allein

$$\mathfrak{X}_2 = 12{,}88\,\frac{4{,}05}{4{,}08} = 12{,}79.$$

Bezeichnet l die Spannweite der äusseren Oeffnungen, so hat man für die vom Eigengewicht allein erzeugte Reaction der Anfangsstütze nach § 58, 21), mit $l_a = r_a = t_a = 0$, $l_1 = l$,

(6) $$\mathfrak{R} = (l^2 - rt)\frac{g}{2l},$$

und diejenige der ersten Zwischenstütze nach § 58, 20), mit $l_a = l$, $l_b = r_b = t_b = 0$,

(7) $$\mathfrak{R}' = (l + r)(l + t)\frac{g}{2l},$$

wonach im vorliegenden Falle

$$\mathfrak{R} = (400 - 8 . 40)\frac{0,5}{40} = 1, \qquad \mathfrak{R}' = 28 . 60 \frac{0,5}{40} = 21.$$

Nach § 16 setzen die Gleichungen für V_m, $\mathfrak{V}_m$ voraus, dass sich zu beiden Seiten der Verticale m Felder gleicher Länge λ mit Diagonalen gleicher Stellung befinden (in beiden Feldern die X-Gurtung oben oder in beiden die Z-Gurtung oben), sie gelten also zwar für V_1 der Mittelöffnung, da man sich die Diagonale im zweiten Felde derselben mit dem Obergurtstab zusammenfallend denken kann, nicht aber für V_0 der ersten Oeffnung. Für diese Beanspruchung hat man bei jeder Belastung, wenn R die Reaction der Anfangsstütze bedeutet,

(8) $$R + V_0 - \frac{\lambda}{2} g_s = 0,$$

also wenn nur das Eigengewicht wirkt,

$$\mathfrak{V}_0 = -1 + 2 . 0,1 = -0,8.$$

Die Verticale über der ersten Zwischenstütze ist deshalb aus den Verhältnissen der zweiten Oeffnung (und nicht der ersten) zu berechnen, weil ein dieselbe treffender Verticalschnitt durch die X-Gurtung des vorhergehenden und die Z-Gurtung des nachfolgenden Feldes rechts der Stütze vorbeigeht (Fig. 133). Bei untenliegender X-Gurtung wäre das Gegentheil der Fall gewesen.

Grenzwerthe. Für die erste Oeffnung sind nach § 61, 12)—14) die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen:

(9) $$\begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m - m(n - m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ X_m = \mathfrak{X}_m + m\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{\varrho\tau}{n}\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

(10) $$\begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m + (m - 1)(n - m + 1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m - (m - 1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{\varrho\tau}{n}\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

und nach § 61, 12) 16) 19) die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder:

$$(11)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(\varepsilon - m)(\varepsilon - 1)(n - m)^2}{(n-1)\,\varepsilon - n + m} \dfrac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \left[\dfrac{(\varepsilon - m + n)\,(m-1)^2}{(n-1)\,\varepsilon - n + m} + \dfrac{\varepsilon - m}{\varepsilon} \dfrac{\varrho\tau}{n}\right] \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{(\nu - m)(\nu - 1)(n - m)^2}{(n-1)\,\nu - n + m} \dfrac{p\lambda}{2\nu}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\dfrac{(\nu - m + n)\,(m-1)^2}{(n-1)\,\nu - n + m} + \dfrac{\nu - m}{\nu} \dfrac{\varrho\tau}{n}\right] \dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern die Grenzbeanspruchungen des Obergurts:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 - 1 \,.\, 4 \tfrac{4,30}{2,83}\, 1,1 = - 6,68 \\ X_2 &= 2,01 - 2 \,.\, 3 \tfrac{4,24}{4,22}\, 1,1 = - 4,62 \\ X_3 &= 4,60 - 3 \,.\, 2 \tfrac{4,19}{5,46}\, 1,1 = - 0,46 \\ X_4 &= 7,60 - 4 \,.\, 1 \tfrac{4,14}{6,54}\, 1,1 = 4,81 \\ X_5 &= 11,00 - 5 \,.\, 0 \tfrac{4,11}{7,47}\, 1,1 = 11,00, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 + 1 \tfrac{4,30}{2,83}\, 4,4 = 6,68 \\ X_2 &= 2,01 + 2 \tfrac{4,24}{4,22}\, 4,4 = 10,85 \\ X_3 &= 4,60 + 3 \tfrac{4,19}{5,46}\, 4,4 = 14,72 \\ X_4 &= 7,60 + 4 \tfrac{4,14}{6,54}\, 4,4 = 18,74 \\ X_5 &= 11,00 + 5 \tfrac{4,11}{7,47}\, 4,4 = 23,10; \end{aligned}$$

die Grenzbeanspruchungen des Untergurts:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 0 + 0 \,.\, 5 \tfrac{4}{1,26}\, 1,1 = 0 \\ Z_2 &= 0 + 1 \,.\, 4 \tfrac{4}{2,83}\, 1,1 = 6,22 \\ Z_3 &= -1,90 + 2 \,.\, 3 \tfrac{4}{4,22}\, 1,1 = 4,36 \\ Z_4 &= -4,40 + 3 \,.\, 2 \tfrac{4}{5,46}\, 1,1 = 0,44 \\ Z_5 &= -7,34 + 4 \,.\, 1 \tfrac{4}{6,54}\, 1,1 = -4,65, \end{aligned}$$

$$Z_1 = 0 - 0 \frac{4}{1,26} 4,4 = 0$$

$$Z_2 = 0 - 1 \frac{4}{2,83} 4,4 = - 6,22$$

$$Z_3 = - 1,90 - 2 \frac{4}{4,22} 4,4 = - 10,48$$

$$Z_4 = - 4,40 - 3 \frac{4}{5,46} 4,4 = - 14,07$$

$$Z_5 = - 7,34 - 4 \frac{4}{6,54} 4,4 = - 18,10;$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_1 = 0 + \frac{0,8 \,.\, 0,8 \,.\, 16 \,.\, 4,19}{3,20 \,.\, 1,80 \,.\, 1,26} 1,1 = 5,19$$

$$D_2 = - 2,32 + \frac{1,02 \,.\, 2,02 \,.\, 9 \,.\, 4,90}{9,08 \,.\, 3,02 \,.\, 2,83} 1,1 = - 0,59$$

$$D_3 = - 3,64 + \frac{1,42 \,.\, 3,42 \,.\, 5,82}{15,68 \,.\, 4,42 \,.\, 4,22} 1,1 = - 3,21$$

$$D_4 = - 4,97 + \frac{2,06 \,.\, 5,06 \,.\, 6,77}{23,24 \,.\, 6,06 \,.\, 5,46} 1,1 = - 4,87$$

$$D_5 = - 6,47 + \frac{3,05 \,.\, 7,05 \,.\, 0 \,.\, 7,67}{32,20 \,.\, 8,05 \,.\, 6,54} 1,1 = - 6,47,$$

$$D_1 = 0 - \left(\frac{5,80}{3,20} 0 + \frac{0,80}{1,80} 4\right) \frac{4,19}{1,26} 1,1 = - 6,50$$

$$D_2 = - 2,32 - \left(\frac{6,02}{9,08} 1 + \frac{1,02}{3,02} 4\right) \frac{4,90}{2,83} 1,1 = - 6,16$$

$$D_3 = - 3,64 - \left(\frac{6,42}{15,68} 4 + \frac{1,42}{4,42} 4\right) \frac{5,82}{4,22} 1,1 = - 8,07$$

$$D_4 = - 4,97 - \left(\frac{7,06}{23,24} 9 + \frac{2,06}{6,06} 4\right) \frac{6,77}{5,46} 1,1 = - 10,55$$

$$D_5 = - 6,47 - \left(\frac{8,05}{32,20} 16 + \frac{3,05}{8,05} 4\right) \frac{7,67}{6,54} 1,1 = - 13,55,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = 0,40 - \frac{0,80 \,.\, 0,80}{3,20 \,.\, 1,80} 16 \,.\, 1,1 = - 1,56$$

$$V_2 = 1,74 - \frac{1,02 \,.\, 2,02}{9,08 \,.\, 3,02} 9 \,.\, 1,1 = 1,00$$

$$V_3 = 3,04 - \frac{1,42 \,.\, 3,42}{15,68 \,.\, 4,42} 4 \,.\, 1,1 = 3,73$$

$$V_4 = 4,42 - \frac{2,06 \,.\, 5,06}{23,24 \,.\, 6,06} 1 \,.\, 1,1 = 4,34,$$

$$V_1 = 0{,}40 + \left(\frac{5{,}80}{3{,}20}\,0 + \frac{0{,}80}{1{,}80}\,4\right) 1{,}1 = 2{,}36$$

$$V_2 = 1{,}74 + \left(\frac{6{,}02}{9{,}08}\,1 + \frac{1{,}02}{3{,}02}\,4\right) 1{,}1 = 3{,}96$$

$$V_3 = 3{,}04 + \left(\frac{6{,}42}{15{,}68}\,4 + \frac{1{,}42}{4{,}42}\,4\right) 1{,}1 = 6{,}26$$

$$V_4 = 4{,}42 + \left(\frac{7{,}06}{23{,}24}\,9 + \frac{2{,}06}{6{,}06}\,4\right) 1{,}1 = 8{,}92.$$

In der zweiten Oeffnung hat man nach § 61, 9) die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen

(13) $$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m,$$

während die unteren Grenzbeanspruchungen für Eigengewicht allein eintreten. Wir erhalten mit $q : g = 1{,}05 : 0{,}5 = 2{,}1$ die oberen Grenzwerthe:

$$X_1 = 27{,}05 \qquad Z_1 = -\,37{,}84$$
$$X_2 = 26{,}86 \qquad Z_2 = -\,35{,}15.$$

Für die Diagonale 1 liegt $m - \varepsilon$ zwischen m und ϱ, sodass nach § 61, 3) die Grenzbeanspruchungen

(14) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (1 - \varepsilon)\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - (m - \varepsilon - \varrho)\,(\tau + \varepsilon - m)\,\dfrac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

das heisst

$$D_1 = -\,2{,}13 + 1{,}62\,\frac{4{,}50}{7{,}47}\,1{,}1 = -\,1{,}06$$

$$D_1 = -\,2{,}13 - 0{,}38\,.\,8{,}38\,\frac{4{,}50\,.\,1{,}1}{0{,}62\,.\,7{,}47} = -\,5{,}53.$$

Da für die Verticale 0 der Werth $m - \nu$ zwischen m und ϱ liegt, so sind deren Grenzbeanspruchungen nach § 61, 5)

(15) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - (1 - \nu)\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + (m - \nu - \varrho)\,(\tau + \nu - m)\,\dfrac{p\lambda}{2\nu}, \end{cases}$$

und da für die Verticale 1 jene Bedingung nicht erfüllt ist, so hat man für sie nach § 61, 7)

(16) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \left(\varrho + \tau + 1 - 2m + \frac{(\varrho - m)\,(\tau - m)}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2}, \quad V_m = \mathfrak{V}_m.$$

Diese Gleichungen liefern:

$$V_0 = -0,62 - 2,67 \,.\, 1,1 = -3,56$$

$$V_1 = 0,40 - \left(11 - \frac{1\,.\,9}{1,06}\right) 1,1 = -2,36,$$

$$V_0 = -0,62 + 0,33 \,.\, 8,33 \frac{1,1}{1,67} = 1,19$$

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 \qquad = 0,40.$$

Wenn l die Spannweite der äussern Oeffnungen bezeichnet, dann folgen aus § 58, 17) mit $l_a = r_a = t_a = 0$, $l_1 = l$ die Grenzreactionen der Anfangsstütze

(17) $$R = \mathfrak{R} + \frac{l}{2} p, \qquad R = \mathfrak{R} - \frac{r\,t}{2\,l} p,$$

und nach § 58, 16) mit $l_b = r_b = t_b = 0$, $l_a = l$ die Grenzreactionen der ersten Zwischenstütze

(18) $$R = \mathfrak{R}' + (l + r)(l + t) \frac{p}{2\,l} = \frac{q}{g} \mathfrak{R}', \qquad R' = \mathfrak{R}'.$$

Wir erhalten danach

$$R = 1 + 10 \,.\, 0,55 = 6,5 \qquad R = 1 - \frac{8\,.\,40}{2\,.\,48} 0,55 = -0,83$$

$$R' = 2,1 \,.\, 21 = 44,1 \qquad R' = 21.$$

Schliesslich ergibt 8) die Grenzbeanspruchungen der Verticale 0 in der ersten Oeffnung

$$V_0 = -6,5 + 2 \,.\, 0,1 = -6,3 \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 = -0,8.$$

Damit sind alle verlangten Grenzwerthe bestimmt. Dieselben wurden in Fig. 134 für eine Trägerhälfte eingetragen.

Bemerkungen. Da die Verticalreactionen über den Endstützen negativ werden können, so sind die Trägerenden daselbst zu verankern. Die Verankerungen müssen dem Zuge von 0,82 widerstehen. Eine Verankerung würde vermieden für

$$R = (l^2 - rt) \frac{g}{2\,l} - \frac{r\,t}{2\,l} p \geqq 0,$$

das heisst auch für

$$\left(\frac{l^2}{r\,t} - 1\right) g \geqq p.$$

Den schiefen Winddruck hätten wir für das Trägerstück zwischen den beiden mittleren Gelenken ganz wie in den Beispielen 58, 57 und für die übrigen Theile des Trägers in analoger Weise mittelst der Formeln § 60, 1)—4) und A. 4, 1)—3) berechnen können.

Angenommen es habe sich um einen Träger mit zwei Oeffnungen gehandelt, der im Uebrigen ganz dem oben behandelten Träger (von

der Anfangsstütze bis zum zweiten Zwischengelenke) entsprochen hätte, dann würde an der obigen Berechnung absolut Nichts zu ändern gewesen sein. Die Reaction V' der Endstütze wäre wie in Beispiel 38 bestimmt.

Beispiel 76. Continuirliche Gelenkträger einfachen Systems mit Verticalen und parallelen Gurtungen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke mit drei Oeffnungen sollen continuirliche Gelenkträger der Spannweiten 24 m, 36 m, 24 m mit Verticalen und parallelen Gurtungen zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe $h = 4$ m, Feldlänge durchgehends $\lambda = 3$ m. Die Zwischengelenke liegen in der mittleren Oeffnung am Untergurte, um 6 m von den nächsten Auflagern entfernt. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}73$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}77$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,53 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,2 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen (Fig. 135).

Wir wollen die Stellungen der Diagonalen so wählen, dass dieselben bei Belastung durch Eigengewicht allein gezogen werden. Das Trägerstück zwischen den beiden mittleren Gelenken wirkt als einfacher Balkenträger, seine Berechnung ist in Beispiel 44 durchgeführt. Da der ganze Träger zur Mitte symmetrisch ist, so bleibt hier nur das erste Trägerstück von der Anfangsstütze bis zum ersten Zwischengelenke zu berechnen (Fig. 136). Im Folgenden bezeichnen $r = \varrho\lambda$, $t = \tau\lambda$ die Abstände der Zwischengelenke vom zweiten Auflager und l die Spannweite der äussern Oeffnungen. Alle Beanspruchungen sind in Tonnen, alle Längen in Metern ausgedrückt.

Eigengewicht allein. Die vom Eigengewichte allein erzeugten Stützenreactionen sind für die Anfangsstütze nach § 58, 21), mit $l_a = r_a = t_a = 0$, $l_1 = l$,

$$\mathfrak{R} = (l^2 - rt)\,\frac{g}{2l}, \tag{1}$$

und für die erste Zwischenstütze nach § 58, 20), mit $l_b = r_b = t_b = 0$, $l_a = l$,

$$\mathfrak{R}' = (l + r)\,(l + t)\,\frac{g}{2l}. \tag{2}$$

Wir erhalten aus diesen Gleichungen

$$\mathfrak{R} = (24^2 - 6\,.\,30)\,\frac{0{,}73}{48} = 6{,}02 \qquad \mathfrak{R}' = 30\,.\,54\,\frac{0{,}73}{48} = 24{,}64\,.$$

Für die Stäbe der ersten Oeffnung hat man nach § 63, 6) mit § 60, 21) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp m\left(n - m - \frac{\varrho\tau}{n}\right)\frac{g\lambda^2}{2h} = -\mathfrak{Z}_{m+1}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm\left(n + 1 - 2m - \frac{\varrho\tau}{n}\right)\frac{g\lambda d}{2h}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp\left(n + \frac{g_x - g_z}{g} - 2m - \frac{\varrho\tau}{n}\right)\frac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

worin die oberen Vorzeichen oben liegender X-Gurtung, die unteren unten liegender X-Gurtung entsprechen. Im vorliegenden Falle sind $n = 8$, $\varrho = 2$, $\tau = 10$, $\lambda = 3$, $h = 4$, $d = 5$, $g = 0{,}73$, und da hiernach $\mathfrak{D}_m$ bei oben liegender X-Gurtung vom vierten Felde an negativ würde, so sind die drei ersten Felder mit oben liegender, die fünf letzten mit unten liegender X-Gurtung anzuordnen. Es folgen dann aus 3) für $m = 1$ bis $m = 3$, mit $g_x = 0{,}53$, $g_z = 0{,}2$,

$$\mathfrak{X}_m = -0{,}821\, m\,(5{,}5 - m) = -\mathfrak{Z}_{m+1},$$
$$\mathfrak{D}_m = 1{,}369\,(6{,}5 - 2m),$$
$$\mathfrak{V}_m = -1{,}095\,(5{,}95 - 2m),$$

und von $m = 4$ bis $m = 8$, mit $g_x = 0{,}2$, $g_z = 0{,}53$,

$$\mathfrak{X}_m = 0{,}821\, m\,(5{,}5 - m),$$
$$\mathfrak{D}_m = -1{,}369\,(6{,}5 - 2m),$$
$$\mathfrak{V}_m = 1{,}095\,(5{,}05 - 2m).$$

Die Gleichungen für V_m, $\mathfrak{V}_m$ setzen voraus, dass sich zu beiden Seiten der Verticale m Felder gleicher Länge λ mit Diagonalen gleicher Stellung befinden, sie gelten also nicht für V_0, V_3. Indessen liefern die Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte 0 des Untergurts und 3 des Obergurts bei jeder Belastung

(4) $\qquad V_0 + R - 0{,}2\,.\,1{,}5 = 0, \qquad Z_0 = 0,$

(5) $\qquad V_3 + K_3 = 0, \qquad Z_4 - X_3 = 0,$

unter K_3 die Belastung des letzterwähnten Knotenpunkts verstanden. Vorstehende Gleichungen ergeben nun folgende Eigengewichtsbeanspruchungen der ersten Oeffnung:

$\mathfrak{X}_1 = -3{,}69$	$\mathfrak{Z}_1 = 0$	$\mathfrak{D}_1 = 6{,}16$	$\mathfrak{V}_1 = -4{,}33$
$\mathfrak{X}_2 = -5{,}75$	$\mathfrak{Z}_2 = 3{,}69$	$\mathfrak{D}_2 = 3{,}42$	$\mathfrak{V}_2 = -2{,}14$
$\mathfrak{X}_3 = -6{,}16$	$\mathfrak{Z}_3 = 5{,}75$	$\mathfrak{D}_3 = 0{,}68$	$\mathfrak{V}_3 = -1{,}59$
$\mathfrak{X}_4 = 4{,}93$	$\mathfrak{Z}_4 = -6{,}16$	$\mathfrak{D}_4 = 2{,}05$	$\mathfrak{V}_4 = -3{,}23$
$\mathfrak{X}_5 = 2{,}05$	$\mathfrak{Z}_5 = -4{,}93$	$\mathfrak{D}_5 = 4{,}79$	$\mathfrak{V}_5 = -5{,}42$
$\mathfrak{X}_6 = -2{,}46$	$\mathfrak{Z}_6 = -2{,}05$	$\mathfrak{D}_6 = 7{,}53$	$\mathfrak{V}_6 = -7{,}61$
$\mathfrak{X}_7 = -8{,}62$	$\mathfrak{Z}_7 = 2{,}46$	$\mathfrak{D}_7 = 10{,}27$	$\mathfrak{V}_7 = -9{,}80.$
$\mathfrak{X}_8 = -16{,}42$	$\mathfrak{Z}_8 = 8{,}62$	$\mathfrak{D}_8 = 13{,}01$	

Für die Stäbe der zweiten Oeffnung zwischen 0 und r gelten nach § 63, 8) bei Belastung durch Eigengewicht allein die Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = (\varrho - m)\,(\tau - m)\,\dfrac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = -\,(\varrho + 1 - m)\,(\tau + 1 - m)\,\dfrac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{D}_m = (\varrho + \tau + 1 - 2m)\,\dfrac{g\lambda d}{2h}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(\varrho + \tau + \dfrac{g_x - g_s}{g} - 2m\right)\dfrac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Ausnahmen bilden die Verticalen 0 und 2, für welche man bei jeder Belastung hat

$$(7)\qquad V_0 + R' - 0{,}2\,.\,3 = 0, \qquad V_2 + K_2 = 0,$$

unter K_2 die Belastung des Knotenpunkts 2 im Obergurt verstanden. Wir erhalten aus 6) 7):

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{X}_1 = 1\,.\,9\,.\,0{,}821 = 7{,}39 & \mathfrak{Z}_1 = -\,2\,.\,10\,.\,0{,}821 = -\,16{,}42 \\ \mathfrak{X}_2 = 0\,.\,8\,.\,0{,}821 = 0 & \mathfrak{Z}_2 = -\,1\,.\;9\,.\,0{,}821 = -\;7{,}39 \\ \mathfrak{D}_1 = 11\,.\,1{,}369 = 15{,}06 & \mathfrak{V}_0 = -\,24{,}64 + 0{,}6 = -\,24{,}04 \\ \mathfrak{D}_2 = 9\,.\,1{,}369 = 12{,}32 & \mathfrak{V}_1 = -\,10{,}45\,.\,1{,}095 = -\,11{,}44 \\ & \mathfrak{V}_2 = -\;0{,}53\,.\,1{,}5 = -\;0{,}80. \end{array}$$

Grenzwerthe. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind nach § 58, 17) für die Anfangsstütze, mit $l_a = r_a = t_a = 0$, $l_1 = l$,

$$(8)\qquad R = \mathfrak{R} + \frac{l}{2}\,p, \qquad R = \mathfrak{R} - \frac{r\,t}{2\,l}\,p,$$

und nach § 58, 16) für die erste Zwischenstütze, mit $l_b = r_b = t_b = 0$, $l_a = l$,

$$(9)\qquad R' = \mathfrak{R}' + (l + r)\,(l + t)\,\frac{p}{2\,l} = \frac{q}{g}\,\mathfrak{R}', \quad R' = \mathfrak{R}'.$$

Es folgen hieraus, mit $q : g = 3{,}5 : 0{,}73 = 4{,}794$,

$$R = 6{,}02 + 12\,.\,2{,}77 = 39{,}26,$$

$$R = 6{,}02 - \frac{3\,.\,30}{24}\,2{,}77 = -\,4{,}37,$$

$$R' = 4{,}794\,.\,24{,}64 = 118{,}12, \qquad R' = 24{,}64\,.$$

Da die Reaction R negativ werden kann, so sind die Trägerenden mit den Endstützen zu verankern. Die Verankerungen müssen dem Zuge von 4,37 tn widerstehen können.

Für die erste Oeffnung hat man nach § 64, 8) 9) 10) die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen:

$$(10)\quad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m \mp m(n-m)\frac{p\lambda^2}{2h} = -Z_{m+1}, \\ X_m = \mathfrak{X}_m \pm m\frac{\varrho\tau}{n}\frac{p\lambda^2}{2h} = -Z_{m+1}, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{(n-m)^2}{n-1}\frac{p\lambda d}{2h}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[\frac{(m-1)^2}{n-1} + \frac{\varrho\tau}{n}\right]\frac{p\lambda d}{2h}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen gelten von $m = 1$ bis $m = 3$ die oberen Vorzeichen und von $m = 4$ bis $m = 8$ die unteren Vorzeichen. Die Grenzbeanspruchungen der Verticalen 1 und 2 sind nach § 64, 11):

$$(12)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{(n-m)^2}{n-1}\frac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\frac{(m-1)^2}{n-1} + \frac{\varrho\tau}{n}\right]\frac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

und diejenigen der Verticalen 4 bis 7 naeh § 64, 12):

$$(13)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{(n-m-1)^2}{n-1}\frac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m - \left[\frac{m^2}{n-1} + \frac{\varrho\tau}{n}\right]\frac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Wir erhalten aus vorstehenden Gleichungen und 4) 5) die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen:

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\ \ 3{,}69 - 1\,.\,7\,.\,3{,}116 = -\ 25{,}50 = -Z_2 \\
X_2 &= -\ \ 5{,}75 - 2\,.\,6\,.\,3{,}116 = -\ 43{,}14 = -Z_3 \\
X_3 &= -\ \ 6{,}16 - 3\,.\,5\,.\,3{,}116 = -\ 52{,}90 = \ \ Z_4 \\
X_4 &= \ \ \ \ 4{,}93 + 4\,.\,4\,.\,3{,}116 = \ \ \ 54{,}79 = -Z_5 \\
X_5 &= \ \ \ \ 2{,}05 + 5\,.\,3\,.\,3{,}116 = \ \ \ 48{,}79 = -Z_6 \\
X_6 &= -\ \ 2{,}46 + 6\,.\,2\,.\,3{,}116 = \ \ \ 34{,}93 = -Z_7 \\
X_7 &= -\ \ 8{,}62 + 7\,.\,1\,.\,3{,}116 = \ \ \ 13{,}19 = -Z_8 \\
X_8 &= -16{,}42 + 8\,.\,0\,.\,3{,}116 = -\ 16{,}42,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\ \ 3{,}69 + 1\,.\,7{,}791 = \ \ \ \ 4{,}10 = -Z_2 \\
X_2 &= -\ \ 5{,}75 + 2\,.\,7{,}791 = \ \ \ \ 9{,}83 = -Z_3 \\
X_3 &= -\ \ 6{,}16 + 3\,.\,7{,}791 = \ \ \ 17{,}21 = \ \ Z_4 \\
X_4 &= \ \ \ \ 4{,}93 - 4\,.\,7{,}791 = -\ 26{,}23 = -Z_5 \\
X_5 &= \ \ \ \ 2{,}05 - 5\,.\,7{,}791 = -\ 36{,}90 = -Z_6 \\
X_6 &= -\ \ 2{,}46 - 6\,.\,7{,}791 = -\ 49{,}21 = -Z_7 \\
X_7 &= -\ \ 8{,}62 - 7\,.\,7{,}791 = -\ 63{,}16 = -Z_8 \\
X_8 &= -16{,}42 - 8\,.\,7{,}791 = -\ 78{,}74;
\end{aligned}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 6{,}16 + 49 \,.\, 0{,}742 = 42{,}52 \\
D_2 &= 3{,}42 + 36 \,.\, 0{,}742 = 30{,}13 \\
D_3 &= 0{,}68 + 25 \,.\, 0{,}742 = 19{,}23 \\
D_4 &= 2{,}05 - 16 \,.\, 0{,}742 = -\ 9{,}82 \\
D_5 &= 4{,}79 - 9 \,.\, 0{,}742 = -\ 1{,}89 \\
D_6 &= 7{,}53 - 4 \,.\, 0{,}742 = 4{,}56 \\
D_7 &= 10{,}27 - 1 \,.\, 0{,}742 = 9{,}53 \\
D_8 &= 13{,}01 - 0 \,.\, 0{,}742 = 13{,}01\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 6{,}16 - 17{,}5 \,.\, 0.742 = -\ 6{,}82 \\
D_2 &= 3{,}42 - 18{,}5 \,.\, 0{,}742 = -\ 10{,}31 \\
D_3 &= 0{,}68 - 21{,}5 \,.\, 0{,}742 = -\ 15{,}27 \\
D_4 &= 2{,}05 + 26{,}5 \,.\, 0{,}742 = 21{,}71 \\
D_5 &= 4{,}79 + 33{,}5 \,.\, 0{,}742 = 29{,}65 \\
D_c &= 7{,}53 + 42{,}5 \,.\, 0{,}742 = 39{,}07 \\
D_7 &= 10{,}27 + 53{,}5 \,.\, 0{,}742 = 49{,}97 \\
D_8 &= 13{,}01 + 66{,}5 \,.\, 0{,}742 = 62{,}35\,,
\end{aligned}
$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= -\ 39{,}26 + 0{,}30 = -\ 38{,}96 \\
V_1 &= -\ 4{,}33 - 49 \,.\, 0{,}594 = -\ 33{,}44 \\
V_2 &= -\ 2{,}14 - 36 \,.\, 0{,}594 = -\ 23{,}52 \\
V_3 &= -\ 0{,}53 \,.\, 3 - 2{,}77 \,.\, 3 = -\ 9{,}90 \\
V_4 &= -\ 3{,}23 + 9 \,.\, 0{,}594 = 2{,}12 \\
V_5 &= -\ 5{,}42 + 4 \,.\, 0{,}594 = -\ 3{,}04 \\
V_6 &= -\ 7{,}61 + 1 \,.\, 0{,}594 = -\ 7{,}02 \\
V_7 &= -\ 9{,}80 + 0 \,.\, 0{,}594 = -\ 9{,}80\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_0 &= 4{,}37 + 0{,}30 = 4{,}67 \\
V_1 &= -\ 4{,}33 + 17{,}5 \,.\, 0{,}594 = 6{,}07 \\
V_2 &= -\ 2{,}14 + 18{,}5 \,.\, 0{,}594 = 8{,}85 \\
V_3 &= \mathfrak{V}_3 = -\ 1{,}59 \\
V_4 &= -\ 3{,}23 - 33{,}5 \,.\, 0{,}594 = -\ 23{,}13 \\
V_5 &= -\ 5{,}42 - 42{,}5 \,.\, 0{,}594 = -\ 30{,}67 \\
V_6 &= -\ 7{,}61 - 53{,}5 \,.\, 0{,}594 = -\ 39{,}39 \\
V_7 &= -\ 9{,}80 - 66{,}5 \,.\, 0{,}594 = -\ 49{,}30\,.
\end{aligned}
$$

Für die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen in der zweiten Oeffnung von 0 bis r hat man nach § 64, 6)

$$(14) \qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m, \qquad D_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{D}_m;$$

wir erhalten, mit $q:g = 4{,}794$

$$X_1 = 35{,}43 \qquad Z_1 = -\,78{,}74 \qquad D_1 = 72{,}20$$
$$X_2 = 0 \qquad Z_2 = -\,35{,}43 \qquad D_2 = 59{,}06.$$

Die obere Grenzbeanspruchung der Verticale 1 ist nach § 60, 4) durch

$$(15) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m - (\varrho + \tau + 1 - 2m)\frac{p\lambda}{2}$$

bestimmt, sodass

$$V_1 = -\,11{,}44 - 11\,.\,4{,}155 = -\,57{,}15,$$

während aus 7) die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 0 und 2

$$V_0 = -\,118{,}12 + 0{,}6 = -\,117{,}52 \qquad V_2 = -\,3{,}5\,.\,1{,}5 = -\,4{,}45.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen aller Stäbe der zweiten Oeffnung zwischen 0 und r treten für Eigengewicht allein ein. Es sind also nun sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 80.

Beispiel 77. Continuirlicher Gelenkträger einfachen Systems mit Verticalen und parallelen Gurtungen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte und Stützenreactionen bleiben wie im vorigen Beispiele bestimmt. Wie dort mögen l die Spannweite der äussern Oeffnungen und r, t die Abstände der Zwischengelenke vom zweiten Auflager bezeichnen.

Die Grenzreactionen der Anfangsstütze ergeben sich nach § 59, 26) 27) mit $l_a = 0$, $l_1 = l$ bei Belastung der ersten Oeffnung durch Zug II (Fig. 22), Vorderrad O bei 0,

$$(1) \qquad R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l - a),$$

und bei Belastung der zweiten Oeffnung durch Zug I (Fig. 23 u. 24), Rad O bei r,

$$(2) \qquad R = \mathfrak{R} - \frac{1}{l}\Big[\sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\Big].$$

Für die obere Grenzreaction der ersten Zwischenstütze hat man nach § 59, 23) mit $l_a = l$, $l_b = 0$ bei Belastung der zwei ersten Oeffnungen durch Zug I, Rad O bei r,

$$(3) \quad R' = \mathfrak{R}' + \frac{1}{l}\sum_0^l Pa + \frac{1}{l}\Big[\sum_0^r P(l+a) + \frac{l+r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\Big],$$

während die untere Grenzreaction dieser Stütze für Eigengewicht allein eintritt. Die Summenausdrücke in vorstehenden wie in den folgenden Gleichungen lassen sich aus der Tabelle in Beispiel 6 entnehmen oder wie in den Beispielen 27, 42 berechnen. Im letzteren Falle drücken sich aus:

$$R = 6{,}02 + \frac{1}{24}\,[6\,(24 + 22{,}7 + 21{,}4 + 13 + 11{,}7 + 10{,}4 + 2 + 0{,}7) + 4\,(20{,}2 + 9{,}2) + 5\,(17{,}2 + 6{,}2)] = 42{,}27 \text{ tn},$$

$$R = 6{,}02 - \frac{1}{24}\,[6\,(6 + 4{,}7) + 4\,.\,3{,}5 + 5\,.\,0{,}5] - \frac{6}{24\,.\,24}\,[6\,(22{,}7 + 18{,}7 + 17{,}4 + 16{,}1 + 7{,}7 + 6{,}4 + 5{,}1) + 4\,(14{,}9 + 3{,}9) + 5\,(11{,}9 + 0{,}9)]$$
$$= -\,4{,}67 \text{ tn } (-\,3{,}69),$$

$$R' = 24{,}64 + \frac{1}{24}\,[6\,(30 + 28{,}7 + 20{,}3 + 19 + 17{,}7 + 9{,}3 + 8 + 6{,}7) + 4\,(27{,}5 + 16{,}5 + 5{,}5) + 5\,(24{,}5 + 13{,}5 + 2{,}5)] + \frac{30}{24\,.\,24}\,[6\,(22{,}7 + 18{,}7 + 17{,}4 + 16{,}1 + 7{,}7 + 6{,}4 + 5{,}1) + 4\,(14{,}9 + 3{,}9) + 5\,(11{,}9 + 0{,}9)]$$
$$= -\,112{,}91 \text{ tn } (-\,112{,}10),$$

$$R' = \mathfrak{R}' = 24{,}64 \text{ tn}.$$

Die Ansätze entsprechen der ersten Richtung des Zuges I, die der zweiten Richtung entsprechenden Werthe sind in Klammern beigefügt. Da die Reactionen der Endstützen negativ werden können, so sind die Trägerenden mit Letzteren zu verankern. Die Verankerungen haben einen Maximalzug von 4,67 tn auszuhalten.

Wird für Belastung der Mittelöffnung durch Zug I, Rad O bei r, gesetzt

$$(4) \qquad N' = \sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_0^t P(t-a)$$

so erhält man die Grenzbeanspruchungen der ersten Oeffnung nach § 65, 14) — 21) wie folgt.

Belastung der ersten Oeffnung durch Zug I, Rad O bei $v = m\lambda$,

$$(5)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{nh} = -Z_{m+1},$$

zweiter Grenzwerth

$$(6)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \pm \frac{m}{nh}N' = -Z_{m+1};$$

Belastung der ersten Oeffnung von v bis l durch Zug II, Vorderrad O bei $v = m\lambda$,

$$(7)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{d}{lh}\sum_v^l P(l-a);$$

Belastung der ersten Oeffnung von 0 bis c durch Zug II, Vorderrad O bei $c = (m-1)\lambda$,

$$(8)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{d}{lh}\left(N' + \sum_0^c Pa\right);$$

Belastung der ersten Oeffnung von v bis l durch Zug II, Vorderrad O für die Verticalen 1 und 2 bei $v = m\lambda$, für die Verticalen 4 bis 7 bei $v = (m+1)\lambda$,

$$(9)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{1}{l}\sum_v^l P(l-a);$$

Belastung der ersten Oeffnung von 0 bis c durch Zug II, Vorderrad O für die Verticalen 1 und 2 bei $c = (m-1)\lambda$, für die Verticalen 4 bis 7 bei $c = m\lambda$,

$$(10)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{1}{l}\left(N' + \sum_0^c Pa\right).$$

Für die Gurtungen und Diagonalen gelten die oberen Vorzeichen von $m = 1$ bis 3, die unteren von $m = 4$ bis 8, für die Verticalen die oberen von $m = 1$ bis 2, die unteren von $m = 4$ bis 7. Die Stabkräfte V_0, V_3, Z_0, Z_4 sind durch B. 76, 4) 5) bestimmt. Die Summenausdrücke in vorstehenden Gleichungen können wieder berechnet oder aus der Tabelle in Beispiel 6 entnommen werden. Auf beide Arten erhält man mit der ersten und zweiten Richtung des Zuges I bezw.

$$N' = 80{,}7 + \frac{6}{24}\,704 = 257,$$

$$N' = 32{,}4 + \frac{6}{24}\,808 = 234,$$

und folgende Grenzbeanspruchungen der Gurtungen in Tonnen:

$$X_1 = -\ 3{,}69 - \frac{1}{32}(7.30{,}2 + 1.535) = -27{,}02 = -Z_2\ (-25{,}61)$$
$$X_2 = -\ 5{,}75 - \frac{1}{32}(6.80{,}7 + 2.383) = -44{,}82 = -Z_3\ (-42{,}45)$$
$$X_3 = -\ 6{,}16 - \frac{1}{32}(5.145 + 3.271) = -54{,}22 = Z_4\ (-52{,}75)$$
$$X_4 = 4{,}93 + \frac{1}{32}(4.226 + 4.173) = 54{,}81 = -Z_5\ (54{,}81)$$
$$X_5 = 2{,}05 + \frac{1}{32}(3.271 + 5.145) = 50{,}11 = -Z_6\ (48{,}67)$$
$$X_6 = -\ 2{,}46 + \frac{1}{32}(2.383 + 6.80{,}7) = 36{,}61 = -Z_7\ (34{,}24)$$
$$X_7 = -\ 8{,}62 + \frac{1}{32}(1.535 + 7.30{,}2) = 14{,}71 = -Z_8\ (13{,}50)$$
$$X_8 = -16{,}42 + \frac{1}{32}(0.704 + 8.\ 0\ ) = -16{,}42\ (-16{,}42),$$

$$X_1 = -\ 3{,}69 + \frac{1.257}{32} = 4{,}34 = -Z_2$$
$$X_2 = -\ 5{,}75 + \frac{2.257}{32} = 10{,}31 = -Z_3$$
$$X_3 = -\ 6{,}16 + \frac{3.257}{32} = 17{,}93 = Z_4$$
$$X_4 = 4{,}93 - \frac{4.257}{32} = -27{,}19 = -Z_5$$
$$X_5 = 2{,}05 - \frac{5.257}{32} = -38{,}10 = -Z_6$$
$$X_6 = -\ 2{,}46 - \frac{6.257}{32} = -50{,}65 = -Z_7$$
$$X_7 = -\ 8{,}62 - \frac{7.257}{32} = -64{,}84 = -Z_8$$
$$X_8 = -16{,}42 - \frac{8.257}{32} = -80{,}67.$$

Die in Klammer beigesetzten Werthe hätten sich mit der nicht verwendeten Zugrichtung ergeben, für $m = 1$ bis 4 mit der zweiten, für $m = 5$ bis 8 mit der ersten. Weiter erhalten wir in Tonnen die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_1 = 6{,}16 + \frac{692}{19{,}2} = 42{,}20 \qquad D_1 = 6{,}16 - \frac{257+0}{19{,}2} = -\ 7{,}23$$
$$D_2 = 3{,}42 + \frac{530}{19{,}2} = 31{,}02 \qquad D_2 = 3{,}42 - \frac{257+30{,}6}{19{,}2} = -11{,}56$$
$$D_3 = 0{,}68 + \frac{382}{19{,}2} = 20{,}58 \qquad D_3 = 0{,}68 - \frac{257+93{,}4}{19{,}2} = -17{,}57$$

$$D_4 = 2{,}05 - \frac{257}{19{,}2} = -11{,}34 \qquad D_4 = 2{,}05 + \frac{257+170}{19{,}2} = 24{,}29$$
$$D_5 = 4{,}79 - \frac{170}{19{,}2} = -4{,}66 \qquad D_5 = 4{,}79 + \frac{257+257}{19{,}2} = 31{,}56$$
$$D_6 = 7{,}53 - \frac{93{,}4}{19{,}2} = 2{,}67 \qquad D_6 = 7{,}53 + \frac{257+383}{19{,}2} = 40{,}81$$
$$D_7 = 10{,}27 - \frac{30{,}6}{19{,}2} = 8{,}68 \qquad D_7 = 10{,}27 + \frac{257+530}{19{,}2} = 51{,}26$$
$$D_8 = 13{,}01 - \frac{0}{19{,}2} = 13{,}01 \qquad D_8 = 13{,}01 + \frac{257+692}{19{,}2} = 62{,}44,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$V_0 = -42{,}27 + 0{,}3 = -41{,}97$$
$$V_1 = -4{,}33 - \frac{692}{24} = -33{,}16$$
$$V_2 = -2{,}14 - \frac{530}{24} = -24{,}22$$
$$V_3 = -1{,}59 - 13{,}47 = -15{,}06$$
$$V_4 = -3{,}23 - \frac{170}{24} = 3{,}85$$
$$V_5 = -5{,}42 - \frac{93{,}4}{24} = -1{,}53$$
$$V_6 = -7{,}61 - \frac{30{,}6}{24} = -6{,}33$$
$$V_7 = -9{,}80 - \frac{0}{24} = -9{,}80,$$

$$V_0 = 4{,}67 + 0{,}3 = 4{,}97$$
$$V_1 = -4{,}33 + \frac{257+0}{24} = 6{,}38$$
$$V_2 = -2{,}14 + \frac{257+30{,}6}{24} = 9{,}84$$
$$V_3 = \mathfrak{V}_3 = -1{,}59$$
$$V_4 = -3{,}23 - \frac{257+257}{24} = -24{,}65$$
$$V_5 = -5{,}42 - \frac{257+382}{24} = -32{,}04$$
$$V_6 = -7{,}61 - \frac{257+530}{24} = -40{,}40$$
$$V_7 = -9{,}80 - \frac{257+692}{24} = -49{,}34.$$

Bei Berechnung des negativen Grenzwerths von V_3 nach B. 76, 5)

war zu beachten, dass die grösste von der Verkehrslast herrührende Knotenpunktslast ist

$$K = 6 + 2 \,.\, 6 \frac{1,7}{3} + 4 \frac{0,5}{3} = 13,47.$$

Für die Stäbe der zweiten Oeffnung, soweit sie hier noch zu berechnen sind, treten die unteren Grenzbeanspruchungen für Eigengewicht allein ein, die oberen ergeben sich nach § 65, 1)—4) wie folgt:

Belastung der zweiten Oeffnung durch Zug I, Rad O bei r, $c = (m - 1)\lambda$,

$$(11)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m - \Big[\sum_c^r P(a-c) + \frac{\varrho + 1 - m}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\Big]\frac{1}{h} = -X_{m-1},$$

Belastung der zweiten Oeffnung durch Zug I, Rad O bei $v = m\lambda$, $c = (m - 1)\lambda$,

$$(12)\quad D_m = \mathfrak{D}_m + \Big[\sum_c^v P(a-c) + \lambda \sum_v^r P + \frac{1}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\Big]\frac{d}{\lambda h},$$

$$(13)\quad V_m = \mathfrak{V}_m - \Big[\sum_c^v P(a-c) + \lambda \sum_v^r P + \frac{1}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\Big]\frac{1}{\lambda}.$$

Diese Gleichungen liefern folgende Grenzbeanspruchungen in Tonnen (die in Klammern beigesetzten Werthe entsprechen der nicht verwendeten Zugrichtung):

$$Z_1 = -16,42 - \left(80,7 + \frac{2}{8}\, 704\right)\frac{1}{4} = -80,60\ (-75,02),$$

$$Z_2 = 7,39 - \left(30,2 + \frac{1}{8}\, 704\right)\frac{1}{4} = -36,94 = -X_1\ (-35,19),$$

$$V_1 = -11,44 - \frac{1}{3}(6 \,.\, 1,7 + 4 \,.\, 0,5) - 6 - 6 - \frac{1}{24}[6\,(21,7 + 20,4 + 19,1 + 10,7 + 9,4 + 8,1) + 4\,(17,9 + 6,9) + 5\,(14,9 + 3,9)] = -11,44 - 46,48 = -57,92\ (-51,44),$$

$$D_1 = 15,06 + 46,48\,\frac{5}{4} = 73,16,$$

$$D_2 = 12,32 + \frac{5}{12}\left(30,2 + \frac{1}{8}\, 704\right) = 61,57,$$

während sich nach B. 76, 7) die oberen Grenzwerthe von V_0, V_2 ergeben

$$V_0 = -112,91 + 0,6 = -112,31,$$

$$V_2 = -0,80 - \frac{6}{3}(3 + 1,7 + 0,4) = -10,82.$$

Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt, doch kann man, wenn man will, noch Folgendes berücksichtigen.

Für die Diagonale 1 und Verticale 1 der ersten Oeffnung tritt die erste Grenzbeanspruchung, wie oben ersichtlich, ohne Verkehrslast in dieser Oeffnung l ein (wegen $z = c = 0$). Nach § 59 wird dann voraussichtlich die zweite Grenzbeanspruchung etwas ungünstiger als oben mit Zug II, wenn Zug I von 0 bis l mit Rad O bei $v = \lambda$ die Oeffnung belastet. In der That erhalten wir aus den nach § 65, 12) 13) für beliebige Belastung gültigen Gleichungen

$$(14)\quad \begin{cases} D_1 = \mathfrak{D}_1 + \left[(n-1)\sum_0^v Pa + \sum_v^l P(l-a) - N'\right]\frac{d}{lh}, \\ V_1 = \mathfrak{V}_1 - \left[(n-1)\sum_0^v Pa + \sum_v^l P(l-a) - N'\right]\frac{1}{l} \end{cases}$$

mit den schon für X_1 verwendeten $\sum$ und $N' = 0$

$$D_1 = 6{,}16 + \frac{7 \cdot 30{,}2 + 535}{19{,}2} = 45{,}05,$$

$$V_1 = -4{,}33 - \frac{7 \cdot 30{,}2 + 535}{19{,}2} = -35{,}43 \text{ tn},$$

gegen oben berechnete 42,20 und — 33,16 tn. — Ebenso tritt für die Diagonale 8 und Verticale 7 der ersten Oeffnung die erste Grenzbeanspruchung ohne Verkehrslast in dieser Oeffnung ein (wegen $z = v = l$). Nach § 59 wird voraussichtlich die zweite Grenzbeanspruchung etwas ungünstiger als oben mit Zug II, wenn Zug I von 0 bis l mit Rad O bei $c = (m-1)\lambda$ die Oeffnung belastet. Wir erhalten aus den nach § 65, 12) 13) für beliebige Belastung gültigen Gleichungen

$$(15)\quad \begin{cases} D_n = \mathfrak{D}_n + \left[N' + \sum_0^c Pa + (n-1)\sum_c^l P(l-a)\right]\frac{d}{lh}, \\ V_{n-1} = \mathfrak{V}_{n-1} - \left[N + \sum_0^c Pa + (n-1)\sum_c^l P(l-a)\right]\frac{1}{l} \end{cases}$$

mit den schon für X_7 verwendeten $\sum$, N',

$$D_1 = 13{,}01 + \frac{257 + 535 + 7 \cdot 30{,}2}{19{,}2} = 65{,}27,$$

$$V_1 = -9{,}80 - \frac{257 + 535 + 7 \cdot 30{,}2}{24} = -51{,}61 \text{ tn},$$

gegen oben berechnete 62,44 und — 49,34 tn. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 81.

Beispiel 78. Continuirlicher Gelenkträger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last. Für eine Brücke mit drei Oeffnungen sollen continuirliche Gelenkträger der Spannweiten 24 m, 36 m, 24 m nach der Anordnung Fig. 137 zur Verwendung kommen. Die gekrümmte Gurtung des Mittelfeldes ist parabolisch, in Figur eingeschriebene Zahlen bedeuten Dimensionen in Metern. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}73$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}77$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,53 tn auf die Knotenpunkte des durchgehenden Horizontalgurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,2 tn auf diejenigen des andern Gurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen anzugeben.

Die Berechnung des einfachen Balkenfachwerks zwischen den beiden mittleren Gelenken ist in Beispiel 54 durchgeführt. Die Stabkräfte der äussern Oeffnungen sind genau wie im vorletzten Beispiele bestimmt und Gleiches gilt von den Stützenreactionen, welche überhaupt nicht von der Trägerform abhängen. Mit Rücksicht auf die symmetrische Anordnung des Trägers haben wir also nur noch die Grenzwerthe der Stabkräfte zwischen 0 und dem ersten Zwischengelenke der zweiten Oeffnung zu bestimmen (Fig. 138).

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 60, 19), abgesehen von V_0, V_2,

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = (\varrho - m)(\tau - m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = -(\varrho + 1 - m)(\tau + 1 - m)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \left[\varrho + \tau + 1 - 2m - \dfrac{(\varrho - m)(\tau - m)}{\varepsilon}\right]\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left[\varrho + \tau + 1 + \dfrac{g_x - g_s}{g} - 2m + \dfrac{(\varrho - m)(\tau - m)}{\nu}\right]\dfrac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

worin im vorliegenden Falle $\varrho = 2$, $\tau = 10$, $\lambda = 3 = x_m$, $g = 0{,}73$, $g_x = 0{,}53$, $g_s = 0{,}2$ und

für	$m =$	1	2:
	$\varepsilon = \dfrac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	$-0{,}818$	0
	$\nu = \dfrac{h_m}{h_{m+1} - h_m} =$	-1	0.

Wir erhalten damit in Tonnen:

$$\mathfrak{X}_1 = 1 \,.\, 9 \,\frac{3}{1{,}8}\, 1{,}095 = 16{,}43 \qquad \mathfrak{X}_2 = 0 \,.\, 8 \,\frac{3}{0}\, 1{,}095\,,$$

$$\mathfrak{Z}_1 = -\,2 \,.\, 10 \,\frac{3{,}72}{4}\, 1{,}095 = -\,20{,}37$$

$$\mathfrak{Z}_2 = -\,1 \,.\, 9 \,\frac{3{,}5}{1{,}8}\, 1{,}095 = -\,19{,}16,$$

$$\mathfrak{D}_1 = \left(11 - \frac{1\,.\,9}{0{,}82}\right) \frac{3{,}5}{4}\, 1{,}095 = 0 \qquad \mathfrak{D}_2 = \left(9 - \frac{0\,.\,8}{0}\right) \frac{3}{1{,}8}\, 1{,}095\,,$$

$$\mathfrak{V}_1 = -\left(10{,}45 - \frac{1\,.\,9}{1}\right) 1{,}095 = -\,1{,}59\,.$$

Für $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{D}_2$ entstehen also unbestimmte Ausdrücke, doch liefern die Gleichgewichtsbedingungen für den Knotenpunkt 1 des Obergurts die Beanspruchungen der Verticale 1 und des Obergurtstabes 2 bei **jeder** Belastung

$$(2) \qquad V_1 = -\,K_1\,, \qquad X_2 = X_1\,,$$

unter K_1 die Belastung jenes Knotenpunkts verstanden. Die Eigengewichtsbeanspruchung der Verticale 0 aber ist nach B. 79, 6) 4)

$$(3) \qquad \mathfrak{V}_0 = -\left(n + \varrho + \tau - \frac{n \mathfrak{z}_1 - h}{nh}\, \varrho\tau\right) \frac{g\lambda}{2} + \lambda g_z\,.$$

Aus 2) 3) folgen:

$$\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 = 16{,}43 \text{ tn}\,,$$

$$\mathfrak{V}_0 = -\left(20 - \frac{13{,}6}{8\,.\,4}\, 2\,.\,10\right) 1{,}095 + 3\,.\,0{,}2 = -\,11{,}99 \text{ tn}\,.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind die soeben berechneten Beanspruchungen für Eigengewicht allein, die oberen Grenzwerthe hat man nach § 61, 9)

$$(4) \qquad X_m = \frac{q}{g}\, \mathfrak{X}_m\,, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\, \mathfrak{Z}_m\,,$$

also wegen $q : g = 3{,}5 : 0{,}73 = 4{,}794$ in Tonnen:

$$X_1 = 78{,}77 = X_2\,,$$
$$Z_1 = -\,97{,}65\,,$$
$$Z_2 = -\,91{,}85\,.$$

Grenzbeanspruchungen der Diagonale 1, da $m - \varepsilon$ für dieselbe zwischen 0 und ϱ liegt, nach § 61, 3),

$$(5) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (1 - \varepsilon)\, \dfrac{d_m}{h_{m-1}}\, \dfrac{p\lambda}{2}\,, \\[2ex] D_m = \mathfrak{D}_m - (m - \varepsilon - \varrho)\,(\tau + \varepsilon - m)\, \dfrac{d_m}{\varepsilon\, h_{m-1}}\, \dfrac{p\lambda}{2}\,, \end{cases}$$

das heisst:

$$D_1 = 0 + 1{,}818 \frac{3{,}5}{4} 4{,}155 = 6{,}61 \text{ tn},$$

$$D_1 = 0 - 0{,}182 \,.\, 8{,}182 \frac{3{,}5}{0{,}818 \,.\, 4} 4{,}155 = -6{,}61 \text{ tn}.$$

Für die obere Grenzbeanspruchung der Verticale 0 hat man wegen $\alpha = \frac{lh}{n\mathfrak{z}_1 - h} = \frac{24 \,.\, 4}{8 \,.\, 2{,}2 - 4} = 7{,}06 > r$ nach B. 79, 7):

$$(6) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \left(l + r + t - \frac{rt}{\alpha}\right)\frac{p}{2},$$

$$V_0 = -11{,}99 - \left(60 - \frac{13{,}6}{96} 6 \,.\, 30\right) 0{,}385 = -59{,}77 \text{ tn},$$

während die obere Grenzbeanspruchung der Verticale 1 nach 2) ist

$$V_1 = -(0{,}53 + 2{,}77)\,3 = -9{,}90 \text{ tn}$$

und die unteren Grenzbeanspruchungen der beiden Verticalen für Eigengewicht allein eintreten.

Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 82.

Beispiel 79. Continuirlicher Gelenkträger einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Das Trägerstück zwischen den beiden mittleren Gelenken ist in Beispiel 55 berechnet. Die Stabkräfte der äussern Oeffnungen bleiben genau wie in Beispiel 77 bestimmt. Dasselbe gilt von den Stützenreactionen, für welche die Trägerform nicht in Betracht kommt. Die Eigengewichtsbeanspruchungen der Stäbe zwischen 0 und dem ersten Gelenke der Mittelöffnung wurden im vorigen Beispiele ermittelt. Wir haben also nur noch die Grenzbeanspruchungen dieser Stäbe abzuleiten.

Nach § 62 hat man für die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe bei Belastung der Mittelöffnung durch Zug I (Fig. 23 und 24), Rad O bei r,

$$(1) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - \Big[\sum_c^r P(a-c)$$

$$+ \frac{\varrho + 1 - m}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\Big] \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}} = -\frac{z_m}{x_{m-1}} X_{m-1},$$

worin $c = (m - 1)\lambda$, $v = m\lambda$, sodass mit Rücksicht auf die Tabelle des Beispiels 6 und B. 78, 2)

$$Z_1 = -20{,}37 - \left(80{,}7 + \frac{2}{8}\,704\right)\frac{3{,}72}{3\,.\,4} = -99{,}95 \text{ tn}$$

$$Z_2 = -19{,}16 - \left(30{,}2 + \frac{1}{8}\,704\right)\frac{3{,}5}{3\,.\,1{,}8} = -95{,}77 \text{ ,,}$$

$$X_1 = \frac{3}{3{,}5}\,95{,}77 = 82{,}09 \text{ tn}$$

$$X_2 = X_1 \qquad = 82{,}09 \text{ ,, .}$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen treten für Eigengewicht allein ein. Da für die Diagonale 1 der Werth $m - \varepsilon = 1{,}82$ zwischen 0 und $\varrho = 2$ liegt, so erhält man nach § 62 deren Grenzbeanspruchungen für Belastung der Mittelöffnung durch Zug I, Rad O bei v,

$$(2) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \left[-\varepsilon \sum_c^v P(a - c) + \sum_v^u P(u - a)\right] \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}},$$

und für Belastung von r bis t durch Zug II (Fig. 22), Vorderrad O bei r,

$$(3) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{\varepsilon\, h_{m-1}}\, \frac{\varrho - m + \varepsilon}{t - r} \sum_r^t P(t - a),$$

worin $c = (m - 1)\lambda = 0$, $v = m\lambda = 3$, $u = (m - \varepsilon)\lambda = 5{,}45$. Wir erhalten, wie oben mit der ersten Richtung des Zugs I,

$$D_1 = 0 + [0{,}82\,.\,30{,}2 + 6\,(5{,}45 - 4{,}3)]\,\frac{3{,}5}{0{,}82\,.\,12} = 11{,}26 \text{ tn}$$

$$D_1 = 0 - \frac{3{,}5\,.\,0{,}18}{0{,}82\,.\,4\,.\,24}\,870 = -6{,}96 \text{ tn.}$$

Die obere Grenzbeanspruchung der Verticale 0 ergibt sich nach der unten folgenden Ableitung wegen $\alpha = 7{,}06 > r$ aus 5) bei Belastung der beiden ersten Oeffnungen durch Zug I, Rad O über r, zweite Zugrichtung,

$$\begin{aligned} V_0 = -11{,}99 - \frac{704}{24} - \frac{1}{7{,}06}\,&[6\,.\,7{,}06 + 6\,(7{,}06 - 1{,}3) + 4\,(7{,}06 - 2{,}5) \\ &+ 5\,(7{,}06 - 5{,}5)] - \frac{1{,}06}{24\,.\,7{,}06}\,[6\,(20{,}3 + 19 + 17{,}7 \\ &+ 9{,}3 + 8 + 6{,}7) + 4\,(16{,}5 + 5{,}5) + 5\,(13{,}5 + 2{,}5)] \\ &= -59{,}80 \text{ tn.} \end{aligned}$$

Mit der ersten Zugrichtung hätten wir erhalten

$$\begin{aligned} V_0 = -11{,}99 - \frac{808}{24} - \frac{1}{7{,}06}\,&[6\,(7{,}06 - 1{,}3) + 6\,(7{,}06 - 5{,}3)] \\ - \frac{1{,}06}{24\,.\,7{,}06}\,&[6\,(23{,}4 + 22{,}1 + 13{,}7 + 12{,}4 + 11{,}1 + 2{,}7 + 1{,}4 \\ &+ 0{,}1) + 4\,(20{,}9 + 9{,}9) + 5\,(17{,}9 + 6{,}9)] = -56{,}86 \text{ tn.} \end{aligned}$$

Der obere Grenzwerth von V_1 entsteht nach B. 78, 2) bei grösstem K_1

$$V_1 = -0{,}53 \,.\, 3 - 6 - 2 \,.\, 6 \frac{1{,}7}{3} - 4 \frac{0{,}5}{3} = -15{,}06 \text{ tn}.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen beider Verticalen treten für Eigengewicht allein ein. Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt. Ueber Anwendung von Gegendiagonalen im vorliegenden Falle siehe Beispiel 83.

Ableitung der Formeln für V_0. Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf das zweite Auflager liefert für beliebige Belastung der Fahrbahn (Fig. 139)

$$V_0 + R' - g_z\lambda + Z_1 \frac{\mathfrak{z}_1}{z_1} = 0.$$

Da nun nach § 59, 22) mit § 58, 18) und $l_a = l$, $l_b = 0$ (l Spannweite der äussern Oeffnungen)

$$R' = (l + r)(l + t)\frac{g}{2l} + \frac{1}{l}\sum_0^l Pa$$

$$+ \frac{1}{l}\left[\sum_0^r P(l + a) + \frac{l + r}{t - r}\sum_r^t P(t - a)\right],$$

sowie nach § 62, 2) mit § 60, 19) und $m = 1$, $c = 0$,

$$Z_1 = -\varrho\tau\frac{z_1}{h}\frac{g\lambda}{2} - \left[\sum_0^r Pa + \frac{\varrho}{\tau - \varrho}\sum_r^t P(t - a)\right]\frac{z_1}{\lambda h},$$

so folgt durch Substitution mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(4) \qquad \alpha = \frac{lh}{n\mathfrak{z}_1 - h}$$

für jede Belastung

$$(5) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{1}{l}\sum_0^l Pa - \frac{1}{\alpha}\sum_0^r P(\alpha - a)$$

$$- \frac{1}{t - r}\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)\sum_r^t P(t - a),$$

worin der Belastung durch Eigengewicht allein entspricht

$$(6) \qquad \mathfrak{V}_0 = -\left(l + r + t - \frac{rt}{\alpha}\right)\frac{g}{2} + \lambda g_z.$$

Beispielsweise erhält man für eine über die ganze Trägerlänge oder auch nur von der Anfangsstütze bis t gleichmässig vertheilte Last

von p per Längeneinheit aus 5) mit $P = pda$ (wie übrigens schon aus 6) zu entnehmen ist)

$$(7) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \left(l + r + t - \frac{rt}{\alpha}\right)\frac{p}{2}.$$

Bezüglich der Grenzwerthe von V_0 sind zwei Fälle zu unterscheiden. Für $\alpha \geqq r$ und $\alpha \leqq 0$ tragen nach 5) alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne oder gar nicht zu V_0 bei, wir erhalten den unteren Grenzwerth für Eigengewicht allein, den oberen für gleichmässig vertheilte bewegte Last nach 7) und für bewegte Radlastzüge bei Belastung der zwei ersten Oeffnungen durch Zug I, Rad O über der ersten Zwischenstütze, nach 5). Für $0 < \alpha < r$ dagegen würde zwischen 0 und r bei $a = \alpha$ ein Zeichenwechsel der Beiträge eintreten, doch kommt dieser Fall hier nicht in Betracht.

Beispiel 80. Continuirlicher Gelenkträger einfachen Systems mit Gegendiagonalen und parallelen Gurtungen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Den in Beispiel 76 behandelten Parallelträger für den Fall zu berechnen, dass die Diagonalen nur auf Zug widerstehen.

Der einfache Träger zwischen den beiden mittleren Gelenken ist in Beispiel 44 berechnet. Für die übrigen Felder der Mittelöffnung sind die Diagonalen nach Beispiel 76 immer auf Zug beansprucht, sodass die dortige Berechnung ungeändert bleibt. Letzteres gilt auch für die Stützenreactionen und die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte der äussern Oeffnungen. Wir haben also nur noch die in Beispiel 76 erhaltenen Grenzbeanspruchungen der Stäbe in der ersten Oeffnung mit Rücksicht auf hinzukommende Gegendiagonalen zu modificiren, wobei nach der Anleitung in § 56 verfahren werden soll. Alle Stabkräfte sind in Tonnen angegeben.

Da die Beanspruchungen der Diagonalen in den fünf ersten Feldern negativ werden konnten, so sind daselbst Gegendiagonalen anzuordnen. Die unteren Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen in den Feldern mit Gegendiagonalen sind Null und die oberen

im Felde $m =$	1	2	3	4	5:
für die Hauptdiagonale	42,52	30,13	19,23	21,71	29,65
„ „ Gegendiagonale	6,82	10,31	15,27	9,82	1,89.

In den Feldern 6 bis 8 bleiben die in Beispiel 76 berechneten Stabkräfte ungeändert.

Die ersten Grenzbeanspruchungen aller Gurtungsstäbe entstehen, wenn die erste Oeffnung allein total belastet ist. In diesem Falle haben wir nach § 65, 12) mit $N = N' = 0$ und $P = pda$, wie übrigens schon aus der Formel § 63, 6) für $\mathfrak{D}_m$ ersichtlich ist,

$$D_m = \mathfrak{D}_m \pm (n - 2m + 1)\frac{p\lambda d}{2h}, \tag{1}$$

worin bei oben liegender X-Gurtung das obere, bei unten liegender das untere Vorzeichen gilt. Gleichung 1) liefert für die Hauptdiagonalen in den drei ersten Feldern (X-Gurtung oben) positive Werthe, sodass dort die berechneten ersten Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe gültig bleiben. Im Falle 4 dagegen erhält man für die Hauptdiagonale (X-Gurtung unten)

$$D_4 = 2{,}05 - (9 - 2\,.\,4)\,5{,}194 = -\,3{,}14,$$

während im Felde 5 für die Hauptdiagonale wieder positiv wird

$$D_5 = 4{,}79 - (9 - 2\,.\,5)\,5{,}194 = 7{,}24.$$

Die ersten Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe ändern sich also nur im Felde 4 und zwar erhalten wir nach § 56, 6) für den Obergurtstab und Untergurtstab

$$O_4 = -\,X_4 = -\,54{,}79, \qquad U_4 = -\,Z_4 = 52{,}90.$$

Die zweiten Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe in der ersten Oeffnung entstehen, wenn die Mittelöffnung allein total belastet ist. Wir haben dann nach § 65, 12) mit $N = 0$, verschwindenden P und N' nach § 61, 12), wie ebenfalls schon aus § 63, 6) zu entnehmen wäre,

$$D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{\varrho\tau}{n}\frac{p\lambda d}{2h}. \tag{2}$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerthe wird

$$D_m = \mathfrak{D}_m \mp 12{,}985,$$

und da dieser Ausdruck in allen Feldern mit Gegendiagonalen bei unten liegender X-Gurtung positiv ist, so bleiben die für die Felder 4 und 5 berechneten zweiten Grenzwerthe der Gurtungskräfte gültig, während für die drei ersten Felder folgen:

$$\begin{aligned} O_1 &= -\,Z_3 = 0 & U_1 &= -\,X_1 = -\;\;4{,}10 \\ O_2 &= -\,Z_2 = 4{,}10 & U_2 &= -\,X_2 = -\;\;9{,}83 \\ O_3 &= -\,Z_3 = 9{,}83 & U_3 &= -\,X_3 = -\,17{,}21. \end{aligned}$$

Für die unteren Grenzbeanspruchungen der Verticalen 0 bis 5 hat man nach § 56

$$V_m = -\,\mathfrak{K}_o, \tag{3}$$

und für die oberen den aus einer der Formeln

(4) $$V_m = -K_o - \frac{h}{d} D_{m+1} = K_u - \frac{h}{d} D_m,$$

(5) $$V_m = K_u - \frac{h}{d} D'_{m+1},$$

(6) $$V_m = -K_o,$$

folgenden grössten negativen Werth. Wir erhalten die unteren Grenzbeanspruchungen

$$V_0 = -0{,}53 \,.\, 1{,}5 = -0{,}80,$$
$$V_1 \text{ bis } V_5 = -0{,}53 \,.\, 3 = -1{,}59,$$

sowie die oberen mit Rücksicht auf die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonalen nach 4):

$$V_0 = -3{,}3 \,.\, 1{,}5 + \frac{4}{5} 42{,}52 = -38{,}97$$
$$V_1 = 0{,}6 - \frac{4}{5} 42{,}52 = -33{,}42$$
$$V_2 = 0{,}6 - \frac{4}{5} 30{,}13 = -23{,}50,$$

und nach 5):

$$V_3 = 0{,}6 - \frac{4}{5} 21{,}71 = -16{,}17$$
$$V_4 = 0{,}6 - \frac{4}{5} 29{,}65 = -23{,}12$$
$$V_5 = 0{,}6 - \frac{4}{5} 39{,}07 = -30{,}66.$$

Die Formel 6) hätte nur $V_m = -3{,}3 \,.\, 3 = -9{,}9$ und die Formel 4) für V_3 nur $0{,}6 - 0{,}8 \,.\, 19{,}23 = -14{,}78$ ergeben.

Es sind nun sämmtliche Grenzbeanspruchungen bestimmt. Dieselben wurden in Fig. 140 für eine Trägerhälfte bei ihren Stäben eingeschrieben.

Bemerkungen. Nach § 56 hätten wir bei Bestimmung der Grenzbeanspruchungen der Gurtungen unter Vermeidung der Untersuchung bezüglich der wirksamen Diagonalen und im Allgemeinen zu ungünstig rechnend auch wie folgt vorgehen können. Nach § 56, 1) 2):

$O_1 = X_1 = -25{,}50$	und	$4{,}10$	$U_1 = Z_1 = 0$	und	0
$O_2 = X_2 = -43{,}14$	„	$9{,}83$	$U_2 = Z_2 = 25{,}50$	„	$-4{,}10$
$O_3 = X_3 = -52{,}90$	„	$17{,}21$	$U_3 = Z_3 = 43{,}14$	„	$-9{,}83$
$O_4 = Z_4 = -52{,}90$	„	$17{,}21$	$U_4 = X_4 = 54{,}79$	„	$-26{,}23$
$O_5 = Z_5 = -54{,}79$	„	$26{,}23$	$U_5 = X_5 = 48{,}79$	„	$-36{,}90,$

und nach § 56, 5) 6):

$$O_1 = -Z_1 = 0 \text{ und } 0$$
$$O_2 = -Z_2 = -25{,}50 \text{ „ } 4{,}10$$
$$O_3 = -Z_3 = -43{,}14 \text{ „ } 9{,}83$$
$$O_4 = -X_4 = -54{,}79 \text{ „ } 26{,}23$$
$$O_5 = -X_5 = -48{,}79 \text{ „ } 36{,}90,$$

$$U_1 = -X_1 = 25{,}50 \text{ und } -4{,}10$$
$$U_2 = -X_2 = 43{,}14 \text{ „ } -9{,}83$$
$$U_3 = -X_3 = 52{,}90 \text{ „ } -17{,}21$$
$$U_4 = -Z_4 = 52{,}90 \text{ „ } -17{,}21$$
$$U_5 = -Z_5 = 54{,}79 \text{ „ } -26{,}23,$$

sodass als Grenzwerthe anzunehmen:

$$O_1 = -25{,}50 \text{ und } 4{,}10 \; (-25{,}50 \text{ und } 0\;)$$
$$O_2 = -43{,}14 \text{ „ } 9{,}83 \; (-43{,}14 \text{ „ } 4{,}10)$$
$$O_3 = -52{,}90 \text{ „ } 17{,}21 \; (-52{,}90 \text{ „ } 9{,}83)$$
$$O_4 = -54{,}79 \text{ „ } 26{,}23 \; (-54{,}79 \text{ „ } 17{,}21)$$
$$O_5 = -54{,}79 \text{ „ } 26{,}23 \; (-54{,}79 \text{ „ } 26{,}23),$$

$$U_1 = 25{,}50 \text{ und } -4{,}10 \; (0 \text{ und } -4{,}10)$$
$$U_2 = 43{,}14 \text{ „ } -9{,}83 \; (25{,}50 \text{ „ } -9{,}83)$$
$$U_3 = 52{,}90 \text{ „ } -17{,}21 \; (43{,}14 \text{ „ } -17{,}21)$$
$$U_4 = 54{,}79 \text{ „ } -26{,}23 \; (52{,}90 \text{ „ } -26{,}23)$$
$$U_5 = 54{,}79 \text{ „ } -26{,}33 \; (48{,}79 \text{ „ } -36{,}90).$$

Die in Klammer beigesetzten Werthe haben wir oben erhalten. Man sieht, dass die Grenzbeanspruchungen, welche sich beim jetzt angewendeten Verfahren ergeben, besonders nach den Trägerenden hin wesentlich zu ungünstig ausfallen können. Indessen ist zu beachten, dass man in den letzten Feldern ohnehin vielfach grössere Gurtungsquerschnitte wählt als die Rechnung bedingen würde.

Beispiel 81. Continuirlicher Gelenkträger einfachen Systems mit Gegendiagonalen und parallelen Gurtungen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Den in Beispiel 77 behandelten Parallelträger für den Fall zu berechnen, dass die Diagonalen nur auf Zug widerstehen.

Der einfache Träger zwischen den mittleren Gelenken ist in Beispiel 45 berechnet. Die Stabkräfte für die übrigen Felder der Mittel-

öffnung sowie die Stützenreactionen bleiben wie in Beispiel 77 bestimmt, während sich alle Beanspruchungen durch Eigengewicht allein schon in Beispiel 76 ergaben. Wir haben also nur noch die in Beispiel 77 gefundenen Grenzbeanspruchungen der Stäbe in der ersten Oeffnung mit Rücksicht auf den Zutritt der Gegendiagonalen zu modificiren, wobei nach der Anleitung in § 56 vorgegangen werden soll.

Da in Beispiel 77 die Diagonalenbeanspruchungen der fünf ersten Felder negativ werden konnten, so sind daselbst Gegendiagonalen nöthig. Die unteren Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen in den Feldern mit Gegendiagonalen sind Null und die oberen

im Felde $m =$	1	2	3	4	5:
für die Hauptdiagonale	42,20	31,02	20,58	24,29	31,56
„ „ Gegendiagonale	7,23	11,56	17,57	11,34	4,66.

In den Feldern 6 bis 8 treten keine Aenderungen der Beanspruchungen ein.

Die ersten Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe entstehen, wenn Zug I die erste Oeffnung belastet, während die Mittelöffnung von 0 bis t ohne Verkehrslast bleibt und die Belastung von t bis zum Trägerende gleichgültig ist. Wir haben dann nach § 62, 12) mit $N = N' = 0$

$$(1) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[\sum_0^{m-1} P a - (n-1) \sum_{m-1}^{m} P\Big(a - \frac{m-1}{n-1} l\Big) - \sum_m^n P(l-a) \Big] \frac{d}{lh}.$$

Die Gleichung liefert für die Belastungen, bei welchen in Beispiel 77 die ersten Grenzbeanspruchungen X_m eintraten (Rad O bei m, für $m = 1$ bis 4 erste Zugrichtung, für $m = 5$ zweite Zugrichtung) mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6:

$$D_1 = 6{,}16 - [0 - 7(6.3 + 6.1{,}7 + 4.0{,}5) - 535] \frac{5}{96} = 45{,}05$$

$$D_2 = 3{,}42 - [5.0{,}5 - 7(6.2{,}57 + 6.1{,}27 + 4.0{,}07) - 383] \frac{5}{96} = 24{,}91$$

$$D_3 = 0{,}68 - [5.3{,}5 - 7(6.2{,}14 + 6.0{,}84 - 4.0{,}36) - 271] \frac{5}{96} = 19{,}88$$

$$D_4 = 2{,}05 + [5\,.\,6{,}5 + 6\,.\,2{,}3 + 6\,.\,1$$
$$- 7\,(6\,.\,1{,}71 + 6\,.\,0{,}41 - 4\,.\,0{,}79) - 173]\,\frac{5}{96} = -\,7{,}72$$
$$D_5 = 4{,}79 + [6\,.\,9{,}7 + 6\,.\,8{,}4 + 6\,.\,7{,}1$$
$$+ 4\,.\,5{,}9 + 5\,.\,2{,}9 + 7\,.\,6\,.\,0{,}1 - 145]\,\frac{5}{96} = 7{,}12\,.$$

Gleichung 1) mit Rücksicht auf die Tabelle des Beispiels 6 ergibt ferner für die Belastungen, welchen in Beispiel 77 die Grenzbeanspruchungen Z_m entsprachen (Rad O bei Verticale $m - 1$, erste Zugrichtung):

$$D_2 = 3{,}42 - [30{,}2 - 7\,.\,6\,.\,0{,}87 - (535 - 6\,.\,19{,}7)]\,\frac{5}{96} = \quad 25{,}47$$
$$D_3 = 0{,}68 - [80{,}7 - 7\,.\,6\,.\,0{,}44 - (383 - 6\,.\,16{,}7)]\,\frac{5}{96} = \quad 12{,}17$$
$$D_4 = 2{,}05 + [145 - 7\,.\,6\,.\,0{,}01 - (271 - 6\,.\,13{,}7)]\,\frac{5}{96} = -\;0{,}25$$
$$D_5 = 4{,}79 + [226 + 7\,.\,6\,.\,0{,}41 - (173 - 6\,.\,10{,}7)]\,\frac{5}{96} = \quad 11{,}79\,.$$

Während also in den Feldern 1 bis 3 die ersten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen ungeändert bleiben, tritt im Felde 4 sowohl für den Obergurt als für den Untergurt eine Aenderung derselben ein, wir erhalten nach § 56, 6)

$$O_4 = -\,X_4 = -\,54{,}81\,, \qquad U_4 = -\,Z_4 = 54{,}22\,.$$

Die zweiten Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe entstehen, wenn Zug I mit Rad O bei r die Mittelöffnung von 0 bis t belastet, während die erste Oeffnung keine Verkehrslast erhält und die Belastung von t bis zum Trägerende gleichgültig ist. Man hat dann nach § 65, 12) mit $N = 0$, N' aus § 62, 19) und verschwindenden P

$$(2) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{d}{ih}\,N', \qquad N' = \sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\,.$$

Bereits in Beispiel 77 ergab sich $N' = 257$, sodass nach Einsetzen der Zahlenwerthe

$$D_m = \mathfrak{D}_m \mp 13{,}385\,.$$

Da dieser Ausdruck in allen Feldern der ersten Oeffnung bei unten liegender X-Gurtung positiv ist, so sind die für die Felder 4 und 5 berechneten zweiten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen richtig, während nach § 56, 5) die drei ersten Felder erhalten:

$$O_1 = -\,Z_1 = 0 \qquad U_1 = -\,X_1 = -\;4{,}34$$
$$O_2 = -\,Z_2 = 4{,}34 \qquad U_2 = -\,X_2 = -\;10{,}31$$
$$O_3 = -\,Z_3 = 10{,}31 \qquad U_3 = -\,X_3 = -\;17{,}93\,.$$

Für die Grenzbeanspruchungen der Verticalen gelten die im vorigen Beispiele angeführten Formeln, es folgen die unteren Grenzbeanspruchungen wie dort

$$V_0 = -0{,}80, \qquad V_1 \text{ bis } V_5 = -1{,}59,$$

dagegen die oberen mit Rücksicht auf die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonalen nach B. 80, 4):

$$V_0 = -3{,}3 \,.\, 1{,}5 - \frac{4}{5}\, 42{,}20 = -38{,}71$$

$$V_1 = 0{,}6 - \frac{4}{5}\, 42{,}20 = -33{,}16$$

$$V_2 = 0{,}6 - \frac{4}{5}\, 31{,}02 = -24{,}22,$$

und nach B. 80, 5):

$$V_3 = 0{,}6 - \frac{4}{5}\, 24{,}29 = -18{,}83$$

$$V_4 = 0{,}6 - \frac{4}{5}\, 31{,}56 = -24{,}65$$

$$V_5 = 0{,}6 - \frac{4}{5}\, 40{,}81 = -32{,}05.$$

Die Formel B. 80, 6) hätte nur

$$V_m = -0{,}53 \,.\, 3 - 6 - 2 \,.\, 6\, \frac{1{,}7}{3} - 4\, \frac{0{,}5}{3} = -15{,}06$$

und die Formel B. 80, 4) für V_3 nur $0{,}6 - 0{,}8 \,.\, 20{,}58 = 15{,}86$ geliefert. Damit sind nun wieder sämmtliche Grenzbeanspruchungen bestimmt.

Die etwas umständliche Untersuchung bezüglich der wirksamen Diagonalen bei Bestimmung der Grenzwerthe der Gurtungskräfte wäre vermieden worden, wenn wir das in den Bemerkungen zum vorigen Beispiele angewandte Verfahren befolgt hätten. Bei gleichmässig vertheilter bewegter Last ist die durch Letzteres erzielte Vereinfachung weniger gross.

Beispiel 82. Continuirlicher Gelenkträger einfachen Systems mit Gegendiagonalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Den in Beispiel 78 behandelten Gelenkträger für den Fall zu berechnen, dass sämmtliche Diagonalen nur auf Zug widerstehen.

Das Trägerstück zwischen den beiden mittleren Gelenken ist in Beispiel 72 berechnet. Die Stützenreactionen wurden in Beispiel 78

festgestellt. Die Stabkräfte der ersten Oeffnung mit Rücksicht auf Gegendiagonalen sind aus Beispiel 80 zu entnehmen. Es bleiben noch die Stäbe zwischen dem zweiten Auflager und ersten Zwischengelenke, für welche die Eigengewichtsbeanspruchungen und die Grenzbeanspruchungen ohne Gegendiagonalen in Beispiel 78 berechnet wurden. Auf Grund dieser Resultate gehen wir nun nach der Anleitung in § 56 vor.

Da die Beanspruchung D_1 negativ werden kann, so ist im Felde 1 eine zweite Diagonale nöthig. Die unteren Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen 1 sind gleich Null, die oberen für die erste Diagonale 6,61 tn und für die zweite

$$D_1' = 6{,}61 \frac{5}{3{,}5} = 9{,}44 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen entstehen für Eigengewicht allein und für Totalbelastung des Trägers, wobei für X_1 die Lasten ausserhalb der Strecke vt, für Z_1 die Lasten ausserhalb ct (mit $v = \lambda$, $c = 0$) ohne Einfluss sind. Bei Belastung durch Eigengewicht allein fand sich die Diagonalenbeanspruchung $\mathfrak{D}_1 = 0$, daher ist auch bei Totalbelastnng $D_1 = \frac{q}{g} \mathfrak{D}_1 = 0$, die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen bleiben wie in Beispiel 78 bestimmt.

Beim Wirken der ersten bezw. zweiten Diagonale hat man die Beanspruchung der Verticale 0 (Fig. 141)

(1) $$V_0 + K_0 + \frac{h}{d} D_8 + \frac{h_1}{d_1} D_1 = 0,$$

(2) $$V_0 + K_0 + \frac{h}{d} D_8 = 0,$$

und die Beanspruchung der Verticale 1

(3) $$V_1 + K_1 = 0,$$

(4) $$V_1 + K_1 + \frac{h}{d} D_1' = 0.$$

Hieraus könnte man mit möglichst grossen bezw. möglichst kleinen K_0, D_8, D_1 als im Allgemeinen zu ungünstige Grenzwerthe entnehmen

$$V_0 = -\,3{,}3\,.\,3 - \frac{4}{5}\,62{,}35 - \frac{1{,}8}{3{,}5}\,6{,}61 = -\,63{,}18 \text{ tn},$$

$$V_0 = -\,0{,}53\,.\,3 - \frac{4}{5}\,13{,}01 = -\,12{,}00 \text{ tn},$$

und ganz analog

$$V_1 = -3{,}3\,.\,3 - \tfrac{4}{5}\,9{,}44 = -17{,}45 \text{ tn},$$

$$V_1 = -0{,}53\,.\,3 = -1{,}59 \text{ tn}.$$

Da sich jedoch $V_0 = -63{,}18$ beim Wirken der ersten Diagonale ergab und für diesen Fall selbst ohne Rücksicht auf die Beanspruchungsart der Letzteren in Beispiel 78 nur die Grenzbeanspruchung $-59{,}77$ ermittelt wurde, so können wir diese annehmen. Sie ist im vorliegenden Falle genau, weil bei ihrem Eintritt mit $D_m = 0$ die erste Diagonale als wirksam gelten kann. Gleiches gilt für die berechneten unteren Grenzwerthe von V_0 und V_1. Bei unbeschränkter Wirksamkeit der zweiten Diagonale 1 (Z-Gurtung oben) erhielte man mit $v = \varepsilon = -0{,}818$ nach § 60, 19) die Beanspruchung durch Eigengewicht allein:

$$\mathfrak{V}_1 = \left[\varrho + \tau - 2 + \frac{g_x - g_s}{g} + \frac{(\varrho - 1)(\tau - 1)}{v}\right]\frac{g\lambda}{2}$$

$$= \left(10 + \frac{0{,}2 - 0{,}53}{0{,}73} - \frac{1\,.\,9}{0{,}82}\right) 1{,}095 = -1{,}59 \text{ tn},$$

und weil $u = (m - v)\lambda = 5{,}46$ nicht zwischen $v = 6$ und $r = 6$ liegt nach § 60, 8) die Grenzbeanspruchungen:

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 + \left[\varrho + \tau - 3 + \frac{(\varrho - 1)(\tau - 1)}{v}\right]\frac{p\lambda}{2}$$

$$= -1{,}59 + \left(9 - \frac{1\,.\,9}{0{,}82}\right) 4{,}155 = -9{,}80 \text{ tn},$$

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 = -1{,}59 \text{ tn}.$$

Da bei unbeschränkter Wirksamkeit der ersten bezw. zweiten Diagonale 1 die Werthe von V_0 nur bis $-9{,}90$ und $-9{,}80$ anwachsen können, so brauchen wir anstatt des oben gefundenen Grenzwerths von $-17{,}45$ tn nur $-9{,}90$ anzunehmen.

Sämmtliche nun gültigen Grenzwerthe sind in Fig. 142 für eine Oeffnungshälfte eingeschrieben, während die Grenzwerthe der ersten Oeffnung in Fig. 140 ersichtlich sind.

Beispiel 83. Continuirlicher Gelenkträger einfachen Systems mit Gegendiagonalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Den in Beispiel 79 behandelten Gelenkträger für den Fall zu berechnen, dass sämmtliche Diagonalen nur auf Zug widerstehen.

Der einfache Träger zwischen den beiden mittleren Gelenken ist in Beispiel 72 berechnet. Die Stützenreactionen wurden in Bei-

spiel 79 festgestellt. Die Stabkräfte der ersten Oeffnung mit Rücksicht auf Gegendiagonalen sind aus Beispiel 81 zu entnehmen. Es bleiben wieder die Stäbe zwischen dem zweiten Auflager und ersten Zwischengelenke, für welche die Eigengewichtsbeanspruchungen in Beispiel 78 und die Grenzbeanspruchungen ohne Gegendiagonalen in Beispiel 79 berechnet wurden. Auf Grund dieser Resultate verfahren wir nun nach der Anleitung in § 56.

Da die Beanspruchung D_1 negativ werden kann, so ist im Felde 1 eine zweite Diagonale anzuordnen. Die unteren Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen 1 sind gleich Null, die oberen für die erste Diagonale 11,26 tn und für die zweite

$$D_1' = 6{,}96 \frac{5}{3{,}5} = 9{,}94 \text{ tn}.$$

Das Hinzutreten der zweiten Diagonale kann nur einen Einfluss auf die Stabkräfte des ersten Feldes haben. Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe 1 entstehen für Eigengewicht allein und bei Belastung der Mittelöffnung durch Zug I, Rad O über r. Im ersten Falle ist die Diagonalbeanspruchung $\mathfrak{D}_1 = 0$, die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte bleiben also wie in Beispiel 79 bestimmt. Im zweiten Falle haben wir nach § 62, 3) für die erste Diagonale

$$D_1 = \mathfrak{D}_1 - \Big[- \varepsilon \sum_0^\lambda Pa + \sum_\lambda^r P(\lambda - \varepsilon\lambda - a)$$
$$+ \frac{1 - \varepsilon - \varrho}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t - a)\Big] \frac{d_1}{2\lambda h},$$

und bei der in Beispiel 79 angewandten ersten Richtung des Zuges 1 mit Rücksicht auf die in Beispiele 6 gegebene Tabelle

$$D_1 = 0 + \Big[0{,}82 \,.\, 6 \,.\, 0{,}5 + (4 \,.\, 1{,}96 + 6 \,.\, 0{,}76 - 6 \,.\, 0{,}54)$$
$$- \frac{0{,}18}{8} 704\Big] \frac{3{,}5}{0{,}82 \,.\, 12} = - 1{,}50 \text{ tn}.$$

Beim Eintritt der oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungskräfte des Feldes 1 wirkt also die zweite Diagonale, die fraglichen Grenzwerthe sind nach § 56, 3)

$$O_1 = - \frac{\lambda}{u_1} Z_1 = \frac{3}{3{,}72} 99{,}95 = 80{,}60 \text{ tn},$$

$$U_1 = - \frac{u_1}{\lambda} X_1 = - \frac{3{,}72}{3} 82{,}09 = - 101{,}79 \text{ tn}.$$

Jenachdem die erste oder zweite Diagonale wirkt, gelten für die Verticale 0 die Gleichungen B. 82, 1) oder 2), für die Verticale 1

die Gleichungen B. 82, 3) oder 4). Dieselben liefern bei möglichst grossen bezw. möglichst kleinen K, D für die Verticale 0:

$$V_0 = -15{,}06 - \frac{4}{5}\,62{,}44 - \frac{1{,}8}{3{,}5}\,11{,}26 = -70{,}80 \text{ tn},$$

$$V_0 = -\ \ 1{,}59 - \frac{4}{5}\,13{,}01 = -12{,}00 \text{ tn},$$

und für die Verticale 1:

$$V_1 = -15{,}06 - \frac{4}{5}\,9{,}94 = -23{,}01 \text{ tn},$$

$$V_1 = -1{,}59 \text{ tn}.$$

Zu beachten war, dass der grösste Werth der Knotenpunktslasten K ist

$$K = 0{,}53\,.\,3 + 6 + 2\,.\,6\,\frac{1{,}7}{3} + 4\,\frac{0{,}5}{3} = 15{,}06 \text{ tn}.$$

Die so berechneten Grenzwerthe könnten als im Allgemeinen zu ungünstig beibehalten werden. Da sich jedoch $V_0 = -70{,}80$ tn beim Wirken der Hauptdiagonale ergab und für diesen Fall selbst ohne Rücksicht auf die Beanspruchungsart der Letzteren in Beispiel 79 nur die Grenzbeanspruchung — 59,80 erhalten wurde, so können wir diese. annehmen. Da ferner bei unbeschränkter Wirksamkeit der zweiten Diagonale (Z-Gurtung oben,

$$\nu = \varepsilon = -0{,}818, \qquad u = (m - \nu)\,\lambda = 5{,}46$$

nicht zwischen $v = 6$ und $r = 6$) die Grenzwerthe von V_1 für Eigengewicht allein wie im vorigen Beispiele $\mathfrak{V}_1 = -1{,}59$ und bei Belastung durch Zug I, Rad O bei r,

$$V_1 = \mathfrak{V}_1 + \Big[(1 + \nu)\sum_c^v P(a - c) + \frac{\varrho - 1 + \nu}{\tau - \varrho}\sum_r^t P(t - a)\Big]\frac{1}{\nu\lambda}$$

$$= -1{,}59 - \Big(0{,}18\,.\,30{,}2 + \frac{0{,}18}{8}\,704\Big)\frac{1}{0{,}82\,.\,3} = -10{,}28 \text{ tn}$$

werden, während bei unbeschränkter Wirksamkeit der ersten Diagonale die Grenzwerthe — 1,59 und — 15,06 tn entstehen, so genügt es, die Letzteren anzunehmen.

Bemerkungen. Nach § 56 hätten wir bei Bestimmung der oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen unter Vermeidung der Untersuchung bezüglich der wirksamen Diagonale auch wie folgt vorgehen können. Mit Rücksicht auf Beispiel 79 wären nach 56, 1) 2)

$$O_1 = X_1 = 82{,}09 \text{ tn},$$

$$U_1 = Z_1 = -99{,}95 \text{ tn},$$

und nach § 56, 3) 4)

$$O_1 = -\frac{\lambda}{u_1} Z_1 = \frac{3}{3{,}72} 99{,}95 = 80{,}60 \text{ tn},$$

$$U_1 = -\frac{u_1}{\lambda} X_1 = -\frac{3{,}72}{3} 82{,}09 = -101{,}79 \text{ tn}.$$

Daher sind als obere Grenzwerthe anzunehmen

$$O_1 = 82{,}09 \text{ tn},$$
$$U_1 = -101{,}79 \text{ tn},$$

gegen oben berechnete

$$O_1 = 80{,}60 \text{ tn},$$
$$U_1 = -101{,}79 \text{ tn}.$$

VI. Abschnitt.

Bogenträger mit drei Gelenken.

Beispiel 84. Bogendachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Gleichmässig vertheilte Last.

Für den in Fig. 143 angedeuteten Bogendachbinder mit drei Gelenken seien gegeben: Spannweite $l = 8\lambda = 32$ m, Pfeil des kreisförmigen (einem Kreisbogen eingeschriebenen) Untergurts $f = 8$ m, Länge der Kämpferverticalen $h_0 = 6$ m, Länge der Scheitelverticalen $h_4 = 2$ m. Es sind die Stabkräfte und Stützenreactionen für eine auf den Träger gleichmässig vertheilte Last von $q = 1{,}06$ tn zu berechnen, von welcher (etwa mit Rücksicht auf eine als Decke dienende Verschaalung) 0,25 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts kommen.

Formberechnung. Dieselbe ist vollständig entsprechend der Formberechnung in Beispiel 34. Doch fügen wir bei die Werthe

(1) $w_d = \mathfrak{x}_m - \varepsilon(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}), \qquad w_v = \mathfrak{x}_m - \nu(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1})$

und erhalten

für						
	$m =$	0	1	2	3	4:
	$\mathfrak{x}_m =$	6	7	8	9	10
	$\mathfrak{z}_m =$	0	4	6,33	7,6	8
	$h_m =$	6	3	1,67	1,4	2
	$z_m =$		5,66	4,63	4,20	4,02
	$d_m =$		4,47	4,06	4,02	4,12
	$\varepsilon =$		-1	$-1{,}25$	$-5{,}18$	3,33
	$\nu =$		$-2{,}25$	$-6{,}18$	2,33	
	$w_d =$		8	9,25	14,18	6,67
	$w_v =$		9,25	14,18	6,67.	

Für alle Stäbe des Obergurts ist die Länge 4,12 m.

Beanspruchungen. Bezeichnen q_x, q_z diejenigen Theile von q, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rech-

nen sind, so hat man nach § 69, 6) 7) für die erste Trägerhälfte folgende Ausdrücke der Stabkräfte:

$$
(2)\quad \begin{cases}
X_m = -\left[m(n-m) - \frac{n^2}{4f}\mathfrak{z}_m\right]\frac{x_m}{h_m}\frac{q\lambda}{2}, \\
Z_m = \left[(m-1)(n-m+1) - \frac{n^2}{4f}\mathfrak{z}_{m-1}\right]\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{q\lambda}{2}, \\
D_m = -\left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - \frac{n^2}{4f}w_d\right]\frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\frac{q\lambda}{2}, \\
V_m = \left[m(n-m) - \nu\left(n-2m+\frac{g_x-g_s}{g}\right) - \frac{n^2}{4f}w_v\right]\frac{q\lambda}{2\nu}.
\end{cases}
$$

Die letzte Gleichung setzt voraus, dass der Verticale m beiderseits Felder mit Diagonalen gleicher Stellung anliegen, sie gilt also nicht für die Kämpferverticale und Scheitelverticale. Mit $n = 8$, $\lambda = 4$, $f = 8$, $x_m = 4{,}12$, $q = 1{,}06$, $q_x = 0{,}81$, $q_s = 0{,}25$ nehmen die Gleichungen 2) folgende Formen an:

$$X_m = -[m(8-m) - 2\mathfrak{z}_m]\frac{8{,}734}{h_m},$$

$$Z_m = [(m-1)(9-m) - 2\mathfrak{z}_{m-1}]\frac{2z_m}{h_{m-1}},$$

$$D_m = -[m(8-m) - \varepsilon(9-2m) - 2w_d]\frac{2{,}12\,d_m}{\varepsilon h_{m-1}},$$

$$V_m = [m(8-m+2\nu) - 2w_v]\frac{2{,}12}{\nu} - 18{,}08,$$

und es ergeben sich hieraus die nachstehenden Stabkräfte in Tonnen:

$X_1 = 2{,}91$	$Z_1 = -23{,}99$	$D_1 = -3{,}16$	$V_1 = -3{,}00$
$X_2 = 3{,}49$	$Z_2 = -22{,}90$	$D_2 = -0{,}57$	$V_2 = -3{,}99$
$X_3 = 1{,}25$	$Z_3 = -21{,}33$	$D_3 = 2{,}11$	$V_3 = -3{,}85.$
$X_4 = 0$	$Z_4 = -18{,}26$	$D_4 = 1{,}25$	

Für den Horizontalschub und die Verticalreaction der Stützen hat man nach § 66, 12)

$$(3)\qquad H = \frac{ql^2}{8f}, \qquad V = \frac{ql}{2}.$$

Diese Gleichungen liefern

$$H = 16{,}96 \text{ tn}, \qquad V = 16{,}96 \text{ tn}.$$

Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf Knotenpunkt 0 des Untergurts und 4 des Obergurts ergibt

$$V_0 + V + Z_1 \frac{4}{5,66} - 0,25 \,.\, 2 = 0,$$

$$V_4 + X_4 \frac{1}{4,12} + 0,81 \,.\, 2 = 0,$$

woraus die noch fehlenden Stabkräfte:

$$V_0 = 0,50 \text{ tn}, \qquad V_4 = -1,62 \text{ tn}.$$

Die vollständige Berechnung des hier behandelten Dachbinders ist im nächsten Beispiele gezeigt.

Beispiel 85. Bogendachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Grenzbeanspruchungen mit Rücksicht auf schiefen Winddruck.

Für den in Fig. 143 angedeuteten Dachbinder betrage die feste Last per Längeneinheit $g = 0,6$ tn, wovon 0,35 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,25 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. Der Schneedruck, welcher auf beliebige Theile der Dachfläche wirksam angenommen werden soll, ist mit $p = 0,35$ tn per laufenden Meter in Rechnung zu ziehen. Winddruck per qm normal getroffener Fläche 150 kg, Windrichtung um 10° gegen die Horizontale fallend, parallel der Trägerebene. Die Grenzwerthe der Stabkräfte zu berechnen, wenn einmal die erste, einmal die zweite Dachhälfte vom Winde getroffen wird.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 69, 6) 7):

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}_m &= -\left[m(n-m) - \frac{n^2}{4f}\mathfrak{z}_m\right] \frac{x_m}{h_m} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m &= \left[(m-1)(n-m+1) - \frac{n^2}{4f}\mathfrak{x}_{m-1}\right] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m &= -\left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - \frac{n^2}{4f}w_d\right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m &= \left[m(n-m) - \nu\left(n - 2m + \frac{g_x - g_z}{g}\right) - \frac{n^2}{4f}w_v\right] \frac{g\lambda}{2\nu}, \end{aligned} \right.$$

also im vorliegenden Falle mit $n = 8$, $\lambda = 4$, $f = 8$, $x_m = 4,12$, $g = 0,6$, $g_x = 0,35$, $g_z = 0,25$:

$$\mathfrak{X}_m = -[m(8-m) - 2\mathfrak{z}_m] \frac{4,944}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = [(m-1)(9-m) - 2\mathfrak{x}_{m-1}] \frac{1,2\, z_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = -[m(8-m) - \varepsilon(9-2m) - 2w_d]\frac{1{,}2\,d_m}{\varepsilon\,h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = [m(8-m+2v) - 2w_v]\frac{1{,}2}{v} - 9{,}8.$$

Diese Gleichungen liefern mit Rücksicht auf die in Beispiel 84 zusammengestellten, von der Trägerform abhängigen Grössen folgende Stabkräfte in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = 1{,}65$	$\mathfrak{Z}_1 = -13{,}58$	$\mathfrak{D}_1 = -1{,}79$	$\mathfrak{V}_1 = -1{,}27$
$\mathfrak{X}_2 = 1{,}97$	$\mathfrak{Z}_2 = -12{,}96$	$\mathfrak{D}_2 = -0{,}32$	$\mathfrak{V}_2 = -1{,}82$
$\mathfrak{X}_3 = 0{,}71$	$\mathfrak{Z}_3 = -12{,}07$	$\mathfrak{D}_3 = 1{,}19$	$\mathfrak{V}_3 = -1{,}75.$
$\mathfrak{X}_4 = 0$	$\mathfrak{Z}_4 = -10{,}33$	$\mathfrak{D}_4 = 0{,}71$	

Für die Kämpferverticale und Scheitelverticale gelten die allgemeinen Ausdrücke von V_m nicht, dagegen hat man nach A. 39, 7) 17) deren Beanspruchungen durch Eigengewicht allein

(2) $$\mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_z}{2} - \left(1 - \frac{n}{4f}\mathfrak{z}_1\right)\frac{pl}{2}, \qquad \mathfrak{V}_\sigma = -\frac{\lambda g_x}{2},$$

woraus nach Einsetzen der Zahlenwerthe:

$$\mathfrak{V}_0 = 0{,}5 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{V}_4 = -0{,}7 \text{ tn}.$$

Dieselben Werthe hätten wir natürlich auch wie in Beispiel 84 erhalten können. Schliesslich gelten für die Verticalreaction der Kämpfer und den Horizontalschub die Gleichungen § 66, 12)

(3) $$\mathfrak{V} = \frac{gl}{2}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{gl^2}{8f},$$

welche ergeben

$$\mathfrak{V} = 9{,}6 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{H} = 9{,}6 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe ohne Winddruck. In § 69 wurden folgende Bezeichnungen eingeführt

(4) $$\xi = \frac{n}{2f}\mathfrak{z}_m, \quad \zeta = \frac{n}{2f}\mathfrak{x}_{m-1}, \quad \delta = \frac{n}{2f}w_d, \quad \omega = \frac{n}{2f}w_v,$$

worin im vorliegenden Falle $n : 2f = 0{,}5$ ist. Da sämmtliche Knotenpunkte des Untergurts in dem durch die punktirten Linien in Fig. 143 eingeschlossenen Raum I liegen, so sind nach § 70, 1) und § 19, 2) die Grenzbeanspruchungen des Obergurts

(5) $$\begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m + \xi\dfrac{\xi - m}{\xi + m}\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{pl}{4}, \\ X_m = \dfrac{q+g}{g}\mathfrak{X}_m - (X_m), \end{cases}$$

und da mit Ausnahme des Knotenpunkts 4 sämmtliche Knotenpunkte des Obergurts im Raume I liegen, so hat man nach § 70, 3) und § 19, 3) als Grenzbeanspruchungen des Untergurts

$$(6) \quad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m - \xi \dfrac{\xi - m + 1}{\xi + m - 1} \dfrac{z_m}{h_{m-1}} \dfrac{pl}{4}, \\ Z_m = \dfrac{q+g}{g} \mathfrak{Z}_m - (Z_m). \end{cases}$$

Dabei ist die eine Grenzbeanspruchung zur Unterscheidung von der andern mit einer Klammer versehen. Die Gleichungen 5) 6) liefern für die X-Gurtung:

$$X_1 = 1{,}65 + 2 \quad \frac{1 \,.\, 4{,}12}{3 \,.\, 3} \, 2{,}8 = 4{,}21$$

$$X_2 = 1{,}97 + 3{,}17 \, \frac{1{,}17 \,.\, 4{,}12}{5{,}17 \,.\, 1{,}67} \, 2{,}8 = 6{,}92$$

$$X_3 = 0{,}71 + 3{,}8 \quad \frac{0{,}8 \,.\, 4{,}12}{6{,}8 \,.\, 1{,}4} \, 2{,}8 = 4{,}39$$

$$X_4 = 0 \quad + 4 \quad \frac{0 \,.\, 4{,}12}{8 \,.\, 8} \, 2{,}8 = 0,$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 2{,}583 \,.\, 1{,}65 - 4{,}21 = 0{,}05 \\ X_2 &= 2{,}583 \,.\, 1{,}97 - 6{,}92 = -1{,}83 \\ X_3 &= 2{,}583 \,.\, 0{,}71 - 4{,}39 = -2{,}56 \\ X_4 &= 2{,}583 \,.\, 0 \quad - 0 \quad = 0, \end{aligned}$$

und für die Z-Gurtung:

$$Z_1 = -13{,}58 - 3 \quad \frac{3 \,.\, 5{,}66}{3 \,.\, 6} \, 2{,}8 = -21{,}50$$

$$Z_2 = -12{,}96 - 3{,}5 \, \frac{2{,}5 \,.\, 4{,}63}{4{,}5 \,.\, 3} \, 2{,}8 = -21{,}36$$

$$Z_3 = -12{,}07 - 4 \quad \frac{2 \,.\, 4{,}2}{6 \,.\, 1{,}67} \, 2{,}8 = -21{,}46$$

$$Z_4 = -10{,}34 - 4{,}5 \, \frac{1{,}5 \,.\, 4{,}02}{7{,}5 \,.\, 1{,}4} \, 2{,}8 = -17{,}58,$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= -2{,}583 \,.\, 13{,}58 + 21{,}50 = -13{,}58 \\ Z_2 &= -2{,}583 \,.\, 12{,}96 + 21{,}36 = -12{,}12 \\ Z_3 &= -2{,}583 \,.\, 12{,}07 + 21{,}46 = -9{,}72 \\ Z_4 &= -2{,}583 \,.\, 10{,}34 + 17{,}58 = -9{,}13. \end{aligned}$$

Nach der Zusammenstellung in Beispiel 84 entsprechen den Diagonalen

für				
$m =$	1	2	3	4:
$\varepsilon =$	-1	$-1{,}25$	$-5{,}18$	3,33
$w_d =$	8	9,25	14,18	6,67
$\varphi = \frac{m - \varepsilon}{n} 2f =$	4	6,5	16,36	1,34
$\chi = \frac{n - m + \varepsilon}{n} 2f =$	12	9,5	$-0{,}36$	14,66
$\psi = \frac{n - m}{m} \frac{m - \varepsilon}{n} 2f =$	28	19,5	27,27	1,34.

Da hiernach für die beiden ersten Diagonalen w_d nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ liegt, so hat man nach § 70, 7) eine Grenzbeanspruchung derselben

(7) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{\delta - m + \varepsilon}{\delta + m - \varepsilon} \frac{\delta d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{p l}{4},$$

und da für die beiden letzten Diagonalen w_d zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ liegt, so ist nach § 70, 6) eine Grenzbeanspruchung dieser Diagonalen

(8) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{(m - 1)^2 (n - m - \delta + \varepsilon)}{n - m - \delta - \varepsilon (n - 1)} \cdot \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{p \lambda}{2}.$$

Die zweite Grenzbeanspruchung ist nach § 19, 4) für alle Diagonalen

(9) $$D_m = \frac{q + g}{g} \mathfrak{D}_m - (D_m).$$

Wir erhalten aus vorstehenden Gleichungen folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$D_1 = -1{,}79 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 4{,}47}{6 \cdot 1 \cdot 6} 2{,}8 = -4{,}57$$

$$D_2 = -0{,}32 - \frac{1{,}38 \cdot 4{,}63 \cdot 4{,}06}{7{,}88 \cdot 1{,}25 \cdot 3} 2{,}8 = -2{,}78$$

$$D_3 = 1{,}19 - \frac{4 \cdot 7{,}27 \cdot 4{,}02}{34{,}17 \cdot 1{,}67} 0{,}7 = -0{,}24$$

$$D_4 = 0{,}71 - \frac{9 \cdot 4 \cdot 4{,}12}{22{,}64 \cdot 1{,}4} 0{,}7 = -8{,}56,$$

$$D_1 = -2{,}583 \cdot 1{,}79 + 4{,}57 = -0{,}05$$
$$D_2 = -2{,}583 \cdot 0{,}32 + 2{,}78 = 1{,}95$$
$$D_3 = 2{,}583 \cdot 1{,}19 + 0{,}24 = 3{,}31$$
$$D_4 = 2{,}583 \cdot 0{,}71 + 8{,}56 = 10{,}39.$$

Nach der Zusammenstellung in Beispiel 84 entsprechen den Verticalen

für	$m =$	1	2	3:
	$v =$	— 2,25	— 6,18	2,33
	$w_v =$	9,25	14,18	6,67
	$\varphi = \frac{m-v}{n} 2f =$	6,5	16,36	1,34
	$\chi = \frac{n-m+v}{n} 2f =$	9,5	— 0,36	14,66
	$\psi = \frac{n-m}{m} \frac{m-v}{n} 2f =$	45,5	49,08	2,33.

Da für die erste Verticale w_v nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ liegt, so ist nach § 70, 11) eine Grenzbeanspruchung derselben

$$(10) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{\omega - m + v}{\omega + m - v} \frac{\omega}{v} \frac{pl}{4},$$

und da für die beiden folgenden Verticalen w_v zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ liegt, so ist nach § 70, 10) eine Grenzbeanspruchung dieser Verticalen

$$(11) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{(m-1)^2 (n - m - \omega + v)}{n - m - \omega - v (n-1)} \frac{p\lambda}{2}.$$

Als zweite Grenzbeanspruchung hat man nach § 19, 8) für die drei Verticalen

$$(12) \qquad V_m = \frac{q+g}{g} \mathfrak{B}_m - (V_m) - \frac{p\lambda}{g} g_z.$$

Vorstehende Gleichungen ergeben folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$V_1 = -1{,}27 + \frac{1{,}38 \cdot 4{,}63}{7{,}88 \cdot 2{,}25} 2{,}8 = -0{,}26$$

$$V_2 = -1{,}82 + \frac{1 \cdot 7{,}27}{42{,}17} 0{,}7 = -1{,}70$$

$$V_3 = -1{,}75 + \frac{4 \cdot 4}{14{,}64} 0{,}7 = -0{,}98,$$

$$V_1 = -2{,}583 \cdot 1{,}27 + 0{,}26 - 0{,}583 = -3{,}60$$

$$V_2 = -2{,}583 \cdot 1{,}82 + 1{,}70 - 0{,}583 = -3{,}58$$

$$V_3 = -2{,}583 \cdot 1{,}75 + 0{,}98 - 0{,}583 = -4{,}12.$$

Für die Grenzbeanspruchungen der Kämpferverticalen hat man nach A. 39, 6)

$$(13) \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 + \xi_1 \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1} \frac{pl}{4}, \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{\xi_1 + 1} \frac{pl}{2},$$

und für diejenigen der Scheitelverticalen nach A. 39, 16)

$$(14) \qquad V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma - \frac{p\lambda}{2}, \qquad V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma.$$

Diese Gleichungen liefern

$$V_0 = 0{,}5 + 2\,\frac{1}{3}\,2{,}8 = 2{,}37\,, \qquad V_0 = 0{,}5 - \frac{5{,}6}{2} = -\,1{,}37\,,$$

$$V_4 = -\,0{,}7 - 0{,}7 = -\,1{,}4, \qquad V_4 = -\,0{,}7 \text{ tn}.$$

Schliesslich sind nach § 67, 14) 12) die Grenzwerthe des Horizontalschubs und der Verticalreactionen der Kämpfer

$$(15) \qquad H = \frac{ql^2}{8f}, \qquad H = \mathfrak{H},$$

$$(16) \qquad V = \frac{ql}{2}, \qquad V = \mathfrak{V},$$

das heisst in unserm Falle

$$H = V = 15{,}6 \text{ tn}, \qquad H = V = 9{,}6 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe mit Winddruck. Die vom Winddrucke allein herrührenden Stabkräfte und Stützenreactionen sind im nächsten Beispiele bestimmt. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen mit Rücksicht auf Winddruck ergeben sich, wie schon in den Beispielen 21, 22, 40, 57 durch Combination jener Beanspruchungen mit den oben erhaltenen Grenzwerthen zu den äusserst möglichen Grenzbeanspruchungen. Alles Weitere ist aus der folgenden Tabelle zu ersehen:

	Grenzwerthe ohne Winddruck		Einfluss des Winddrucks		Grenzwerthe mit Winddruck		Siehe S. 368 oben		
X_1	4,21	0,05	1,14	− 2,71	5,35	− 2,71	5,02	− 0,76	2,91
X_2	6,92	− 1,83	2,39	− 3,45	9,31	− 5,28	8,48	− 3,39	3,49
X_3	4,39	− 2,56	1,95	− 2,16	6,34	− 4,72	5,55	− 3,72	1,25
X_4	0	0	0,04	0	0,04	0	0	0	0
Z_1	− 13,58	− 21,50	0,71	− 2,35	− 12,87	− 23,85	− 11,09	− 23,99	− 23,99
Z_2	− 12,14	− 21,36	1,54	− 3,20	− 10,58	− 24,56	− 9,48	− 24,00	− 22,90
Z_3	− 9,72	− 21,46	2,05	− 4,17	− 7,67	− 25,63	− 6,77	− 24,41	− 21,33
Z_4	− 9,14	− 17,58	0,75	− 3,58	− 8,38	− 21,16	− 9,14	− 19,85	− 18,26
D_1	− 0,05	− 4,57	1,14	− 0,93	1,09	− 5,50	0,77	− 5,44	− 3,16
D_2	1,95	− 2,78	0,64	− 1,24	2,59	− 4,02	2,72	− 3,55	− 0,57
D_3	3,31	− 0,24	0,42	− 1,35	3,73	− 1,59	3,76	− 0,69	2,11
D_4	10,39	− 8,56	1,95	− 2,19	12,34	− 10,75	13,30	− 11,47	1,25
V_0	2,37	− 1,37	1,70	− 1,27	4,07	− 2,64	2,95	− 1,95	0,50
V_1	− 0,26	− 3,60	1,71	− 0,69	1,45	− 4,29	0,06	− 3,80	− 3,00
V_2	− 1,70	− 3,58	0,05	− 0,15	− 1,65	− 3,73	− 1,66	− 3,62	− 3,99
V_3	− 0,98	− 4,12	0,70	− 0,57	− 0,28	− 4,69	− 0,74	− 4,36	− 3,85
V_4	− 0,70	− 1,40	0	− 0,21	− 0,70	− 1,61	− 0,70	− 1,62	− 1,62
V	15,60	9,60	0,83	0,77	16,43	9,60	16,96	9,60	16,96
H	15,60	9,60	1,66	− 2,25	17,26	7,35	16,96	9,60	16,96

In der letzten Columne sind diejenigen Beanspruchungen eingestellt, welche sich bei Totalbelastung des ganzen Daches unter Berücksichtigung des Winddrucks durch einen gleichmässig über beide Dachflächen vertheilten Verticaldruck von

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{n}}{\cos\alpha} = \frac{25{,}14}{\cos 14^0 10'} = 25{,}93 \text{ kg}$$

per qm Dachfläche (vergl. am Schlusse des Beispiels 21) oder

$$b\mathfrak{v}\frac{x_m}{\lambda} = 4 \,.\, 0{,}0259\,\frac{4{,}12}{4} = 0{,}11 \text{ tn}$$

per laufenden Meter Träger ergeben (Beispiel 84), wobei also $p = 0{,}35 + 0{,}11 = 0{,}46$, $q = 0{,}6 + 0{,}46 = 1{,}06$ tn sind. Die beiden Columnen vorher enthalten diejenigen Grenzwerthe, welche ganz wie oben für eine gleichmässig vertheilte bewegte Last von $p = 0{,}46$ tn bei $g = 0{,}6$ tn Eigengewicht per laufenden Meter resultiren, wenn also vom Winddrucke nur die soeben erwähnte Verticalcomponente berücksichtigt und angenommen wird, dass der Wind beliebige Theile der Dachfläche treffen kann.

Beispiel 86. Bogendachbinder einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Einfluss schiefen Winddrucks.

Den Einfluss des Winddrucks auf die Beanspruchungen des in Fig. 143 angedeuteten Dachbinders unter folgenden Voraussetzungen zu berechnen. Binderweite $b = 4$ m, Winddruck bei normal getroffener Fläche $\mathfrak{w} = 150$ kg per qm, Windrichtung um $\beta = 10^0$ gegen die Horizontale fallend, parallel der Trägerebene.

Für eine Ebene, welche den Winkel α mit der Horizontalen bildet (Fig. 53) hat man nach Beispiel 21 den für die Berechnung allein in Betracht kommenden Normaldruck des Windes per qm

$$(1) \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{w} \sin^2(\alpha + \beta).$$

Dies gibt für alle Knotenpunkte einer getroffenen ebenen Dachfläche, abgesehen von den beiden äussern,

$$N = \mathfrak{n} b x_m \quad \text{Normaldruck,}$$

$$\frac{\lambda}{x_m} N = \mathfrak{n} b \lambda \quad \text{Verticaldruck,}$$

$$\frac{\delta}{x_m} N = \mathfrak{n} b \delta \quad \text{Horizontaldruck,}$$

wobei δ die Höhendifferenz zweier Knotenpunkte im Obergurte bedeutet. Im vorliegenden Falle haben wir

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}, \quad \alpha = 14^0\,10', \quad \mathfrak{n} = 150 \sin^2 24^0\,10' = 25{,}14 \text{ kg},$$

und damit für jeden der drei innern Knotenpunkte

$$0{,}02514 \,.\, 4 \,.\, 4 = 0{,}40 \text{ tn} \quad \text{Verticaldruck},$$
$$0{,}02514 \,.\, 4 \,.\, 1 = 0{,}10 \text{ tn} \quad \text{Horizontaldruck}.$$

Die beiden äussern Knotenpunkte erhalten durch den Wind auf die obere Dachfläche halb so grosse Drücke. Auf die Verticalfläche durch die Endverticale der getroffenen Dachhälfte kommt ein Normaldruck von

$$\mathfrak{n} = 150 \sin^2 (90 + 10) = 145{,}48 \text{ kg}$$

per qm, was für jeden der beiden Knotenpunkte jener Verticalen ergibt:

$$L = 0{,}1455 \,.\, 4 \,.\, 3 = 1{,}75 \text{ tn}.$$

Greifen am Träger zwischen den Schnitten 0 und s beliebige Verticalkräfte K bei Abscissen e und beliebige Horizontalkräfte L bei Ordinaten c an, so hat man nach A. 5, 1) das Moment der äussern Kräfte links von s hinsichtlich irgend eines Drehpunkts der Coordinaten u, w

$$(2) \qquad M_s = Vu - Hw - \sum_0^s K(u-e) - \sum_0^s L(w-c),$$

worin die letzte Summe das negative Vorzeichen erhielt, weil wir jetzt von links nach rechts wirkende L als positiv ansehen wollen. Wird der Schnitt s für X_m, Z_m, D_m durch Feld m und für V_m durch die Stäbe x_m, h_m, z_{m+1} gelegt, so hat man nach § 86, 1) — 4) bei oben liegender X-Gurtung:

$$(3) \quad \begin{cases} X_m = - M_s \dfrac{x_m}{\lambda h_m} & \text{mit} \quad u = m\lambda, & w = \mathfrak{z}_m, \\ Z_m = M_s \dfrac{z_m}{\lambda h_{m-1}} & \text{„} \quad u = (m-1)\lambda, & w = \mathfrak{x}_{m-1}, \\ D_m = - M_s \dfrac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} & \text{„} \quad u = (m-\varepsilon)\lambda, & w = w_d, \\ V_m = M_s \dfrac{1}{v\lambda} & \text{„} \quad u = (m-v)\lambda, & w = w_v. \end{cases}$$

Die Gleichung für V_m gilt jedoch nicht für die Kämpferverticalen und Scheitelverticalen. Nach 2) 3) erhält man mit Rücksicht auf die Formberechnung im vorletzten Beispiele bei beliebigen K, L die Beanspruchungen des Obergurts (Fig. 144):

$$X_1 = -(4V - 4H - 4K_0 - 4L + 2L_0)\frac{4{,}12}{4\,.\,3},$$

$$X_2 = -(8V - 6{,}33H - 8K_0 - 4K_1 - 6{,}33L - 0{,}33L_0 + 0{,}67L_1)\frac{4{,}12}{4\,.\,1{,}67},$$

$$X_3 = -(12V - 7{,}6H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 7{,}6L - 1{,}6L_0 - 0{,}6L_1 + 0{,}4L_2)\frac{4{,}12}{4\,.\,1{,}4},$$

$$X_4 = -(16V - 8H - 16K_0 - 12K_1 - 8K_2 - 4K_3 - 8L - 2L_0 - 1L_1 - 0L_2 + 1L_3)\frac{4{,}12}{4\,.\,2},$$

die Beanspruchungen des Untergurts:

$$Z_1 = (0V - 6H - 6L)\frac{5{,}66}{4\,.\,6},$$

$$Z_2 = (4V - 7H - 4K_0 - 7L - 1L_0)\frac{4{,}63}{4\,.\,3},$$

$$Z_3 = (8V - 8H - 8K_0 - 4K_1 - 8L - 2L_0 - 1L_1)\frac{4{,}2}{4\,.\,1{,}67},$$

$$Z_4 = (12V - 9H - 12K_0 - 8K_1 - 4K_2 - 9L - 3L_0 - 2L_1 - 1L_2)\frac{4{,}02}{4\,.\,1{,}4},$$

die Beanspruchungen der Diagonalen:

$$D_1 = (10V - 8H - 10K_0 - 8L - 2L_0)\frac{4{,}47}{1\,.\,24},$$

$$D_2 = (13V - 9{,}25H - 13K_0 - 9K_1 - 9{,}25L - 3{,}25L_0 - 2{,}25L_1)\frac{4{,}06}{1{,}25\,.\,12},$$

$$D_3 = (32{,}72V - 14{,}18H - 32{,}72K_0 - 28{,}72K_1 - 24{,}72K_2 - 14{,}18L - 8{,}18L_0 - 1{,}18L_1 - 6{,}18L_2)\frac{4{,}02}{5{,}18\,.\,6{,}68},$$

$$D_4 = -(2{,}68V - 6{,}67H - 2{,}68K_0 + 1{,}32K_1 + 5{,}32K_2 + 9{,}32K_3 - 6{,}67L - 0{,}67L_0 + 0{,}33L_1 + 1{,}33L_2 + 2{,}33L_3)\frac{4{,}12}{3{,}33\,.\,5{,}6},$$

und die Beanspruchungen der Verticalen:

$$V_1 = -(13V - 9{,}25H - 13K_0 - 9{,}25L - 3{,}25L_0)\frac{1}{2{,}25\,.\,4},$$

$$V_2 = -(32{,}72V - 14{,}18H - 32{,}72K_0 - 28{,}72K_1 - 14{,}18L - 8{,}18L_0 - 7{,}18L_1)\frac{1}{6{,}18\,.\,4},$$

$$V_3 = (2{,}68V - 6{,}67H - 2{,}68K_0 + 1{,}32K_1 + 5{,}32K_2 - 6{,}67L - 0{,}67L_0 + 0{,}33L_1 + 1{,}33L_2)\frac{1}{2{,}33\,.\,4}.$$

Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 0 des Untergurts und 4 des Obergurts liefert zur Bestimmung von V_0 und V_4 die Gleichungen

$$V_0 + V + Z_1 \frac{4}{5{,}66} = 0, \qquad V_4 + K_4 + X_4 \frac{1}{4{,}12} = 0.$$

Wegen vollständiger Symmetrie des Trägers genügt es, eine Trägerhälfte zu berechnen, was beim Balkendachbinder, der verschiedenen Auflager wegen, nicht der Fall war.

Dachfläche beim Auflager l getroffen. Für die äussern Kräfte vor den Gelenken l und d bestehen hinsichtlich dieser Gelenke folgende Momentengleichungen:

$$V \,.\, 32 - 0{,}4\left(\frac{16}{2} + 12 + 8 + 4\right)$$
$$- 0{,}1\left(\frac{10}{2} + 9 + 8 + 7 + \frac{6}{2}\right) - 1{,}75 \,.\, 6 = 0,$$
$$V \,.\, 16 - H \,.\, 8 = 0,$$

woraus die Stützenreactionen bei 0

$$V = 0{,}83 \text{ tn}, \qquad H = 1{,}66 \text{ tn}.$$

Mit diesen Werthen und verschwindenden K, L liefern obige Gleichungen folgende Stabkräfte in Tonnen:

			$V_0 = 1{,}70$
$X_1 = 1{,}14$	$Z_1 = -2{,}35$	$D_1 = -0{,}93$	$V_1 = 1{,}71$
$X_2 = 2{,}39$	$Z_2 = -3{,}20$	$D_2 = -1{,}24$	$V_2 = -0{,}15$
$X_3 = 1{,}95$	$Z_3 = -4{,}17$	$D_3 = 0{,}42$	$V_3 = -0{,}57$
$X_4 = 0$	$Z_4 = -3{,}58$	$D_4 = 1{,}95$	$V_4 = 0.$

Dachfläche beim Auflager 0 getroffen. Für die äussern Kräfte vor den Gelenken l und d bestehen hinsichtlich dieser Gelenke folgende Momentengleichungen:

$$V \,.\, 32 - 0{,}4\left(\frac{32}{2} + 28 + 24 + 20 + \frac{16}{2}\right)$$
$$+ 0{,}1\left(\frac{6}{2} + 7 + 8 + 9 + \frac{10}{2}\right) + 1{,}75 \,.\, 6 = 0,$$
$$V \,.\, 16 - H \,.\, 8 - 0{,}4\left(\frac{16}{2} + 12 + 8 + 4\right)$$
$$- 0{,}1\left(\frac{2}{2} + 1 + 0 - 1 - \frac{1}{2}\right) - 1{,}75\,(8 + 2) = 0,$$

woraus die Stützenreactionen bei 0

$$V = 0{,}77 \text{ tn}, \qquad H = -2{,}25 \text{ tn}.$$

Mit diesen Werthen und $2K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = 2K_4 = 0{,}4$, $L = 1{,}75$, $L_0 = 1{,}75 + 0{,}05 = 1{,}8$, $L_1 = L_2 = L_3 = 2L_4 = 0{,}1$ liefern obige Gleichungen folgende Stabkräfte in Tonnen:

			$V_0 = -1{,}27$
$X_1 = -2{,}71$	$Z_1 = 0{,}71$	$D_1 = 1{,}14$	$V_1 = -0{,}69$
$X_2 = -3{,}45$	$Z_2 = 1{,}54$	$D_2 = 0{,}64$	$V_2 = 0{,}05$
$X_3 = -2{,}16$	$Z_3 = 2{,}05$	$D_3 = -1{,}35$	$V_3 = 0{,}70$
$X_4 = 0{,}04$	$Z_4 = 0{,}75$	$D_4 = -2{,}19$	$V_4 = -0{,}21$.

Beim jetzt betrachteten Dache war die vom Winde getroffene Fläche nur einfach gebrochen. Wäre sie mehrfach gebrochen gewesen, so würde zwar die Berechnung der K, L etwas umständlicher geworden (wie in Beispiel 58), die übrige Berechnung aber ganz wie oben und im vorigen Beispiele geblieben sein.

Beispiel 87. Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 24$ m Spannweite sollen Bogenträger mit drei Gelenken nach der Anordnung Fig. 145 mit kreisförmigem (einem Kreisbogen eingeschriebenem) Untergurte zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe bei den Kämpfern $h_0 = 4{,}5$ m, im Scheitel $h = 0{,}5$ m, Felderzahl $n = 8$. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}7$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}8$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_x = 0{,}4$ tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_s = 0{,}3$ tn auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Formberechnung. Wird der Ursprung der Coordinaten in das Kämpfergelenke links gelegt, so hat man nach § 17, 37) die Gleichung des Kreisbogens, welcher die Form des Untergurts bestimmt,

$$(1) \qquad y = -\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right)^2 + x(l-x)},$$

oder wegen $l = 24$, $f = 4$,

$$y = -16 + \sqrt{256 + x(24 - x)}.$$

Diese Gleichung liefert

für $x =$	3	6	9:
$y =$	1,86	3,08	3,77,

und mit Rücksicht hierauf folgen

für					
$m =$	0	1	2	3	4:
$\mathfrak{z}_m =$	0	1,86	3,08	3,77	4
$h_m = h_0 - \mathfrak{z}_m =$	4,5	2,64	1,42	0,73	0,5
$s_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1})^2} =$		3,53	3,24	3,08	3,01
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h_m^2} =$		4,00	3,32	3,09	3,04
$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		$-1,42$	$-1,16$	$-1,06$	$-2,17$
$\nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m} =$		$-2,16$	$-2,06$	$-3,17$,	

während man nach § 69, 6) 8) 9) weiter hat:

$$x_m = \lambda = 3, \qquad \mathfrak{x}_m = w_d = w_v = h_0 = 4,5$$

$$\xi = \frac{n}{2f}\mathfrak{z}_m = \mathfrak{z}_m, \qquad \zeta = \delta = \omega = \frac{n}{2f}h_0 = h_0 = 4,5.$$

Alle Längen sind in Metern gegeben.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte bestehen nach § 69, 6) 7) folgende Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\left[m(n-m) - \frac{n\xi}{2}\right]\frac{x_m}{h_m}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = \left[(m-1)(n-m+1) - \frac{n\xi}{2}\right]\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = -\left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - \frac{n\delta}{2}\right]\frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = \left[m(n-m) - \nu\left(n-2m+\frac{g_x - g_s}{g}\right) - \frac{n\omega}{2}\right]\frac{g\lambda}{2\nu}, \end{cases}$$

oder nach Einsetzen der gegebenen Zahlenwerthe:

$$\mathfrak{X}_m = -[m(8-m) - 4\mathfrak{z}_m]\frac{3,15}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = [(m-1)(9-m) - 18]\frac{1,05\,z_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = -[m(8-m) - \varepsilon(9-2m) - 18]\frac{1,05\,d_m}{\varepsilon h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = [m(8-m+2\nu) - 18]\frac{1,05}{\nu} - 8,55.$$

Hieraus folgen nachstehende Stabkräfte in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = 0{,}52$	$\mathfrak{Z}_1 = -14{,}82$	$\mathfrak{D}_1 = -0{,}70$	$\mathfrak{V}_1 = -1{,}10$
$\mathfrak{X}_2 = 0{,}71$	$\mathfrak{Z}_2 = -14{,}17$	$\mathfrak{D}_2 = -0{,}23$	$\mathfrak{V}_2 = -1{,}29$
$\mathfrak{X}_3 = 0{,}35$	$\mathfrak{Z}_3 = -13{,}66$	$\mathfrak{D}_3 = 0{,}39$	$\mathfrak{V}_3 = -1{,}26$
$\mathfrak{X}_4 = 0$	$\mathfrak{Z}_4 = -12{,}99$	$\mathfrak{D}_4 = 0{,}34$.	

Die allgemeinen Gleichungen für V_m, $\mathfrak{V}_m$ gelten nicht für die Kämpferverticale und Scheitelverticale; indessen hat man nach A. 39, 7) 17) deren Beanspruchungen durch Eigengewicht allein, wenn ξ_1 den Werth von ξ für $m = 1$ bedeutet,

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_z}{2} - \left(1 - \frac{\xi_1}{2}\right)\frac{g\,l}{2}, \qquad \mathfrak{V}_\sigma = -\frac{\lambda g_z}{2}, \tag{3}$$

welche Gleichungen ergeben

$$\mathfrak{V}_0 = -0{,}14 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{V}_1 = -0{,}6 \text{ tn}.$$

Die vom Eigengewicht allein herrührenden Vertical- und Horizontalreactionen der Kämpfer schliesslich sind nach § 67, 17)

$$\mathfrak{V} = \frac{g\,l}{2}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{g\,l^2}{8f}, \tag{4}$$

woraus

$$\mathfrak{V} = 8{,}4 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{H} = 12{,}6 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Da sämmtliche Knotenpunkte der Z-Gurtung in dem durch die punktirten Linien in Fig. 145 eingeschlossenen Raume I liegen, so hat man nach § 70, 1) und § 19, 2) die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

$$\begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m + \xi\,\dfrac{\xi - m}{\xi + m}\,\dfrac{x_m}{h_m}\,\dfrac{p\,l}{4}, \\ X_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{Z}_m - (Z_m), \end{cases} \tag{5}$$

und da mit Ausnahme des Knotenpunkts überm Scheitel sämmtliche Knotenpunkte der X-Gurtung im Raume I liegen, so sind nach § 70, 3) und § 19, 3) die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:

$$\begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m - \xi\,\dfrac{\xi - m + 1}{\xi + m - 1}\,\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\,l}{4}, \\ Z_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{Z}_m - (Z_m). \end{cases} \tag{6}$$

Diese Gleichungen liefern in Tonnen für den Obergurt:

$$X_1 = 0{,}52 + \frac{1{,}86\,.\,0{,}86}{2{,}86\,.\,2{,}64}\,50{,}4 = 11{,}20$$

$$X_2 = 0{,}71 + \frac{3{,}08\,.\,1{,}08}{5{,}08\,.\,1{,}42}\,50{,}4 = 25{,}66$$

$$X_3 = 0{,}35 + \frac{3{,}77 \,.\, 0{,}77}{6{,}77 \,.\, 0{,}73}\, 50{,}4 = 29{,}93$$

$$X_4 = 0 \quad + \frac{4 \,.\, 0}{8 \,.\, 0{,}5}\, 50{,}4 = \;\; 0,$$

$$X_1 = 6 \,.\, 0{,}52 - 11{,}20 = - \;\; 8{,}08$$
$$X_2 = 6 \,.\, 0{,}71 - 25{,}66 = - 21{,}40$$
$$X_3 = 6 \,.\, 0{,}35 - 29{,}93 = - 27{,}80$$
$$X_4 = 6 \,.\, 0 \quad - \quad 0 \quad = \quad 0,$$

und für den Untergurt:

$$Z_1 = - 14{,}82 - \frac{4{,}5 \,.\, 3{,}53}{4{,}5 \,.\, 4{,}5}\, 75{,}6 = - 74{,}10$$

$$Z_2 = - 14{,}17 - \frac{3{,}5 \,.\, 3{,}24}{5{,}5 \,.\, 2{,}64}\, 75{,}6 = - 73{,}21$$

$$Z_3 = - 13{,}66 - \frac{2{,}5 \,.\, 3{,}08}{6{,}5 \,.\, 1{,}42}\, 75{,}6 = - 76{,}71$$

$$Z_4 = - 12{,}99 - \frac{1{,}5 \,.\, 3{,}01}{7{,}5 \,.\, 0{,}73}\, 75{,}6 = - 75{,}36,$$

$$\mathfrak{Z}_1 = - 6 \,.\, 14{,}82 + 74{,}10 = - 14{,}82$$
$$\mathfrak{Z}_2 = - 6 \,.\, 14{,}17 + 73{,}21 = - 11{,}81$$
$$\mathfrak{Z}_3 = - 6 \,.\, 13{,}66 + 76{,}71 = - \;\; 5{,}25$$
$$\mathfrak{Z}_4 = - 6 \,.\, 12{,}99 + 75{,}36 = - \;\; 2{,}58.$$

Mit Rücksicht auf die oben zusammengestellten Werthe der ε entsprechen den Diagonalen

für	$m =$ 1	2	3	4:
$\varphi = \frac{m - \varepsilon}{n}\, 2f =$	2,42	3,16	4,06	6,17
$\chi = \frac{n - m + \varepsilon}{n}\, 2f =$	5,58	4,84	3,94	1,83
$\psi = \frac{n - m}{m} \frac{m - \varepsilon}{n}\, 2f =$	16,94	9,48	6,77	6,17.

Für die Diagonalen 1 und 2 liegt $w_d = 4{,}5$ nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ, sodass nach § 70, 7) eine Grenzbeanspruchung derselben

$$(7) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{\delta - m + \varepsilon}{\delta + m - \varepsilon} \frac{\delta\, d_m}{\varepsilon\, h_{m-1}} \frac{p\, l}{4}.$$

Für die Diagonale 3 liegt w_d sowohl zwischen χ und ψ als auch zwischen ψ und φ und ist nach § 70, 5) eine Grenzbeanspruchung

$$(8) \quad D_m = \mathfrak{D}_m + \left[\frac{(m-1)^2\,(n - m - \delta + \varepsilon)}{n - m - \delta - \varepsilon\,(n-1)} + \frac{\delta - m + \varepsilon}{\delta + m - \varepsilon} \frac{n\,\delta}{2\,\varepsilon}\right] \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{p\,\lambda}{2}.$$

Für die Diagonale 4 liegt w_d zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ, nach § 70, 6) ist eine Grenzbeanspruchung

$$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{(m-1)^2(n-m-\delta+\varepsilon)}{n-m-\delta-\varepsilon(n-1)} \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{pl}{2}. \tag{9}$$

Die zweite Grenzbeanspruchung liefert § 19, 4) für alle Diagonalen, wenn (D_m) die erste Grenzbeanspruchungen bedeutet,

$$D_m = \frac{q+g}{g} \mathfrak{D}_m - (D_m). \tag{10}$$

Aus vorstehenden Gleichungen ergeben sich folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$D_1 = -0{,}70 - \frac{2{,}08 \,.\, 4{,}5 \,.\, 4}{6{,}92 \,.\, 1{,}42 \,.\, 4{,}5} 16{,}8 = -14{,}92$$

$$D_2 = -0{,}23 - \frac{1{,}34 \,.\, 4{,}5 \,.\, 3{,}32}{7{,}66 \,.\, 1{,}16 \,.\, 2{,}64} 16{,}8 = -14{,}57$$

$$D_3 = 0{,}39 - \left(\frac{4 \,.\, 0{,}56}{7{,}92} + \frac{0{,}44 \,.\, 18}{8{,}56 \,.\, 1{,}06}\right) \frac{3{,}09}{1{,}42} 4{,}2 = -10{,}17$$

$$D_4 = 0{,}34 - \frac{9 \,.\, 2{,}67 \,.\, 3{,}04}{14{,}69 \,.\, 0{,}73} 4{,}2 = -28{,}27,$$

$$D_1 = -6 \,.\, 0{,}70 + 14{,}92 = 10{,}72$$

$$D_2 = -6 \,.\, 0{,}23 + 14{,}57 = 13{,}19$$

$$D_3 = 6 \,.\, 0{,}39 + 10{,}17 = 12{,}51$$

$$D_4 = 6 \,.\, 0{,}34 + 28{,}27 = 30{,}31.$$

Mit Rücksicht auf die oben gegebenen Werthe der ν entsprechen den Verticalen

für	$m =$	1	2	3:
	$\varphi = \frac{m-\nu}{n} 2f =$	3,16	4,06	6,17
	$\chi = \frac{n-m+\nu}{n} 2f =$	4,84	3,94	1,83
	$\psi = \frac{n-m}{m} \frac{m-\nu}{n} 2f =$	22,12	12,18	10,28.

Für die Verticale 1 liegt $w_v = 4{,}5$ nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ, sodass nach § 70, 11) eine Grenzbeanspruchung derselben

$$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{\omega - m + \nu}{\omega + m - \nu} \frac{\omega}{\nu} \frac{pl}{4}. \tag{11}$$

Für die Verticale 2 liegt w_v sowohl zwischen χ und ψ als auch zwischen ψ und φ und ist nach § 70, 9) eine Grenzbeanspruchung

$$V_m = \mathfrak{V}_m - \left[\frac{(m-1)^2(n-m-\omega+\nu)}{n-m-\omega-\nu(n-1)} + \frac{\omega-m+\nu}{\omega+m-\nu} \frac{n\omega}{2\nu}\right] \frac{pl}{2}. \tag{12}$$

Für die Verticale 3 schliesslich liegt w_v zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ, nach § 70, 10) ist eine Grenzbeanspruchung

(13) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{(m-1)^2(n-m-\omega+\nu)}{n-m-\omega-\nu(n-1)}\frac{p\lambda}{2}.$$

Die zweite Grenzbeanspruchung ist nach § 19, 8) in allen drei Fällen, wenn (V_m) die erste bezeichnet,

(14) $$V_m = \frac{q+g}{g}\mathfrak{V}_m - (V_m) - \frac{p\lambda}{g}g_s.$$

Vorstehende Gleichungen liefern folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$V_1 = -1{,}10 + \frac{1{,}34\,.\,4{,}6}{7{,}66\,.\,2{,}16}\,16{,}8 = 5{,}02$$

$$V_2 = -1{,}29 + \left(\frac{1\,.\,0{,}56}{15{,}92} + \frac{0{,}44\,.\,18}{8{,}56\,.\,2{,}06}\right)4{,}2 = 0{,}74$$

$$V_3 = -1{,}26 + \frac{4\,.\,2{,}67}{22{,}69}\,4{,}2 = 0{,}72,$$

$$V_1 = -6\,.\,1{,}10 - 5{,}02 - 3{,}6 = -15{,}22$$

$$V_2 = -6\,.\,1{,}29 - 0{,}74 - 3{,}6 = -12{,}08$$

$$V_3 = -6\,.\,1{,}26 - 0{,}72 - 3{,}6 = -11{,}88.$$

Für die Grenzbeanspruchung der Kämpferverticale hat man nach A. 39

(15) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 + \xi_1\frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1}\frac{pl}{4}, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{1}{\xi_1 + 1}\frac{pl}{2},$$

und für diejenigen der Scheitelverticale

(16) $$V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma - \frac{p\lambda}{2}, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$V_0 = -0{,}14 + 1{,}86\,\frac{0{,}86}{2{,}86}\,16{,}8 = 9{,}26,$$

$$V_0 = -0{,}14 - \frac{33{,}6}{2{,}86} = -11{,}89,$$

$$V_4 = -0{,}6 - 4{,}2 = -4{,}8, \qquad V_4 = -0{,}6 \text{ tn}.$$

Die oberen Grenzwerthe der verticalen Stützenreaction und des Horizontalschubs sind nach § 67, 14)

(17) $$V = \frac{q}{g}\mathfrak{V}, \qquad H = \frac{q}{g}\mathfrak{H},$$

also

$$V = 5\mathfrak{V} = 42,$$

$$H = 5\mathfrak{H} = 63 \text{ tn},$$

während die unteren Grenzwerthe für Eigengewicht allein eintreten.

Beispiel 88. Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe ist ganz wie im vorigen Beispiele zu verfahren. Nach § 69 haben wir weiter die den Gurtungen, Diagonalen und Verticalen entsprechenden z, z', welche vorübergehend mit unterscheidenden Indices versehen werden, in Metern

für				
$m =$	1	2	3	4:
$c = (m-1)\lambda =$	0	3	6	9
$v = m\lambda =$	3	6	9	12
$z_x = 0,\ z'_x = \frac{m}{m+\xi}\, l =$	8,39	9,45	10,64	12
$z_s = z'_s = \frac{m-1}{m-1+\zeta}\, l =$	0	4,36	7,38	9,6
$z_d = \frac{(m-1)\,\varepsilon}{(n-1)\,\varepsilon + m - n + \delta}\, l =$	0	2,89	6,42	10,64
$z'_d = \frac{m-\varepsilon}{m-\varepsilon+\delta}\, l =$	8,39	9,90	11,38	13,88
$z_v = \frac{(m-1)\,\nu}{(n-1)\,\nu + m - n + \omega}\, l =$	0	3,11	6,71	
$z'_v = \frac{m-\nu}{m-\nu+\omega}\, l =$	9,90	11,38	13,88.	

Nach § 68 treten die unteren Grenzwerthe der Stützenreactionen V, H für Eigengewicht allein ein, die oberen ergeben sich wie folgt: Belastung durch Zug II (Fig. 22) von 0 bis l, Vorderrad O bei 0,

$$V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \tag{1}$$

Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis l, Rad O bei d (Richtung gleichgültig),

$$H = \mathfrak{H} + \frac{1}{2f}\left[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\right]. \tag{2}$$

Die Werthe der $\sum$ in diesen wie in den folgenden Gleichungen können aus der Tabelle in Beispiel 6 entnommen oder berechnet werden. Wir wollen den letzteren Weg einschlagen und erhalten

$$V = 8{,}4 + \frac{1}{24}[6(24 + 22{,}7 + 21{,}4 + 13 + 11{,}7 + 10{,}4 + 2 + 0{,}7) + 4(20{,}2 + 9{,}2) + 5(17{,}2 + 6{,}2)] = 44{,}65 \text{ tn},$$

$$H = 12{,}6 + \frac{1}{8}[6(12 + 10{,}7 + 2{,}3 + 1) + 4 \,.\, 9{,}5 + 5 \,.\, 6{,}5 + 6(10{,}7 + 6{,}7 + 5{,}4 + 4{,}1) + 4 \,.\, 2{,}9] = 62{,}54 \text{ tn}.$$

Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 0 des Untergurts und 4 des Obergurts gibt für jede Belastung

$$(3) \qquad H + Z_1 \frac{\lambda}{z_1} = 0, \qquad X_4 = 0,$$

wonach die Grenzwerthe von Z_1, welche gleichzeitig mit denjenigen von H eintreten,

$$Z_1 = -62{,}54 \frac{3{,}53}{3} = -73{,}57 \text{ tn},$$

$$Z_1 = \mathfrak{Z}_1 = -14{,}82 \text{ tn}.$$

Da für sämmtliche Stäbe der X-Gurtung s' zwischen v und d liegt, so ergeben sich nach § 71, 5) 6) deren Grenzbeanspruchungen wie folgt:

Belastung durch Zug I von 0 bis s', Rad O bei v (mitunter Zug II von 0 bis v, Vorderrad O bei v),

$$(4) \quad X_m = \mathfrak{X}_m - \left[(n - \xi - m)\sum_0^v Pa + (\xi + m)\sum_v^{s'} P(s' - a)\right]\frac{x_m}{lh_m},$$

Belastung durch Zug I von s' bis l, Rad O bei d (mitunter Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(5) \quad X_m = \mathfrak{X}_m + \left[(\xi + m)\sum_{s'}^d P(a - s') + (\xi - m)\sum_d^l P(l - a)\right]\frac{x_m}{lh_m}.$$

Wir setzen die Zug I entsprechenden Grenzwerthe für die erste Zugrichtung an und fügen die für die zweite Zugrichtung resultirenden Werthe in Klammern bei. Man wird dann sehen, dass die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung genügt hätte (vgl. die Bemerkungen am Schlusse des § 68). Erste Grenzwerthe:

$$X_1 = 0{,}52 - [5{,}14(6 \,.\, 3 + 6 \,.\, 1{,}7 + 4 \,.\, 0{,}5) + 2{,}86(6 \,.\, 4{,}09 + 6 \,.\, 0{,}09)]\frac{1}{8 \,.\, 2{,}64}$$
$$= -10{,}23 \text{ tn } (-11{,}18),$$

$$X_2 = 0{,}71 - [2{,}92\,(6 \,.\, 6 + 6 \,.\, 4{,}7 + 4 \,.\, 3{,}5 + 5 \,.\, 0{,}5) + 5{,}08 \,.\, 6 \,.\, 2{,}15] \frac{1}{8 \,.\, 1{,}42} = -25{,}80\,\text{tn}\,(-24{,}34),$$

$$X_3 = 0{,}35 - [1{,}23\,(6 \,.\, 9 + 6 \,.\, 7{,}7 + 4 \,.\, 6{,}5 + 5 \,.\, 3{,}5) + 6{,}77 \,.\, 6 \,.\, 0{,}34] \frac{1}{8 \,.\, 0{,}73} = -32{,}28\,\text{tn}\,(-32{,}22).$$

Zweite Grenzwerthe:

$$X_1 = 0{,}52 + [2{,}86\,(6 \,.\, 3{,}61 + 6 \,.\, 2{,}31 + 4 \,.\, 1{,}11) + 0{,}86\,(6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 6 \,.\, 4{,}1 + 4 \,.\, 2{,}9)] \frac{1}{8 \,.\, 2{,}64} = 12{,}97\,\text{tn}\,(11{,}62),$$

$$X_2 = 0{,}71 + [5{,}08\,(6 \,.\, 2{,}55 + 6 \,.\, 1{,}25 + 4 \,.\, 0{,}05) + 1{,}08\,(6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 6 \,.\, 4{,}1 + 4 \,.\, 2{,}9)] \frac{1}{8 \,.\, 1{,}42} = 27{,}44\,\text{tn}\,(25{,}59),$$

$$X_3 = 0{,}35 + [6{,}77\,(6 \,.\, 1{,}36 + 6 \,.\, 0{,}06) + 0{,}77\,(6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 6 \,.\, 4{,}1 + 4 \,.\, 2{,}9)] \frac{1}{8 \,.\, 0{,}73} = 33{,}04\,\text{tn}\,(30{,}60).$$

Die oben in Klammer erwähnte Belastung durch Zug II wird voraussichtlich für X_3 ungünstiger als die Belastung durch Zug I wirken, da der X_3 entsprechende Grenzpunkt der Beitragsstrecken $z' = 10{,}64$ nahe an den Influenzpunkten $v = 9$ und $d = 12$ der Letzteren liegt. In der That ergeben sich mit Zug II die Grenzwerthe

$$X_3 = 0{,}35 - \frac{1{,}23}{8 \,.\, 0{,}73}[6\,(9 + 7{,}7 + 6{,}4) + 4 \,.\, 5{,}2 + 5 \,.\, 2{,}2] = -35{,}54\,\text{tn},$$

$$X_3 = 0{,}35 + \frac{1{,}23}{8 \,.\, 0{,}73}[6(12 + 10{,}7 + 9{,}4 + 1) + 4 \,.\, 8{,}2 + 5 \,.\, 5{,}2] = 34{,}29\,\text{tn},$$

gegen oben erhaltene — 32,28 und 33,34 tn.

Da für sämmtliche Stäbe der Z-Gurtung z zwischen c und d liegt, so hat man nach § 71, 7) 8) folgende Grenzbeanspruchungen derselben:

Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei c (mitunter Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c),

$$(6) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + \Big[(n - 1 + \zeta - m) \sum_0^c Pa + (\zeta - 1 + m) \sum_c^z P(z - a)\Big] \frac{z_m}{lh_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von z bis l, Rad O bei d (mitunter Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(7) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - \Big[(\xi - 1 + m) \sum_s^d P(a-z) + (\xi + 1 - m) \sum_d^l P(l-a) \Big] \frac{z_m}{l\, h_{m-1}}.$$

Wir verfahren nun ganz wie bei der X-Gurtung und erhalten mit **Zug** I die ersten Grenzwerthe (Z_1 ist schon berechnet):

$$Z_2 = -14{,}17 + [2{,}5\,(6\,.\,3 + 6\,.\,1{,}7 + 4\,.\,0{,}5) + 5{,}5\,.\,6\,.\,0{,}06]\,\frac{3{,}24}{24\,.\,2{,}64} = -11{,}11 \text{ tn } (-10{,}46),$$

$$Z_3 = -13{,}66 + [1{,}5\,(6\,.\,6 + 6\,.\,4{,}7 + 4\,.\,3{,}5 + 5\,.\,0{,}5) + 6{,}5\,.\,6\,.\,0{,}08]\,\frac{3{,}08}{24\,.\,1{,}42} = -2{,}24 \text{ tn } (-4{,}11),$$

$$Z_4 = -12{,}99 + [6\,.\,9 + 6\,.\,7{,}7 + 4\,.\,6{,}5 + 5\,.\,3{,}5]\,\frac{3{,}01}{24\,.\,0{,}73} = -0{,}65 \text{ tn } (-0{,}67),$$

und die zweiten Grenzwerthe:

$$Z_2 = -14{,}17 - [5{,}5\,(6\,.\,7{,}64 + 6\,.\,6{,}34 + 4\,.\,5{,}14 + 5\,.\,2{,}14) + 3{,}5(6\,.\,10{,}7 + 6\,.\,6{,}7 + 6\,.\,5{,}4 + 6\,.\,4{,}1 + 4\,.\,2{,}9)]\,\frac{3{,}24}{24\,.\,2{,}64} = -77{,}52 \text{ tn } (-71{,}13),$$

$$Z_3 = -13{,}66 - [6{,}5\,(6\,.\,4{,}62 + 6\,.\,3{,}32 + 4\,.\,2{,}12) + 2{,}5\,(6\,.\,10{,}7 + 4\,.\,9{,}5 + 5\,.\,6{,}5 + 6\,.\,2{,}3 + 6\,.\,1)]\,\frac{3{,}08}{24\,.\,1{,}42} = -85{,}71 \text{ tn } (-76{,}55),$$

$$Z_4 = -12{,}99 - [7{,}5\,(6\,.\,2{,}4 + 6\,.\,1{,}1) + 1{,}5(6\,.\,10{,}7 + 6\,.\,6{,}7 + 6\,.\,5{,}4 + 6\,.\,4{,}1 + 4\,.\,2{,}9)]\,\frac{3{,}01}{24\,.\,0{,}73} = -84{,}63 \text{ tn } (-79{,}00).$$

Die zu 6) 7) in Klammer erwähnten Belastungen durch Zug II würden am ehesten für Z_4 ungünstigere Grenzwerthe als Zug I ergeben. Wir erhalten damit

$$Z_4 = -12{,}99 + \frac{0{,}5\,.\,3{,}01}{24\,.\,0{,}73}\,[6\,(9 + 7{,}7 + 6{,}4) + 4\,.\,5{,}2 + 5\,.\,2{,}2] = 1{,}65 \text{ tn},$$

$$Z_4 = -12{,}99 - \frac{0{,}5\,.\,3{,}01}{24\,.\,0{,}73}\,[6\,(12 + 10{,}7 + 9{,}4 + 1) + 4\,.\,8{,}2 + 5\,.\,5{,}2] = -79{,}32 \text{ tn},$$

gegen oben erhaltene — 0,65 und — 84,63 tn, sodass nur der erste, weniger wichtige Grenzwerth ungünstiger als mit Zug I geworden ist. Dass der erste Grenzwerth ungünstiger würde, war übrigens

von vornherein klar, da auch mit Zug I kein Rad auf die Strecke von c bis z kommt.

Für die Diagonalen 1 und 2 liegt z nicht zwischen c und v, wohl aber z' zwischen v und d und da $z < c$, so ergeben sich nach § 71, 13) 14) die Grenzbeanspruchungen wie folgt:

Belastung durch Zug I von 0 bis z', Rad O bei v,

$$(8)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[(n - m + \varepsilon - \delta)\sum_0^c Pa + (m - \varepsilon + \delta + \varepsilon n - n)\sum_c^v P(z - a) + (m - \varepsilon - \delta)\sum_v^{z'} P(z' - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von z' bis l, Rad O bei d,

$$(9)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[(m - \varepsilon + \delta)\sum_{z'}^d P(z' - a) + (m - \varepsilon - \delta)\sum_d^l P(l - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}.$$

Für die Diagonale 3 liegt sowohl z zwischen c und v als auch z' zwischen v und d, sodass sich die Grenzbeanspruchungen nach § 71, 9) 10) wie folgt ergeben:

Belastung durch einen Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c, und einen Zug I von z' bis l, Rad O bei d (mitunter statt des Letzteren einen Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(10)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[(n - m + \varepsilon - \delta)\sum_0^c Pa + (m - \varepsilon + \delta)\sum_z^d P(z' - a) + (m - \varepsilon - \delta)\sum_d^l P(l - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug II von v bis z', Vorderrad O bei v (mitunter Zug I von z bis z', Rad O bei v),

$$(11)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[(m - \varepsilon + \delta + \varepsilon n - n)\sum_z^v P(z - a) + (m - \varepsilon + \delta)\sum_v^{z'} P(z' - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}.$$

Für die Diagonale 4 liegt z zwischen c und v, aber z' nicht zwischen

v und d, die Grenzbeanspruchungen entstehen nach § 71, 11) 12) wie folgt:

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{n - m + \varepsilon - \delta}{\varepsilon l} \sum_0^c Pa, \tag{12}$$

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[(m - \varepsilon + \delta) \sum_v^d P(z' - a) + (m - \varepsilon - \delta) \sum_d^l P(l - a) \Big] \frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}} . \tag{13}$$

Vorstehende Gleichungen liefern für die Diagonale 1:

$$D_1 = -0{,}70 + [12{,}44\,(6 \,.\, 3 + 6 \,.\, 1{,}7 + 4 \,.\, 0{,}5) + 6{,}92\,(6 \,.\, 4{,}09 + 6 \,.\, 0{,}09)] \frac{4}{1{,}42 \,.\, 24 \,.\, 4{,}5}$$
$$= 13{,}63 \text{ tn } (14{,}97),$$

$$D_1 = -0{,}70 - [6{,}92\,(6 \,.\, 3{,}61 + 6 \,.\, 2{,}31 + 4 \,.\, 1{,}11) + 2{,}08\,(6.10{,}7 + 6.6{,}7 + 6.5{,}4 + 6.4{,}1 + 4.2{,}9)] \frac{4}{1{,}42.24.4{,}5}$$
$$= -17{,}30 \text{ tn } (-15{,}49),$$

für die Diagonale 2:

$$D_2 = -0{,}23 + [0{,}34.5.0{,}5 + 9{,}62\,(6 \,.\, 3{,}11 + 6 \,.\, 1{,}81 + 4 \,.\, 0{,}61) + 7{,}66.6.2{,}6] \frac{3{,}32}{1{,}16.24.2{,}64} = 19{,}20 \text{ tn } (20{,}11),$$

$$D_2 = -0{,}23 - [7{,}66(6.2{,}1 + 6.0{,}8) + 1{,}34(6.10{,}7 + 6.6{,}7 + 6.5{,}4 + 6.4{,}1 + 4.2{,}9)] \frac{3{,}32}{1{,}16.24.2{,}64}$$
$$= -16{,}89 \text{ tn } (-15{,}69),$$

für die Diagonale 3 mit den in Klammer erwähnten Belastungen (da wegen $z' = 11{,}38$ auch mit der andern kein Rad auf die Strecke von z' bis d gelangt und z nahe bei c liegt):

$$D_3 = 0{,}39 - [0{,}56\,(6 \,.\, 6 + 6 \,.\, 4{,}7 + 6 \,.\, 3{,}4 + 4 \,.\, 2{,}2) + 0{,}44\,(6 \,.\, 12 + 6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 9{,}4 + 4 \,.\, 8{,}2 + 5 \,.\, 5{,}2 + 6 \,.\, 1)] \frac{3{,}09}{1{,}06.24.1{,}42} = -13{,}65 \text{ tn},$$

$$D_3 = 0{,}39 + [7{,}92(6.2{,}58 + 6 \,.\, 1{,}28 + 4 \,.\, 0{,}08) + 8{,}56.6.1{,}08] \frac{3{,}09}{1{,}06.24.1{,}42} = 21{,}04 \text{ tn } (20{,}82),$$

und für die Diagonale 4:

$$D_4 = 0{,}34 - [6 \,.\, 9 + 6 \,.\, 7{,}7 + 6 \,.\, 6{,}4 + 4 \,.\, 5{,}2 + 5 \,.\, 2{,}2] \frac{2{,}67 \,.\, 3{,}04}{2{,}17 \,.\, 24 \,.\, 0{,}73} = -\ 36{,}04 \text{ tn},$$

$$D_4 = 0{,}34 + [6 \,.\, 12 + 6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 9{,}4 + 4 \,.\, 8{,}2 + 5 \,.\, 5{,}2 + 6 \,.\, 1] \frac{1{,}67 \,.\, 3{,}04}{2{,}17 \,.\, 24 \,.\, 0{,}73} = 34{,}66 \text{ tn}.$$

Für die Verticale 1 liegt z nicht zwischen c und v, wohl aber z' zwischen v und d und da $z < c$, so ergeben sich nach § 71, 19) 20) die Grenzbeanspruchungen wie folgt:

Belastung durch Zug I von 0 bis z', Rad O bei v,

$$(14) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \Big[(n - m + v - \omega) \sum_0^c Pa + (m - v + \omega - vn - n) \sum_c^v P(z - a) + (m - v + \omega) \sum_v^{z'} P(z' - a)\Big] \frac{1}{vl},$$

Belastung durch Zug I von z' bis l, Rad O bei d,

$$(15) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \Big[(m - v + \omega) \sum_{z'}^d P(z' - a) + (m - v - \omega) \sum_d^l P(l - a)\Big] \frac{1}{vl}.$$

Für die Verticale 2 liegt sowohl z zwischen c und v als auch z' zwischen v und d, die Grenzbeanspruchungen sind nach § 71, 15) 16) wie folgt bestimmt:

Belastung durch einen Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c, und einen Zug I von z' bis l, Rad O bei d (mitunter statt des letzteren einen Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(16) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \Big[(n - m + v - \omega) \sum_0^c Pa + (m - v + \omega) \sum_{z'}^d P(z' - a) + (m - v - \omega) \sum_d^l P(l - a)\Big] \frac{1}{vl},$$

Belastung durch Zug II von v bis z', Vorderrad O bei v (mitunter Zug I von z bis z', Rad O bei v),

$$(17)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \Big[(m-\nu+\omega+\nu n-n)\sum_s^v P(z-a)$$
$$+ (m-\nu+\omega)\sum_v^{s'} P(z'-a)\Big]\frac{1}{\nu l}\cdot$$

Für die Verticale 3 liegt z zwischen c und v, aber z' nicht zwischen v und d, die Grenzbeanspruchungen entstehen nach § 71, 17) 18) wie folgt:

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(18)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{n-m+\nu-\omega}{\nu l}\sum_0^c Pa,$$

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(19)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \Big[(m-\nu+\omega)\sum_v^d P(z'-a)$$
$$+ (m-\nu-\omega)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{1}{\nu l}\cdot$$

Vorstehende Gleichungen liefern für die Verticale 1:

$$V_1 = -1{,}10 - [17{,}62\,(6\,.\,3 + 6\,.\,1{,}7 + 4\,.\,0{,}5)$$
$$+ 7{,}66\,(6\,.\,5{,}6 + 6\,.\,1{,}6 + 6\,.\,0{,}3)]\frac{1}{2{,}16\,.\,24}$$
$$= -18{,}01 \text{ tn } (-19{,}34),$$

$$V_1 = -1{,}10 + [7{,}66\,(6\,.\,2{,}1 + 6\,.\,0{,}8) + 1{,}34\,(6\,.\,10{,}7 + 6\,.\,6{,}7$$
$$+ 6\,.\,5{,}4 + 6\,.\,4{,}1 + 4\,.\,2{,}9)]\frac{1}{2{,}16\,.\,24} = 6{,}14 \text{ tn } (5{,}66),$$

für die Verticale 2 mit den in Klammer erwähnten Belastungen (aus gleichen Gründen wie für D_3):

$$V_2 = -1{,}29 + [0{,}56\,(6\,.\,3 + 6\,.\,1{,}7 + 4\,.\,0{,}5)$$
$$+ 0{,}44\,(6\,.\,12 + 6\,.\,10{,}7 + 6\,.\,9{,}4 + 4\,.\,8{,}2$$
$$+ 5\,.\,5{,}2 + 6\,.\,1)]\frac{1}{2{,}06\,.\,24} = 1{,}34 \text{ tn},$$

$$V_2 = -1{,}29 - [15{,}92\,(6\,.\,2{,}89 + 6\,.\,1{,}59 + 4\,.\,0{,}39)$$
$$+ 8{,}56\,(6.4{,}08 + 6.0{,}08)]\frac{1}{2{,}06\,.\,24} = -14{,}77 \text{ tn} (-16{,}18),$$

und für die Verticale 3:

$$V_3 = -1{,}26 + [6\,.\,6 + 6\,.\,4{,}7 + 6\,.\,3{,}4 + 4\,.\,2{,}2]\frac{2{,}67}{3{,}17\,.\,24} = 2{,}02 \text{ tn},$$

$$V_3 = -1{,}26 - [10{,}67\,(6\,.\,4{,}88 + 6\,.\,3{,}58 + 6\,.\,2{,}28)$$
$$+ 1{,}67\,(4\,.\,11{,}2 + 5\,.\,8{,}2 + 6\,.\,4 + 6\,.\,2{,}7$$
$$+ 6\,.\,1{,}4 + 4\,.\,0{,}2)]\frac{1}{3{,}17\,.\,24} = -13{,}27 \text{ tn}.$$

Da z für V_3 nahe an c liegt und $z' > d$ ist, so wird voraussichtlich mit Zug I von z bis l, Rad O bei v, ein noch etwas ungünstigerer Grenzwerth als der letzte mit Zug II berechnete entstehen. Nach § 71, 4) hat man für diese Belastung

$$(20) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \Big[(m - v + \omega + vn - n) \sum_z^v P(z - a)$$
$$+ (m - v + \omega) \sum_v^d P(z' - a)$$
$$+ (m - v - \omega) \sum_d^l P(l - a)\Big] \frac{1}{vl},$$

und hieraus

$$V_3 = -1{,}26 - [22{,}69\,(6 \,.\, 2{,}29 + 6 \,.\, 0{,}99) + 10{,}67 \,.\, 6 \,.\, 3{,}58$$
$$+ 1{,}67(6.10{,}7 + 6.9{,}4 + 6.7{,}1 + 4.5{,}9 + 5.2{,}9)] \frac{1}{3{,}17 \,.\, 24}$$
$$= -14{,}56 \text{ tn } (-14{,}23).$$

Nach A. 39, 4) 5) ergeben sich die Grenzbeanspruchungen der Kämpferverticale wie folgt:
Belastung durch Zug II von 0 bis z, Vorderrad O bei 0,

$$(21) \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 - \frac{\xi_1 - 1}{l} \sum_0^z P(z - a) \quad \text{mit } z = \frac{l}{\xi_1 + 1},$$

Belastung durch Zug I von z bis l, Rad O bei d,

$$(22) \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 + \frac{\xi_1 + 1}{l} \sum_z^d P(a - z) + \frac{\xi_1 - 1}{l} \sum_d^l P(l - a).$$

Diese Gleichungen liefern mit $z = 24 : 2{,}86 = 8{,}39$:

$$V_0 = -0{,}14 + [6\,(8{,}39 + 7{,}09 + 5{,}79)$$
$$+ 4 \,.\, 4{,}59 + 5 \,.\, 1{,}59] \frac{2{,}86}{24} = -8{,}48 \text{ tn},$$

$$V_0 = -0{,}14 + [6 \,.\, 3{,}61 + 6 \,.\, 2{,}31 + 4 \,.\, 1{,}11] \frac{2{,}86}{24}$$
$$+ [6 \,.\, 10{,}7 + 6 \,.\, 6{,}7 + 6 \,.\, 5{,}4 + 6 \,.\, 4{,}1 + 4 \,.\, 2{,}9] \frac{0{,}86}{24}$$
$$= 10{,}82 \text{ tn } (9{,}63).$$

Für die Scheitelverticale hat man allgemein

$$(23) \qquad V_\sigma = -K_\sigma,$$

unter K_σ die Belastung ihres oberen Knotenpunktes verstanden. Wir erhalten danach die Grenzbeanspruchungen:

$$V_4 = \mathfrak{V}_4 = -0{,}6 \text{ tn},$$
$$V_4 = -0{,}6 - 6\,\frac{3 + 1{,}7 + 0{,}4}{3} = -10{,}8 \text{ tn}.$$

Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt.

Bemerkungen. Die Berechnung im vorigen Beispiele wurde mit derjenigen gleichmässig vertheilten bewegten Last durchgeführt, welche nach der Tabelle in Beispiel 8 dem Maximalmomente in der Mitte eines durch Zug I direct befahrenen vollwandigen einfachen Balkenträgers der Spannweite 24 m entsprechen würde ($p = 2{,}77$, nach oben abgerundet 2,8 tn). Wir stellen die dort erhaltenen Grenzwerthe mit den jetzt berechneten zusammen.

Grenzwerthe von:	nach Beispiel 87:		oben gefunden:	
X_1	11,20	− 8,08	11,18	− 12,97
X_2	25,66	− 21,40	25,80	− 27,44
X_3	29,93	− 27,80	35,54	− 34,29
X_4	0	0	0	0
Z_1	− 14,82	− 74,10	− 14,82	− 73,57
Z_2	− 11,81	− 73,21	− 10,46	− 77,52
Z_3	− 5,25	− 76,71	− 2,24	− 85,71
Z_4	− 2,58	− 75,36	− 1,65	− 84,63
D_1	10,72	− 14,92	14,97	− 17,30
D_2	13,14	− 14,57	20,11	− 16,89
D_3	12,51	− 10,17	21,04	− 13,65
D_4	30,31	− 28,27	34,66	− 36,04
V_0	9,26	− 11,89	10,82	− 8,48
V_1	5,02	− 15,22	6,14	− 19,34
V_2	0,74	− 12,08	1,34	− 16,18
V_3	0,72	− 11,88	2,02	− 14,56
V_4	− 0,60	− 4,80	− 0,60	− 10,80
V	42,00	8,40	44,65	8,40
H	63,00	12,60	62,54	12,60.

Man sieht, dass bedeutende Differenzen entstehen können. Will man also bei Belastung durch bewegte Radlastzüge mit einer gleichmässig vertheilten bewegten Last rechnen, so ist dieselbe grösser zu wählen, als für die Gurtungen einfacher Balkenfachwerke genügend wäre. Im vorliegenden Falle würde das 1,5-fache nicht zu hoch gewesen sein, womit sich D_3 immer erst 18,57 gegen obige 21,04 ergeben

hätte, allerdings aber andre Beanspruchungen wieder viel zu gross geworden wären. Man thut also gerade bei Bogenfachwerken gut, im Falle von Eisenbahnbrücken mit den Radlastzügen selbst zu rechnen, womit selbst ohne Berücksichtigung der zweiten Richtung des Zuges I und etwaiger Alternativbelastungen wesentlich genauere Werthe als mit gleichmässig vertheilter bewegter Last entstehen. Auch die Ableitung von Formeln für Berechnung mit genauen Lastäquivalenten, wie wir sie für Balkenfachwerke gegeben haben, würde für Bogenfachwerke zwecklos sein, da ihre Verwendung der verschiedenen zu berücksichtigenden Fälle wegen hier wesentlich umständlicher als für Balkenfachwerke wäre.

Beispiel 89. Trapezbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 24$ m Spannweite sollen Bogenträger mit drei Gelenken nach der Anordnung Fig. 146 zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}7$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}8$ tn. Vom Eigengewicht kommen $g_x = 0{,}4$ tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und $g_s = 0{,}3$ tn auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte zu berechnen.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte gelten nach § 72, 4) die Gleichungen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_m &= -\,m\,\frac{\sigma - m}{h_m}\,\frac{g\lambda^2}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m &= [(m-1)(n-m+1) - \alpha\sigma]\,\frac{z_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m &= \left[\alpha\,\frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + 1\right]\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m &= -\left[\alpha\,\frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + \frac{g_x - g_s}{g}\right]\frac{g\lambda}{2}. \end{aligned}\right.$$

Dieselben nehmen mit $n = 2\sigma = 8$, $\lambda = 3$, $z_m = 3{,}16$, $\alpha = nh_0 : 2f = 4{,}5$, $g = 0{,}7$, $g_x = 0{,}4$, $g_s = 0{,}3$ folgende Formen an:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_m &= -\,3{,}15\,m\,\frac{4-m}{h_m}, \\ \mathfrak{Z}_m &= [(m-1)(9-m) - 18]\,\frac{3{,}32}{h_{m-1}}, \\ \mathfrak{D}_m &= \left[9\,\frac{4-m}{9-2m} - m + 1\right]\frac{1{,}05\,d_m}{h_{m-1}}, \\ \mathfrak{V}_m &= -\,1{,}05\left[9\,\frac{4-m}{9-2m} - m\right] - 0{,}15. \end{aligned}$$

Ausnahmen bilden die Beanspruchungen der Kämpferverticale und Scheitelverticale, für welche man nach A. 39, 10) 17) hat

$$(2)\qquad \mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_s}{2} - \frac{g l}{4}, \qquad \mathfrak{V}_\sigma = -\frac{\lambda g_x}{2}.$$

Wir erhalten folgende Stabkräfte in Tonnen:

			$\mathfrak{V}_0 = -3{,}75$
$\mathfrak{X}_1 = -2{,}70$	$\mathfrak{Z}_1 = -13{,}28$	$\mathfrak{D}_1 = 4{,}15$	$\mathfrak{V}_1 = -3{,}15$
$\mathfrak{X}_2 = -5{,}04$	$\mathfrak{Z}_2 = -10{,}43$	$\mathfrak{D}_2 = 3{,}05$	$\mathfrak{V}_2 = -1{,}83$
$\mathfrak{X}_3 = -6{,}30$	$\mathfrak{Z}_3 = -7{,}97$	$\mathfrak{D}_3 = 1{,}41$	$\mathfrak{V}_3 = -0{,}15$
$\mathfrak{X}_4 = 0$	$\mathfrak{Z}_4 = -6{,}64$	$\mathfrak{D}_4 = -6{,}39$	$\mathfrak{V}_4 = -0{,}60.$

Grenzbeanspruchungen. Nach § 73 sind die unteren Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung deren soeben berechnete Eigengewichtsbeanspruchungen, die oberen

$$(3)\qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m.$$

Weiter hat man die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung, da $h_0 < \frac{n+2}{n} f$ ist, nach § 73, 2) und § 19, 3)

$$(4)\qquad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m - \alpha \dfrac{\alpha - m + 1}{\alpha + m - 1} \dfrac{z_m}{h_{m-1}} \dfrac{p l}{4}, \\ Z_m = \dfrac{q+g}{g} \mathfrak{Z}_m - (Z_m), \end{cases}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen nach § 73, 4) und 19, 4)

$$(5)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(\gamma - 1)(m-1)^2}{\alpha - \gamma - m + 1} \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{p \lambda}{2}, \\ D_m = \dfrac{q+g}{g} \mathfrak{D}_m - (D_m), \end{cases}$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen, mit Ausnahme der Kämpferverticale und Scheitelverticale, nach § 73, 5) und § 19, 8)

$$(6)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{(\gamma - 1)(m-1)^2}{\alpha - \gamma - m + 1} \dfrac{p \lambda}{2}, \\ V_m = \dfrac{q+g}{g} \mathfrak{V}_m - (V_m) - \dfrac{p \lambda}{g} g_s, \end{cases}$$

wobei die eine Grenzbeanspruchung zur Unterscheidung von der andern mit einer Klammer versehen ist. Die Gleichungen 4) 5) 6) nehmen mit den gegebenen Zahlenwerthen und

$$q = g + p = 3{,}5, \qquad \gamma = h_0 : f = 1{,}125$$

folgende Formen an:

$$Z_m = \mathfrak{Z}_m - \frac{11-2m}{7-2m}\frac{229}{h_{m-1}}, \qquad Z_m = 6\mathfrak{Z}_m - (Z_m),$$

$$D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{(m-1)^2}{35-8m}\frac{d_m}{h_{m-1}}4{,}2, \quad D_m = 6\mathfrak{D}_m - (D_m),$$

$$V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{(m-1)^2}{35-8m}4{,}2, \qquad V_m = 6\mathfrak{V}_m - (V_m) - 3{,}6.$$

Wir erhalten nun nachstehende Grenzwerthe in Tonnen.

Für $m =$	1	2	3	4:
$X_m =$	− 13,50	− 25,20	− 31,50	0
$Z_m =$	− 66,40	− 53,90	− 44,75	− 38,52
$Z_m =$	− 13,28	− 8,68	− 3,07	− 1,32
$D_m =$	4,15	2,80	− 0,64	− 31,95
$D_m =$	20,75	15,50	9,10	− 6,39
$V_m =$	− 3,15	− 1,61	1,38	
$V_m =$	− 19,35	− 12,97	− 5,88.	

Für die Grenzbeanspruchungen der Kämpferverticale hat man nach A. 39, 9)

(7) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{pl}{4}, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0,$$

und für diejenigen der Scheitelverticale nach A. 39, 16)

(8) $$V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma - \frac{p\lambda}{2}, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma.$$

Diese Gleichungen liefern:

$$V_0 = -20{,}55 \qquad V_0 = -3{,}75$$
$$V_4 = -\ 4{,}8 \qquad V_4 = -0{,}6 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen sind ganz wie in Beispiel 87 bestimmt.

Beispiel 90. Trapezbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte bleiben wie im vorigen Beispiele bestimmt. Für die weitere Berechnung stellen wir einige Zahlenwerthe zusammen. Man hat

für

$m =$	1	2	3	4:
$h_m =$	3,5	2,5	1,5	0,5
$d_m =$	4,61	3,90	3,35	3,04
$c = (m-1)\lambda =$	0	3	6	9
$v = m\lambda =$	3	6	9	12
$z = \frac{m-1}{m-1+\alpha} l =$	0	4,36	7,38	9,6

Diese Werthe z entsprechen den Z_m.

Nach § 74 sind die unteren Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung deren Beanspruchungen durch Eigengewicht allein, für die oberen hat man bei Belastung durch Zug I (Fig. 23 u. 24) von 0 bis d, Rad O bei v,

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m - \left[(\sigma - m) \sum_0^v Pa + m \sum_v^d P(d-a)\right] \frac{2}{n h_m}.$$

Die Werthe der $\sum$ hierin wie in anderen Ausdrücken der Stabkräfte können berechnet oder aus der Tabelle in Beispiel 6 entnommen werden. Da wir im vorletzten Beispiele den ersteren Weg eingeschlagen haben, wollen wir hier den letzteren wählen. Die Zug I entsprechenden Grenzwerthe setzen wir für die erste Zugrichtung an und fügen die für die zweite Zugrichtung entstehenden in Klammer bei. Man wird dann, wie schon bei den berechneten Balkenfachwerken, sehen, dass die Berücksichtigung der zweiten Zugrichtung entbehrt werden konnte.

$$X_1 = -2{,}70 - (3 \,.\, 30{,}2 + 1 \,.\, 89{,}4) \frac{1}{14} = -15{,}56 \text{ tn } (-15{,}15),$$

$$X_2 = -5{,}04 - (2 \,.\, 80{,}7 + 2 \,.\, 32{,}4) \frac{1}{10} = -27{,}66 \text{ tn } (-27{,}66),$$

$$X_3 = -6{,}30 - (1 \,.\, 143{,}7 + 3 \,.\, 10{,}2) \frac{1}{6} = -35{,}35 \text{ tn } (-36{,}30),$$

$$X_4 = 0 - (0 \,.\, 226 + 4 \,.\, 0) \frac{1}{2} = 0 \text{ tn } (0).$$

Die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung ergeben sich nach § 74, 5), 6) wie folgt:

Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei c (mitunter Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c),

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + \left[(n - \alpha + 1 - m) \sum_0^c Pa \right.$$

$$\left. + (\alpha - 1 + m) \sum_c^z P(z-a)\right] \frac{z_m}{l h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von z bis l, Rad O bei d,

$$(3)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - \Big[(\alpha - 1 + m) \sum_z^d P(a-z) + (\alpha + 1 - m) \sum_d^l P(l-a)\Big] \frac{z_m}{l h_{m-1}}.$$

Man erkennt sofort, dass im vorliegenden Falle für die ersten Grenzwerthe die in Klammer erwähnte Belastung massgebend ist, da mit Rücksicht auf die oben gegebenen c, z und die Entfernung 1,3 der nächsten Räder von Rad O auch bei Belastung durch Zug I nur ganz geringfügige Beiträge durch die Lasten von c bis z geliefert werden. Wir erhalten die ersten Grenzwerthe:

$$Z_1 = -13{,}28 + \frac{3{,}5 \,.\, 3{,}16}{24 \,.\, 4{,}5}\; 0 = -13{,}18 \text{ tn},$$
$$Z_2 = -10{,}43 + \frac{2{,}5 \,.\, 3{,}16}{24 \,.\, 3{,}5}\; 30{,}6 = -7{,}55 \text{ „}$$
$$Z_3 = -7{,}97 + \frac{1{,}5 \,.\, 3{,}16}{24 \,.\, 2{,}5}\; 93{,}4 = -0{,}59 \text{ „}$$
$$Z_4 = -6{,}64 + \frac{0{,}5 \,.\, 3{,}16}{24 \,.\, 1{,}5}\; 170{,}4 = 0{,}84 \text{ „},$$

und die zweiten Grenzwerthe:

$$Z_1 = -13{,}28 - [4{,}5 \,.\, 226 + 4{,}5 \,.\, 173] \frac{3{,}16}{24 \,.\, 4{,}5} = -65{,}82 \text{ tn } (-65{,}82),$$
$$Z_2 = -10{,}43 - [5{,}5(6 \,.\, 7{,}64 + 6 \,.\, 6{,}34 + 4 \,.\, 5{,}14 + 5 \,.\, 2{,}14) + 3{,}5 \,.\, 173] \frac{3{,}16}{24 \,.\, 3{,}5} = -57{,}03 \text{ tn } (-52{,}25),$$
$$Z_3 = -7{,}97 - [6{,}5(6 \,.\, 4{,}62 + 6 \,.\, 3{,}32 + 4 \,.\, 2{,}12) + 2{,}5 \,.\, 173] \frac{3{,}16}{24 \,.\, 2{,}5} = -49{,}96 \text{ tn } (-45{,}96),$$
$$Z_4 = -6{,}64 - [7{,}5\,(6 \,.\, 2{,}4 + 6 \,.\, 1{,}1) + 1{,}5 \,.\, 173] \frac{3{,}16}{24 \,.\, 1{,}5} = -43{,}02 \text{ tn } (40{,}74).$$

Für die Diagonalen und Verticalen, abgesehen von der Kämpferverticale und Scheitelverticale, hat man nach § 74, 7)—10) folgende Grenzbeanspruchungen:

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(4)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{\alpha - \sigma}{\alpha - m} \frac{2 d_m}{l h_{m-1}} \sum_0^c P a,$$

$$(5)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\alpha - \sigma}{\alpha - m} \frac{2}{l} \sum_0^c P a,$$

Belastung durch Zug II von v bis d, Vorderrad O bei v,

(6) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{\alpha}{\alpha - m} \frac{2 d_m}{l h_{m-1}} \sum_v^d P(d-a),$$

(7) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{\alpha}{\alpha - m} \frac{2}{l} \sum_v^d P(d-a).$$

Diese Gleichungen liefern in Tonnen für die Diagonalen:

$$D_1 = 4{,}15 - \frac{4{,}61 \,.\, 0}{24 \,.\, 3{,}5 \,.\, 4{,}5} = 4{,}15$$

$$D_2 = 3{,}05 - \frac{3{,}90 \,.\, 30{,}6}{24 \,.\, 2{,}5 \,.\, 3{,}5} = 2{,}48$$

$$D_3 = 1{,}41 - \frac{3{,}85 \,.\, 93{,}4}{24 \,.\, 1{,}5 \,.\, 2{,}5} = -\, 2{,}09$$

$$D_4 = -\, 6{,}39 - \frac{3{,}04 \,.\, 170{,}4}{24 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1{,}5} = -\, 35{,}17,$$

$$D_1 = 4{,}15 + \frac{9 \,.\, 4{,}61 \,.\, 170{,}4}{24 \,.\, 3{,}5 \,.\, 4{,}5} = 22{,}85$$

$$D_2 = 3{,}05 + \frac{9 \,.\, 3{,}90 \,.\, 93{,}4}{24 \,.\, 2{,}5 \,.\, 3{,}5} = 18{,}66$$

$$D_3 = 1{,}41 + \frac{9 \,.\, 3{,}85 \,.\, 30{,}6}{24 \,.\, 1{,}5 \,.\, 2{,}5} = 11{,}66$$

$$D_4 = -\, 6{,}39 + \frac{9 \,.\, 3{,}04 \,.\, 0}{24 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1{,}5} = -\, 6{,}39,$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = -\, 3{,}15 + \frac{0}{24 \,.\, 3{,}5} = -\, 3{,}15$$

$$V_2 = -\, 1{,}83 + \frac{30{,}6}{24 \,.\, 2{,}5} = -\, 1{,}32$$

$$V_3 = -\, 0{,}15 + \frac{93{,}4}{24 \,.\, 1{,}5} = 2{,}44,$$

$$V_1 = -\, 3{,}15 - \frac{9 \,.\, 170{,}4}{24 \,.\, 3{,}5} = -\, 21{,}41$$

$$V_2 = -\, 1{,}83 - \frac{9 \,.\, 93{,}4}{24 \,.\, 2{,}5} = -\, 15{,}84$$

$$V_3 = -\, 0{,}15 - \frac{9 \,.\, 30{,}6}{24 \,.\, 1{,}5} = -\, 7{,}80.$$

Für die Kämpferverticale und Scheitelverticale treten die unteren Grenzbeanspruchungen für Eigengewicht allein ein, die oberen ergeben sich nach A. 39, 8) 15) wie folgt:

Belastung durch Zug II von 0 bis d, Vorderrad O bei 0,

$$(8) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{2}{l} \sum_0^d P(d-a),$$

Belastung durch Zug II von c bis d, Vorderrad O bei d,

$$(9) \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma - \frac{1}{\lambda} \sum_c^d P(a-c).$$

Wir erhalten hieraus

$$V_0 = -3{,}75 - \frac{257}{12} = -25{,}17 \text{ tn},$$

$$V_4 = -0{,}6 \quad - \frac{6}{3}(3 + 1{,}7 + 0{,}4) = -10{,}8 \text{ tn}.$$

Die Stützenreactionen sind ganz wie im vorletzten Beispiele bestimmt.

Damit könnte die Berechnung als abgeschlossen gelten. Wir wollen jedoch, wie in anderen Fällen, um Vergleiche zu ermöglichen, noch etwas weiter gehen. Da für die Diagonalen und Verticalen nach § 72

$$z = \frac{(m-1)(\alpha - m)}{n\alpha - 2\alpha + n - m},$$

so hat man für $m = 1$, $z = 0$ und es ist wahrscheinlich, dass bei Belastung durch Zug I von 0 bis d, Rad O bei v, noch etwas ungünstigere zweite Grenzwerthe von D_1, V_1 als mit Zug II entstehen. Allgemein sind nach § 74, 3) 4)

$$(10) \qquad D_1 = \mathfrak{D}_1 + \left[(\sigma - 1) \sum_0^v Pa + \sum_v^d P(d-a)\right] \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{2d_1}{lh_0},$$

$$(11) \qquad V_1 = \mathfrak{V}_1 - \left[(\sigma - 1) \sum_0^v Pa + \sum_v^d P(d-a)\right] \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{2}{l},$$

woraus für die erwähnte Belastung:

$$D_1 = \quad 4{,}15 + (3 \,.\, 30{,}2 + 89{,}4) \frac{4{,}5 \,.\, 4{,}61}{42 \,.\, 4{,}5} = 23{,}91 \text{ tn } (23{,}28),$$

$$V_1 = -3{,}15 - (3 \,.\, 30{,}2 + 89{,}4) \frac{4{,}5}{42} = -22{,}44 \text{ tn } (-21{,}82),$$

gegen oben erhaltene 22,85 und — 21,41 tn. Da ferner

$$\text{für } m = \frac{n}{2} = \sigma \qquad z = \frac{l}{2} = d,$$

so ist wahrscheinlich, dass der erste Grenzwerth von D_σ bei Belastung durch Zug I von 0 bis d, Rad O bei c, noch etwas ungünstiger als mit Zug II wird. Nach § 74, 3) ist allgemein

$$(12) \qquad D_\sigma = \mathfrak{D}_\sigma - \left[\sum_0^c Pa + (\sigma - 1) \sum_c^d P(d-a) \right] \frac{2 d_\sigma}{l h_{\sigma-1}},$$

und hieraus für die angeführte Belastung

$$D_4 = -6{,}39 - (143{,}7 + 3 \, . \, 10{,}2) \frac{3{,}04}{12 \, . \, 1{,}5} = -35{,}83 \text{ tn } (-36{,}79),$$

gegen oben erhaltene — 35,17 tn.

Bemerkungen. Wir stellen die hier erhaltenen Grenzwerthe mit denjenigen zusammen, welche sich im vorigen Beispiele ergeben haben. Das dort gewählte p würde bei Berechnung der Gurtungen einfacher Balkenfachwerke an Stelle der oben verwendeten Radlastzüge gesetzt werden können. Der Vergleich bestätigt das am Schlusse des vorletzten Beispiels Gesagte, wenn auch die Differenzen nicht ganz so gross wie dort sind.

Grenzwerthe von:	nach Beispiel 89:		oben gefunden:	
X_1	— 13,50 und	— 2,70	— 15,56 und	— 2,70
X_2	— 25,20	— 5,04	— 27,66	— 5,04
X_3	— 31,50	— 6,30	— 35,35	— 6,30
X_4	0	0	0	0
Z_1	— 66,40	— 13,28	— 65,81	— 13,28
Z_2	— 53,90	— 8,68	— 57,03	— 7,55
Z_3	— 44,75	— 3,07	— 49,96	— 0,59
Z_4	— 38,52	— 1,32	— 43,02	0,84
D_1	20,75	4,15	23,91	4,15
D_2	15,50	2,80	18,66	2,48
D_3	9,10	— 0,64	11,66	— 2,09
D_4	— 31,93	— 6,39	— 36,79	— 6,39
V_0	— 20,55	— 3,75	— 25,17	— 3,75
V_1	— 19,35	— 3,15	— 22,44	— 3,15
V_2	— 12,97	— 1,61	— 15,84	— 1,32
V_3	— 4,73	1,39	— 7,80	2,44
V_4	— 4,89	— 0,60	— 10,80	— 0,60.

Beispiel 91. Halbparabelbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für die Bogenträger mit drei Gelenken einer Brücke wurden bei allgemeiner Anordnung nach Fig. 147 folgende Voraussetzungen

gemacht*. Spannweite $l = 40$ m, Felderzahl $n = 2\sigma = 20$, Höhe des Obergurts über den Kämpfergelenken $h_0 = 5{,}5$ m, Pfeil des parabolischen Untergurts $f = 5$ m, ferner per laufenden Meter Träger Eigengewicht $g = 1{,}2$ tn, Verkehrslast $p = 2$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_x = 0{,}6$ tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_x = 0{,}6$ tn auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Formberechnung. Ordinate des Knotenpunkts m im Untergurte und Länge der anstossenden Verticale nach § 75, 2):

$$\mathfrak{z}_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2} = 0{,}05\, m\,(20-m),$$

$$h_m = h_0 - \mathfrak{z}_m = 5{,}5 - \mathfrak{z}_m,$$

Länge des Untergurtstabes und der Diagonale im Felde m:

$$z_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_{m-1} - h_m)^2}, \qquad d_m = \sqrt{\lambda^2 + h_m^2}.$$

Diese Gleichungen liefern mit $m = 1$ bis $m = 10$ folgende Werthe in Metern:

$\mathfrak{z}_1 = 0{,}95$	$h_1 = 4{,}55$	$z_1 = 2{,}214$	$d_1 = 4{,}970$
$\mathfrak{z}_2 = 1{,}80$	$h_2 = 3{,}70$	$z_2 = 2{,}173$	$d_2 = 4{,}206$
$\mathfrak{z}_3 = 2{,}55$	$h_3 = 2{,}95$	$z_3 = 2{,}136$	$d_3 = 3{,}564$
$\mathfrak{z}_4 = 3{,}20$	$h_4 = 2{,}30$	$z_4 = 2{,}103$	$d_4 = 3{,}048$
$\mathfrak{z}_5 = 3{,}75$	$h_5 = 1{,}75$	$z_5 = 2{,}074$	$d_5 = 2{,}658$
$\mathfrak{z}_6 = 4{,}20$	$h_6 = 1{,}30$	$z_6 = 2{,}050$	$d_6 = 2{,}385$
$\mathfrak{z}_7 = 4{,}55$	$h_7 = 0{,}95$	$z_7 = 2{,}030$	$d_7 = 2{,}214$
$\mathfrak{z}_8 = 4{,}80$	$h_8 = 0{,}70$	$z_8 = 2{,}016$	$d_8 = 2{,}119$
$\mathfrak{z}_9 = 4{,}95$	$h_9 = 0{,}55$	$z_9 = 2{,}006$	$d_9 = 2{,}074$
$\mathfrak{z}_{10} = 5{,}00$	$h_{10} = 0{,}50$	$z_{10} = 2{,}001$	$d_{10} = 2{,}062$.

* Eine andere Berechnung dieser Träger, ohne Formeln, unter gleichen Voraussetzungen (welche abgesehen von der Annahme eines Mittelgelenks der Theissbrücke bei Szegedin entsprechen) findet sich in *Ritters* „Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen", Hannover 1873 S. 126—152. *Ritter* rechnet mit vorausbestimmten Knotenpunktslasten, wodurch sich einige Abweichungen unsrer Resultate von den seinigen erklären. (Vergl. § 12 d).

In den Gleichungen für Träger beliebiger Gurtungsformen hat man nach § 66, 9) bei horizontaler X-Gurtung in unserm Falle

$$w_d = w_v = h_0 = 5{,}5, \qquad \zeta = \delta = \omega = \frac{n h_0}{2f} = 11.$$

Eigengewicht allein. Nach § 75, 6) gelten für die X-Gurtung und Diagonalen in allen Feldern:

$$\mathfrak{X}_m = 0, \qquad \mathfrak{D}_m = 0.$$

Die Eigengewichtsbeanspruchung der Verticalen ist

$$\mathfrak{V}_m = -\lambda g_x = -1{,}2 \text{ tn},$$

jedoch bilden Ausnahmen und folgen aus A. 39, 13) 17):

$$\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}_{10} = -\frac{\lambda g_x}{2} = -0{,}6 \text{ tn}.$$

Für die Z-Gurtung hat man

$$\mathfrak{Z}_m = -\frac{gl}{8f} n z_m = -24 z_m,$$

woraus mit den oben gegebenen z_m in Tonnen:

$$\mathfrak{Z}_1 = -53{,}14 \qquad \mathfrak{Z}_6 = -49{,}20$$
$$\mathfrak{Z}_2 = -52{,}15 \qquad \mathfrak{Z}_7 = -48{,}72$$
$$\mathfrak{Z}_3 = -51{,}26 \qquad \mathfrak{Z}_8 = -48{,}38$$
$$\mathfrak{Z}_4 = -50{,}47 \qquad \mathfrak{Z}_9 = -48{,}14$$
$$\mathfrak{Z}_5 = -49{,}78 \qquad \mathfrak{Z}_{10} = -48{,}02.$$

Die Verticalreaction und Horizontalreaction der Kämpfer sind nach § 67, 17)

$$\mathfrak{V} = \frac{gl}{2} = 24 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{gl^2}{8f} = 48 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Nach § 75, 7) sind die beiden Grenzbeanspruchungen der Obergurtstäbe gleich gross und von verschiedenen Vorzeichen. Für den Absolutwerth hat man

$$X_m = \frac{m(\sigma - m)(n - m)}{(3\sigma - m) h_m} \frac{p\lambda^2}{2} = \frac{4m(10 - m)(20 - m)}{(30 - m) h_m},$$

also mit $m = 1$ bis $m = 10$ in Tonnen:

$$X_1 = 5{,}19 \qquad X_6 = 43{,}08$$
$$X_2 = 11{,}12 \qquad X_7 = 49{,}98$$
$$X_3 = 17{,}93 \qquad X_8 = 49{,}87$$
$$X_4 = 25{,}69 \qquad X_9 = 34{,}20$$
$$X_5 = 34{,}29 \qquad X_{10} = 0.$$

Die Grenzbeanspruchungen des Untergurts sind nach § 70, 3) und § 19, 3), wenn im Ausdrucke der zweiten Grenzbeanspruchung (Z_m) den Werth der ersten bedeutet:

$$Z_m = \mathfrak{Z}_m - \frac{\xi - m + 1}{\xi + m - 1} \frac{\xi z_m}{h_{m-1}} \frac{pl}{4} = \mathfrak{Z}_m - \frac{12 - m}{10 + m} \frac{z_m}{h_{m-1}} 220,$$

$$Z_m = \frac{q + g}{g} \mathfrak{Z}_m - (Z_m) = \frac{11}{3} \mathfrak{Z}_m - (Z_m).$$

Diese Gleichungen liefern in Tonnen:

$Z_1 = -141,70$	$Z_1 = -53,14$
$Z_2 = -139,71$	$Z_2 = -51,51$
$Z_3 = -139,19$	$Z_3 = -48,77$
$Z_4 = -140,09$	$Z_4 = -44,97$
$Z_5 = -142,36$	$Z_5 = -40,16$
$Z_6 = -145,84$	$Z_6 = -34,56$
$Z_7 = -149,76$	$Z_7 = -28,88$
$Z_8 = -152,13$	$Z_8 = -25,27$
$Z_9 = -147,69$	$Z_9 = -28,83$
$Z_{10} = -128,06$	$Z_{10} = -48,02.$

Werden für die Diagonalen gesetzt

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \qquad \varphi = \frac{m - \varepsilon}{n} 2f = \frac{m - \varepsilon}{2},$$

$$\chi = \frac{n - m + \varepsilon}{n} 2f = 10 - \frac{m - \varepsilon}{2}, \quad \psi = \frac{n - m}{m} \frac{m - \varepsilon}{n} 2f = \frac{20 - m}{m} \frac{m - \varepsilon}{2},$$

so ergeben sich	ε	φ	χ	ψ
für $m = 1$	$-4,789$	2,89	7,11	54,99
2	$-4,354$	3,18	6,82	28,59
3	$-3,933$	3,47	6,53	19,64
4	$-3,538$	3,77	6,23	15,08
5	$-3,182$	4,09	5,91	12,27
6	$-2,889$	4,44	5,56	10,37
7	$-2,712$	4,85	5,14	9,02
8	$-2,800$	5,40	4,60	8,10
9	$-3,667$	6,33	3,67	7,74
10	$-10,000$	10,00	0	10,00.

Nach § 75, 8) sind die zwei Grenzbeanspruchungen jeder Diagonale

gleich gross und von verschiedenen Vorzeichen. Eine Grenzbeanspruchung ist ausgedrückt: für die Diagonalen 1 bis 6, weil $w_d = 5{,}5$ nicht zwischen χ und ψ, aber zwischen ψ und φ liegt, nach § 70, 7)

$$D_m = \frac{\delta - m + \varepsilon}{\delta + m - \varepsilon} \frac{\delta d_m}{\varepsilon h_{m-1}} \frac{pl}{4} = \frac{11 - m + \varepsilon}{11 + m - \varepsilon} \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}} 220,$$

für die Diagonalen 7 und 8, weil w_d sowohl zwischen χ und ψ als zwischen ψ und φ liegt, nach § 70, 5) 17)

$$D_m = \frac{[(n-m)(m-\varepsilon) - m\delta]^2}{n - m - \delta - \varepsilon(n-1)} \frac{d_m}{m - \varepsilon + \delta} \frac{p\lambda}{2 h_m} = \frac{[(10-m)(m-\varepsilon) - 11m]^2}{(9 - m - 19\varepsilon)(11 + m - \varepsilon)} \frac{d_m}{h_m} 2,$$

für die Diagonalen 9 und 10, weil w_d zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ liegt, nach § 70, 6)

$$D_m = \frac{(n - m - \delta + \varepsilon)(m-1)^2}{n - m - \delta - \varepsilon(n-1)} \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{p\lambda}{2} = \frac{(9 - m + \varepsilon)(m-1)^2}{9 - m - 19\varepsilon} \frac{d_m}{h_{m-1}} 2.$$

Demgemäss erhalten wir die Absolutwerthe beider Grenzbeanspruchungen der Diagonalen in Tonnen:

$$D_1 = \frac{5{,}211 \,.\, 4{,}970 \,.\, 220}{16{,}789 \,.\, 4{,}789 \,.\, 5{,}5} = 12{,}88$$

$$D_2 = \frac{4{,}646 \,.\, 4{,}202 \,.\, 220}{17{,}354 \,.\, 4{,}355 \,.\, 4{,}55} = 12{,}50$$

$$D_3 = \frac{4{,}067 \,.\, 3{,}564 \,.\, 220}{17{,}933 \,.\, 3{,}933 \,.\, 3{,}7} = 12{,}22$$

$$D_4 = \frac{3{,}462 \,.\, 3{,}048 \,.\, 220}{18{,}538 \,.\, 3{,}538 \,.\, 2{,}95} = 12{,}00$$

$$D_5 = \frac{2{,}818 \,.\, 2{,}658 \,.\, 220}{19{,}182 \,.\, 3{,}182 \,.\, 2{,}3} = 11{,}74$$

$$D_6 = \frac{2{,}111 \,.\, 2{,}385 \,.\, 220}{19{,}889 \,.\, 2{,}889 \,.\, 1{,}75} = 11{,}01$$

$$D_7 = \frac{(13 \,.\, 9{,}714 - 11 \,.\, 7)^2 \, 2{,}124 \,.\, 2}{(2 + 19 \,.\, 2{,}714)\, 20{,}714 \,.\, 0{,}95} = 10{,}59$$

$$D_8 = \frac{(12 \,.\, 10{,}8 - 11 \,.\, 8)^2 \,.\, 2{,}119 \,.\, 2}{(1 + 19 \,.\, 2{,}8)\, 21{,}8 \,.\, 0{,}70} = 9{,}29$$

$$D_9 = \frac{3{,}667 \,.\, 64 \,.\, 2{,}074 \,.\, 2}{19 \,.\, 3{,}667 \,.\, 0{,}70} = 19{,}96$$

$$D_{10} = \frac{11 \,.\, 81 \,.\, 2{,}062 \,.\, 2}{189 \,.\, 0{,}55} = 35{,}35.$$

Werden für die Verticalen gesetzt

$$\nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}, \qquad \varphi = \frac{m - \nu}{n} 2f = \frac{m - \nu}{2},$$

$$\chi = \frac{n - m + \nu}{n} 2f = 10 - \frac{m - \nu}{2}, \quad \psi = \frac{n - m}{m} \frac{m - \nu}{n} 2f = \frac{20 - m}{m} \frac{m - \nu}{2},$$

so ergeben sich		ν	φ	χ	ψ
für $m =$	1	— 5,354	3,18	6,82	60,34
	2	— 4,933	3,47	6,53	31,19
	3	— 4,538	3,77	6,23	21,36
	4	— 4,182	4,09	5,91	16,36
	5	— 3,889	4,44	5,56	13,33
	6	— 3,714	4,86	5,14	11,33
	7	— 3,800	5,40	4,60	10,03
	8	— 4,667	6,33	3,67	9,50
	9	— 11,000	10,00	0	12,22.

Als Ausdruck einer Grenzbeanspruchung haben wir: für die Verticalen 1 bis 5, weil $w_v = 5{,}5$ nicht zwischen χ und ψ, aber zwischen ψ und φ liegt, nach § 70, 9)

$$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{\omega - m + \nu}{\omega + m - \nu} \frac{\omega}{\nu} \frac{pl}{4} = -1{,}2 - \frac{11 - m + \nu}{11 + m - \nu} \frac{220}{\nu},$$

für die Verticalen 6 und 7, weil w_v sowohl zwischen χ und ψ als zwischen ψ und φ liegt, nach § 70, 9)

$$V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{[(n-m)(m-\nu) - m\omega]^2}{n - m - \omega - \nu(n-1)} \frac{1-\nu}{m - \nu + \omega} \frac{p\lambda}{2\nu}$$
$$= -1{,}2 - \frac{[(20-m)(m-\nu) - 11m]^2 (1-\nu)}{(9 - m - 19\nu)(11 + m - \nu)\nu} 2,$$

für die Verticalen 8 und 9, weil w_v zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ liegt, nach § 70, 10)

$$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{(n - m - \omega + \nu)(m-1)^2}{n - m - \omega - \nu(n-1)} \frac{p\lambda}{2} = -1{,}2 - \frac{(9 - m + \nu)(m-1)^2}{9 - m - 19\nu} 2.$$

Die zweite Grenzbeanspruchung ist nach § 75, 8) in allen drei Fällen, wenn (V_m) die erste bezeichnet,

$$V_m = -(V_m) - (p + 2g_x)\lambda = -(V_m) - 6{,}4.$$

Diese Gleichungen liefern folgende Grenzwerthe in Tonnen:

$$V_1 = -1{,}2 - \frac{4{,}646 \,.\, 220}{17{,}354 \,.\, 5{,}354} = 9{,}81 \qquad V_1 = -16{,}21$$

$$V_2 = -1{,}2 - \frac{4{,}067 \,.\, 220}{17{,}933 \,.\, 4{,}933} = 8{,}94 \qquad V_2 = -15{,}34$$

$$V_3 = -1{,}2 - \frac{3{,}462 \,.\, 220}{18{,}538 \,.\, 4{,}538} = 7{,}85 \qquad V_3 = -14{,}25$$

$$V_4 = -1{,}2 - \frac{2{,}818 \,.\, 220}{19{,}182 \,.\, 4{,}182} = 6{,}53 \qquad V_4 = -12{,}93$$

$$V_5 = -1,2 - \frac{2,111 \cdot 220}{19,889 \cdot 3,889} = 4,80 \qquad V_5 = -11,20$$

$$V_6 = -1,2 - \frac{69,996^2 \cdot 4,714 \cdot 2}{73,566 \cdot 20,714 \cdot 3,714} = -9,35 \qquad V_6 = 2,95$$

$$V_7 = -1,2 - \frac{63,4^2 \cdot 4,8 \cdot 2}{74,2 \cdot 21,8 \cdot 3,8} = -7,48 \qquad V_7 = 1,08$$

$$V_8 = -1,2 + \frac{3,667 \cdot 49 \cdot 2}{89,673} = 2,80 \qquad V_8 = -9,20$$

$$V_9 = -1,2 + \frac{11 \cdot 64}{209} = 5,54 \qquad V_9 = -11,94.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Kämpferverticalen sind nach A. 39, 12)

$$V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{n}{3n-2}\frac{pl}{2} = -14,39 \text{ tn},$$

$$V_0 = \mathfrak{V}_0 + \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{3n-2}\frac{pl}{2} = 11,19 \text{ tn},$$

und diejenigen der Scheitelverticale nach A. 39, 16)

$$V_{10} = \mathfrak{V}_{10} - \frac{pl}{2} = -2,6 \text{ tn}, \qquad V_{10} = \mathfrak{V}_{10} = -0,6 \text{ tn}.$$

Für die oberen Grenzwerthe der Verticalreaction und Horizontalreaction der Stützen schliesslich hat man nach § 67, 14) 17) mit $q = g + p = 3,2$ tn

$$V = \frac{ql}{2} = 64 \text{ tn}, \qquad H = \frac{ql^2}{8f} = 128 \text{ tn},$$

während die unteren Grenzwerthe für Eigengewicht allein eintreten. Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt. Dieselben wurden in Fig. 148 für eine Trägerhälfte bei ihren Stäben eingeschrieben.

Aufgabe 39. Kämpferverticalen und Scheitelverticalen von Bogenfachwerken.

Für die in Fig. 149—152 angedeuteten Kämpferverticalen und Scheitelverticalen des symmetrischen Bogenfachwerks mit drei Gelenken die Beanspruchungen bei beliebiger Belastung und die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge festzustellen, wenn die Fahrbahnlast für Fig. 149 und 151 auf die Knotenpunkte des Obergurts, für Fig. 150 und 152 auf diejenigen des Untergurts wirkt.

Kämpferverticale Fig. 149, 150. Fürs Gleichgewicht am Kämpfergelenke 0 bestehen die Bedingungsgleichungen

$$H \pm Z_1 \frac{\lambda}{z_1} = 0, \qquad V \pm V_0 - K_s + Z_1 \frac{\mathfrak{z}_1}{z_1} = 0,$$

sodass allgemein

$$(1) \qquad \pm V_0 = K_s + H \frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda} - V.$$

Für beliebige Belastung hat man nach § 66, 5) 8) als Einfluss der Verkehrslast

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \qquad K_s = 0,$$

$$H = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\right],$$

und durch Substitution in 1) mit den Bezeichnungen

$$(2) \qquad \xi_1 = \frac{n}{2f}\mathfrak{z}_1, \qquad z = \frac{l}{\xi_1 + 1}, \qquad l = n\lambda$$

die Beanspruchung unsrer Kämpferverticale

$$(3) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \mp \frac{\xi_1 + 1}{l} \sum_0^d P(z-a) \pm \frac{\xi_1 - 1}{l} \sum_d^l P(l-a),$$

worin $\mathfrak{V}_0$ die Beanspruchung durch das Eigengewicht allein bedeutet.

Der Knotenpunkt v liegt in allen praktischen Fällen (sofern überhaupt Kämpferverticalen vorhanden sind) für Fig. 149 oberhalb, für Fig. 150 unterhalb der Verbindungsgeraden der beiden ersten Gelenke oder doch auf derselben; alsdann sind $\xi_1 \geq 1$, $z \leq d$, die Influenzlinie für V_0 verläuft nach 3) wie in Fig. 153 und es treten folgende Grenzbeanspruchungen für bewegte Radlastzüge ein:

Belastung durch Zug II von 0 bis z, Vorderrad O bei 0,

$$(4) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \mp \frac{\xi_1 + 1}{l} \sum_0^z P(z-a),$$

Belastung durch Zug I von z bis l, Rad O bei d,

$$(5) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \frac{\xi_1 + 1}{l} \sum_z^d P(a-z) \pm \frac{\xi_1 - 1}{l} \sum_0^l P(l-a).$$

Die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last ergeben sich aus Fig. 153 nach § 12, c) oder aus 4) 5) mit $P = z da$

$$(6) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \mp \frac{1}{\xi_1 + 1}\frac{pl}{2}, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \xi_1 \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1}\frac{pl}{4}.$$

Soll das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gelten, so erhält man aus 1) mit

$$V = \frac{gl}{2}, \qquad H = \frac{gl^2}{8f}, \qquad K_z = \frac{\lambda g_z}{2}$$

für die Beanspruchung durch Eigengewicht allein

(7) $$\pm \mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_z}{2} - \left(1 - \frac{\xi_1}{2}\right) \frac{gl}{2}.$$

Betrachten wir noch zwei spezielle Fälle.

Sind die beiden ersten Gelenke und Knotenpunkt v wie beim *Trapezträger* durch eine gerade Gurtung verbunden, dann hat man

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{2f}{n}, \qquad \xi_1 = 1, \qquad z = \frac{l}{2} = d,$$

womit nach 3) bei beliebiger Belastung

(8) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 \mp \frac{2}{l} \sum_0^d P(d-a).$$

Die obere Grenzbeanspruchung folgt für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von 0 bis d, Vorderrad O bei 0, aus 8), für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus

(9) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 \mp \frac{pl}{4},$$

während die untere Grenzbeanspruchung in beiden Fällen für Eigengewicht allein eintritt. Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewicht wird

(10) $$\pm \mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_z}{2} - \frac{gl}{4}.$$

Sind die beiden ersten Gelenke und Knotenpunkt v wie beim *Halbparabelträger* durch eine parabolische Gurtung verbunden, so hat man

(11) $$\mathfrak{z}_1 = \frac{n-1}{n^2} 4f, \qquad \xi_1 = 2\,\frac{n-1}{n}, \qquad z = \frac{n}{3n-2} l,$$

womit z. B. die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last

(12) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 \mp \frac{n}{3n-2} \frac{pl}{2}, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{3n-2} \frac{pl}{2},$$

und die Beanspruchung für ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht allein

(13) $$\mathfrak{V}_0 = \mp \frac{\lambda g_x}{2}.$$

Scheitelverticale Fig. 149, 150. Das Gleichgewicht am Scheitelknotenpunkte der X-Gurtung verlangt

$$(14) \qquad X_\sigma = 0, \qquad V_\sigma \pm K_x = 0,$$

sodass bei beliebiger Belastung

$$(15) \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma \mp \frac{1}{\lambda} \sum_c^d P(a - c).$$

Die obere Grenzbeanspruchung ergibt sich für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von c bis d, Vorderrad O bei d, aus 15), für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus

$$(16) \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma \mp \frac{p\lambda}{2},$$

während die untere Grenzbeanspruchung in beiden Fällen für Eigengewicht allein eintritt. Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewicht ist

$$(17) \qquad \mathfrak{V}_\sigma = \mp \frac{\lambda g_x}{2}.$$

Kämpferverticale Fig. 151, 152. Fürs Gleichgewicht am Kämpferknotenpunkte der Z-Gurtung hat man

$$(18) \qquad Z_1 = 0, \qquad V_0 \mp K_z = 0,$$

wonach für beliebige Belastung

$$(19) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \frac{1}{\lambda} \sum_0^v P(v - a).$$

Die obere Grenzbeanspruchung folgt für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von 0 bis v, Vorderrad O bei 0, aus 19), für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus

$$(20) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \frac{p\lambda}{2},$$

während die untere Grenzbeanspruchung in beiden Fällen für Eigengewicht allein eintritt. Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewichte ist

$$(21) \qquad \mathfrak{V}_\sigma = \pm \frac{\lambda g_z}{2}.$$

Scheitelverticale Fig. 151, 152. Die Gleichgewichtsbedingungen für das Scheitelgelenke lauten, wenn V_s die Verticalcomponente des Gelenkdrucks bedeutet,

$$H \mp X_\sigma \frac{\lambda}{x_\sigma} = 0, \qquad V_s \pm V_\sigma + K_x \mp \frac{f - \mathfrak{x}_{\sigma-1}}{x_\sigma} X_\sigma = 0,$$

sodass allgemein

$$(22)\qquad \mp V_\sigma = K_x - \frac{f - \mathfrak{z}_{\sigma-1}}{\lambda} H + V_s.$$

Für beliebige Belastung hat man von der Verkehrslast herrührend

$$V_s = V - \sum_0^d P = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) - \sum_0^d P, \qquad K_x = 0,$$

H wie im ersten Falle. Wir erhalten damit aus 22) bei den Bezeichnungen

$$(23)\qquad l = 2\sigma\lambda, \qquad \beta = \sigma - \frac{\sigma}{f}\mathfrak{z}_{\sigma-1}$$

für unsre Scheitelverticale

$$(24)\qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma \pm \frac{1+\beta}{l}\sum_0^d Pa \pm \frac{1-\beta}{l}\sum_d^l P(l-a).$$

Der Knotenpunkt c liegt in allen praktischen Fällen (sofern überhaupt Scheitelverticalen vorhanden sind) für Fig. 151 unter dem Scheitelgelenke und über der Verbindungsgeraden der beiden ersten Gelenke oder doch auf derselben, für Fig. 152 über dem Scheitelgelenke und unter der Verbindungsgeraden der beiden ersten Gelenke oder auf derselben; alsdann ist $0 \leq \beta \leq 1$, die Influenzlinie verläuft nach 24) wie in Fig. 154 und wir erhalten folgende Grenzbeanspruchungen für bewegte Radlastzüge:

Belastung durch Zug II von 0 bis d, Vorderrad O bei d,

$$(25)\qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma \pm \frac{1+\beta}{l}\sum_0^d Pa,$$

Belastung durch Zug II von d bis l, Vorderrad O bei v,

$$(26)\qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma \mp \frac{1-\beta}{l}\sum_d^l P(l-a).$$

Die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last ergeben sich aus Fig. 154 oder aus 25) 26)

$$(27)\qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma \pm \frac{1+\beta}{8} pl, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma \mp \frac{1-\beta}{8} pl.$$

Soll das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gelten, so erhält man aus 22) mit

$$V_s = 0, \qquad H = \frac{gl^2}{8f}, \qquad K_x = \frac{\lambda g_x}{2}$$

für die Beanspruchung durch Eigengewicht allein

$$(28)\qquad \mp \mathfrak{V}_\sigma = \frac{\lambda g_x}{2} - \beta\frac{gl}{4}.$$

Fassen wir wieder die schon oben betrachteten zwei Spezialfälle ins Auge.

Sind die beiden ersten Gelenke und Knotenpunkt c wie beim Trapezträger durch eine gerade Gurtung verbunden, dann hat man mit

$$\mathfrak{x}_{\sigma-1} = \frac{\sigma-1}{\sigma} f, \qquad \beta = 1$$

für beliebige Belastung

(29) $$V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma \pm \frac{2}{l} \sum_0^d Pa.$$

Die obere Grenzbeanspruchung ergibt sich für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von 0 bis d, Vorderrad O bei d, aus 29), für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus

(30) $$V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma \pm \frac{pl}{4},$$

während die untere Grenzbeanspruchung in beiden Fällen für Eigengewicht allein eintritt. Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewichte wird

(31) $$\mp \mathfrak{B}_\sigma = \frac{\lambda g_x}{2} - \frac{gl}{4}.$$

Sind die beiden ersten Gelenke und Knotenpunkt c wie beim Halbparabelträger durch eine parabolische Gurtung verbunden, so hat man

(32) $$\mathfrak{x}_{\sigma-1} = \frac{\sigma^2-1}{\sigma^2} f, \qquad \beta = \frac{\sigma^2-1}{\sigma},$$

womit z. B. die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last werden

(33) $$V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma \pm \frac{\sigma+1}{\sigma} \frac{pl}{8}, \qquad V_\sigma = \mathfrak{B}_\sigma \pm \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{pl}{8},$$

und die Beanspruchung für ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht allein

(34) $$\mathfrak{B}_\sigma = \pm \frac{\lambda g_x}{2}.$$

Wenn wir auch bei den Ableitungen dieser Aufgabe die Bezeichnungen mit besonderer Rücksicht auf Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen wählten, so gelten dieselben doch für die Verticalen Fig. 149—152 bei sonst ganz beliebigem System.

Aufgabe 40. Symmetrisches Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Maximalbedingungen für die Stabkräfte.

Die Bedingungen für Maxima und Minima der Stabkräfte beim Befahren eines symmetrischen Bogenfachwerks einfachen Systems mit drei Gelenken und Verticalen anzugeben.

Nach § 69, 1)—4) treten die Maxima und Minima der Stabkräfte zugleich mit den Maximis und Minimis der entsprechenden Momente M_s ein, sodass nach § 68, 17) für Erstere wie für Letztere die Bedingung besteht

$$(1)\qquad \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = \frac{r}{l}\sum_0^d P + \frac{t}{l}\sum_d^l P.$$

Diese Gleichung nimmt mit den in § 69 gegebenen Werthen der c, v, u, r, t folgende Formen an:

$$(2)\quad \text{Für } X_m \qquad \sum_0^m P = \frac{m}{n}\sum_0^l P + \frac{\xi}{n}\left(\sum_0^d P - \sum_d^l P\right),$$

$$(3)\quad \text{„ } Z_m \qquad \sum_0^{m-1} P = \frac{m-1}{n}\sum_0^l P + \frac{\zeta}{n}\left(\sum_0^d P - \sum_d^l P\right),$$

$$(4)\quad \text{„ } D_m \qquad \sum_0^{m-1} P + (1-\varepsilon)\sum_{m-1}^m P = \frac{m-\varepsilon}{n}\sum_0^l P + \frac{\delta}{n}\left(\sum_0^d P - \sum_d^l P\right),$$

„ V_m a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(5)\qquad \sum_0^{m-1} P + (1-\nu)\sum_{m-1}^m P = \frac{m-\nu}{n}\sum_0^l P + \frac{\omega}{n}\left(\sum_0^d P - \sum_d^l P\right),$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(6)\qquad \sum_0^m P - \nu\sum_m^{m+1} P = \frac{m-\nu}{n}\sum_0^l P + \frac{\omega}{n}\left(\sum_0^d P - \sum_d^l P\right).$$

Die Grenzen der Summen $\sum$ links bedeuten Verticalennummern.

Die Gleichungen 4)—6) lassen sich für besondere Trägerformen noch etwas vereinfachen. So erhält man beim symmetrischen Trapezträger mit einer horizontalen Gurtung und nach den Enden hin zunehmenden Verticalenlängen wegen $\varepsilon = \nu = m - \alpha$, $\delta = \omega = \alpha$, $2\alpha f = nh_0$,

für D_m $$\sum_0^{m-1} P + (\alpha - m + 1)\sum_{m-1}^{m} P = \frac{h_0}{f}\sum_0^d P,$$

„ V_m im Falle a) $$\sum_0^{m-1} P + (\alpha - m + 1)\sum_{m-1}^{m} P = \frac{h_0}{f}\sum_0^d P,$$

„ „ b) $$\sum_0^{m} P + (\alpha - m)\sum_{m}^{m+1} P = \frac{h_0}{f}\sum_0^d P.$$

Selbstverständlich hätten wir die erhaltenen Bedingungen auch durch Differentiation von § 71, 1)—4) finden können. Dieselben lassen sich nun wie in den Beispielen 25 und 28 zur Correctur von Laststellungen verwenden.

Aufgabe 41. Gelenkdrücke bei symmetrischen Bogenträgern mit drei Gelenken von beliebigem Systeme.

Für Bogenträger mit gleich hohen Kämpfergelenken und in der Oeffnungsmitte liegendem Zwischengelenke die resultirenden Gelenkdrücke bei beliebiger Belastung und ihre Grenzwerthe für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge anzugeben.

Die Berechnung der resultirenden Gelenkdrücke ist nöthig für die Dimensionirung der Gelenke, wobei es jedoch auf grosse Genauigkeit der Druckwerthe nicht ankommt.

Scheiteldruck. Bezeichnen R_s, V_s den ganzen Scheiteldruck und seine Verticalcomponente, so hat man bei beliebiger Belastung

(1) $$R_s = \sqrt{H^2 + V_s^2},$$

worin nach § 66, wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{V}_s$ dem Eigengewichte und die $\sum$ den Verkehrslasten allein entsprechen,

(2) $$H = \mathfrak{H} + \frac{1}{2f}\Big[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\Big],$$

(3) $$V_s = V - \sum_0^d K = \mathfrak{V}_s - \frac{1}{l}\Big[\sum_0^d Pa - \sum_d^l P(l-a)\Big].$$

Hiernach kann R_s für jede bestimmte Belastung berechnet werden. Soll das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gelten, dann sind

(4) $$\mathfrak{H} = \frac{gl^2}{8f}, \qquad \mathfrak{V} = \frac{gl}{2}, \qquad \mathfrak{V}_s = 0.$$

Um den Einfluss der Lasten an verschiedenen Stellen bequem zu übersehen, denken wir uns vorübergehend auch das Eigengewicht in den Summen $\sum$ berücksichtigt und erhalten mit den Bezeichnungen

$$x = \sum_d^l P(l-a), \qquad y = \sum_0^d Pa$$

für beliebige Belastung

$$R_s = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2f}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{l}\right)^2} = \frac{1}{l}\sqrt{\left(\frac{l^2}{4f}+1\right)(x^2+y^2) + \left(\frac{l^2}{4f}-1\right)2xy}.$$

Diese Gleichung zeigt schon, dass für $l > 2f$, das heisst in allen praktischen Fällen, sämmtliche Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu R_s beitragen und zwar jede bestimmte Last P umsomehr, je grösser ihr Beitrag zu x oder y, je mehr sie sich dem Scheitel nähert, ganz wie dies auch für den Horizontalschub gilt. Der untere Grenzwerth von R_s ergibt sich für Eigengewicht allein und ist beispielsweise bei gleichmässig vertheiltem Eigengewichte nach 1) 4)

(5) $$\mathfrak{R}_s = \frac{gl^2}{8f} = \mathfrak{H}.$$

Der obere Grenzwerth folgt aus 1), für gleichmässig vertheilte bewegte Last mit

(6) $$H = \mathfrak{H} + \frac{pl^2}{8f}, \qquad V_s = \mathfrak{V}_s,$$

also wenn auch das Eigengewicht gleichmässig vertheilt ist, wegen 4)

(7) $$R_s = \frac{ql^2}{8f} = H,$$

und für bewegte Radlastzüge mit 2) 3), wobei Zug I mit Rad O über der Trägermitte steht. Da jedoch diese Belastung einer gleichmässig vertheilten Last annähernd äquivalent zu sein pflegt, so kann man für praktische Zwecke fast immer die Grenzwerthe des Horizontalschubs H auch als Grenzwerthe des Scheiteldrucks ansehen.

Kämpferdrücke. Für dieselben hat man bei beliebiger Belastung

(8) $$R = \sqrt{H^2 + V^2}, \qquad R' = \sqrt{H^2 + V'^2},$$

worin

(9) $$V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a), \qquad V' = \mathfrak{V}' + \frac{1}{l}\sum_0^l Pa.$$

H ist durch 2) bestimmt, während bei gleichmässig vertheiltem Eigengewicht $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'$ aus 4) folgen. Der Symmetrie halber genügt es, die Grenzwerthe von R anzugeben.

Nach 8) tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu R bei. Der untere Grenzwerth von R entsteht also für Eigengewicht allein und ist beispielsweise bei gleichmässig vertheiltem Eigengewichte nach 8) 4)

$$(10) \qquad \mathfrak{R} = \frac{gl}{2}\sqrt{1+\left(\frac{l}{4f}\right)^2}.$$

Der obere Grenzwerth ergibt sich für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus 8) mit

$$(11) \qquad H = \mathfrak{H} + \frac{pl^2}{8f}, \qquad V = \mathfrak{V} + \frac{pl}{2},$$

also wenn auch das Eigengewicht gleichmässig vertheilt ist, wegen 4),

$$(12) \qquad R = \frac{ql}{2}\sqrt{1+\left(\frac{l}{4f}\right)^2}.$$

Bei Belastung durch bewegte Radlastzüge genügt es zur Berechnung des oberen Grenzwerthes von R die oberen Grenzwerthe von H, V in 1) einzusetzen, womit man den ersteren Grenzwerth um etwas zu ungünstig erhält.

VII. Abschnitt.

Träger mit constantem Horizontalschube. Continuirliche Bogenträger. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Träger mit imaginären Gelenken.

Beispiel 92. Träger mit constantem Horizontalschube.

Der in Beispiel 54 betrachtete parabolische Segmentträger soll als Träger mit constantem Horizontalschube hergestellt und H so gewählt werden, dass bei Belastung durch das Eigengewicht allein keine Beanspruchung des horizontalen Untergurts eintritt. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen (Fig. 155).

Wir verfahren nach dem gegen Schluss des § 76 hervorgehobenen Satze. Da der Horizontalgurt unten liegt, so muss H auf Annäherung der Trägerenden hinwirken und da der Untergurt für Eigengewicht allein unbeansprucht sein soll, so ist zu wählen

$$H = \frac{gl^2}{8f} = \frac{0{,}73 \; . \; 24^2}{8 \; . \; 3{,}2} = 16{,}43 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen des Untergurts, welche sich ohne Horizontalschub gleich 78,76 und 16,43 tn ergaben, werden nun

$$Z = 78{,}76 - 16{,}43 = 62{,}33 \text{ tn}, \qquad Z = \mathfrak{Z} = 0.$$

Alle übrigen Stabkräfte und die Stützenreactionen bleiben wie in Beispiel 54 bestimmt. Für Eigengewicht allein sind also nur die Obergurtstäbe und Verticalen, für Totalbelastung des ganzen Trägers neben jenen noch die Untergurtstäbe beansprucht.

Bemerkungen. Sollte die Berechnung für bewegte Radlastzüge erfolgen, so würden H und die unteren Grenzbeanspruchungen Z wie oben, die oberen mit Rücksicht auf die in Beispiel 55 berechneten Werthe in Tonnen:

$$Z_1 = Z_2 \qquad\qquad Z_3 = 81{,}89 - 16{,}43 - 65{,}46$$
$$Z_2 = 83{,}07 - 16{,}43 = 66{,}64 \qquad Z_4 = 80{,}30 - 16{,}43 = 63{,}87\,.$$

Uebrige Stabkräfte und Stützenreactionen wie in Beispiel 55.

Wenn, wie bei der Riesaer Elbbrücke, in der Längsrichtung mehrere Träger aufeinander folgen und der Horizontalschub von einem auf den andern übertragen wird, so ändert sich an der hier angedeuteten Berechnung absolut nichts.

Wäre nicht die Bedingung gestellt gewesen, dass für Eigengewicht allein die Beanspruchung des Untergurts Null sei, so hätten wir eine andere Wahl von H treffen können. Am meisten wird die Maximal-Beanspruchung des Untergurts herabgesetzt, wenn

$$H = \frac{1}{2} [(Z_m) + (\mathfrak{Z}_m)]$$

gemacht wird, unter (Z_m), $(\mathfrak{Z}_m)$ die Grenzbeanspruchungen für $H = 0$ verstanden. Die wirklichen Grenzbeanspruchungen werden dann gleich gross und von verschiedenen Vorzeichen, nämlich in unserem Falle

mit $H = \frac{1}{2} (78{,}76 + 16{,}43) = 47{,}59$ tn

$$Z = 78{,}76 - 47{,}59 = \quad 31{,}17 \text{ tn},$$
$$Z = 16{,}42 - 47{,}59 = -31{,}17 \text{ tn}.$$

Allerdings pflegt Wechsel von Zug und Druck nicht erwünscht zu sein.

Beispiel 93. Continuirliches Trapezbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. (Feste Hängebrücke). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 24$ m Spannweite sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 156 zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}7$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}8$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_z = 0{,}4$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_x = 0{,}3$ tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen.

Sämmtliche im sechsten und siebenten Abschnitte für Bogenfachwerke erhaltenen Gleichungen gelten sowohl, wenn man den Horizontalschub nach innen und die Ordinaten nach oben positiv rechnet, als auch wenn der Horizontalschub nach aussen und die Ordinaten nach unten positiv angenommen werden (§§ 66, 78). Wir werden bei Sprengbogen die erstere, bei Hängebogen die letztere Wahl treffen.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein her-

rührenden Stabkräfte bestehen nach § 72, 4) bei unten liegender X-Gurtung folgende Gleichungen:

$$
(1) \quad \begin{cases}
\mathfrak{X}_m = m \frac{\sigma - m}{h_m} \frac{g\lambda}{2}, \\
\mathfrak{Z}_m = -[(m-1)(n-m+1) - \alpha\sigma] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\
\mathfrak{D}_m = -\left[\alpha \frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + 1\right] \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\
\mathfrak{V}_m = \left[\alpha \frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + \frac{g_x - z_z}{g}\right] \frac{g\lambda}{2}.
\end{cases}
$$

Ausnahmen bilden die Beanspruchungen der Kämpferverticale und Scheitelverticale, für welche man nach A. 39, 10) 17) hat

$$
(2) \qquad \mathfrak{V}_0 = \frac{g\,l}{4} - \frac{\lambda g_z}{2}, \qquad \mathfrak{V}_\sigma = \frac{\lambda g_x}{2}.
$$

Alle diese Gleichungen stimmen genau mit den in Beispiel 89 verwendeten überein, nur dass die Ausdrücke rechts entsprechend der nun unten liegenden X-Gurtung mit entgegengesetzten Vorzeichen wie dort auftreten. Da aber auch die in den Formeln vorkommenden Grössen wie dort gewählt sind, so erhalten wir die gleichen Zahlenwerthe mit entgegengesetzten Vorzeichen, nämlich in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = 2{,}70$	$\mathfrak{Z}_1 = 13{,}28$	$\mathfrak{D}_1 = -4{,}15$	$\mathfrak{V}_1 = 3{,}15$
$\mathfrak{X}_2 = 5{,}04$	$\mathfrak{Z}_2 = 10{,}43$	$\mathfrak{D}_2 = -3{,}05$	$\mathfrak{V}_2 = 1{,}83$
$\mathfrak{X}_3 = 6{,}30$	$\mathfrak{Z}_3 = 7{,}97$	$\mathfrak{D}_3 = -1{,}41$	$\mathfrak{V}_3 = 0{,}15$
$\mathfrak{X}_4 = 0$	$\mathfrak{Z}_4 = 6{,}64$	$\mathfrak{D}_4 = 6{,}39$	$\mathfrak{V}_4 = 0{,}60$

und $\mathfrak{V}_0 = 3{,}75$ tn.

Beziehen sich bei Berechnung der Stüzenreactionen Grössen mit dem Index 0 auf die der Stütze anliegende Oeffnung ohne Zwischengelenk, so hat man für Eigengewicht allein die Reaction einer Zwischenstütze nach § 78, 8)

$$
(3) \qquad \mathfrak{R} = \frac{g\,l}{2} + \frac{k}{l_0} \frac{g l^2}{8f} + \frac{g_0 l_0}{2},
$$

sowie die Horizontalreaction und Verticalreaction einer Endstütze nach § 67, 17) und § 78, 15)

$$
(4) \qquad \mathfrak{H} = \frac{g l^2}{8f}, \qquad \mathfrak{V} = \frac{g_0 l_0}{2} - \frac{k}{l_0} \frac{g l^2}{8f},
$$

woraus im vorliegenden Falle unter Vernachlässigung des Eigengewichts der Spannglieder mit $g_0 = 0$

$$\mathfrak{H} = \frac{0{,}7 \cdot 24^2}{8 \cdot 4} = 12{,}6 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{B} = -\frac{4{,}5}{9}\,12{,}6 = -6{,}3 \text{ tn},$$

$$\mathfrak{R} = 0{,}7 \cdot 12 + \frac{4{,}5}{9}\,12{,}6 = 14{,}7 \text{ tn}.$$

Die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf die Endstütze ergiebt die Beanspruchung des angrenzenden Spanngliedes der Länge s bei beliebiger Belastung

(5) $$S = H\frac{s}{l_0},$$

also im vorliegenden Falle für Eigengewicht allein

$$\mathfrak{S} = 12{,}6\,\frac{10{,}06}{9} = 14{,}08 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Nach § 73, 1)—5) und § 19, 2)—4), 8) haben wir bei unten liegender X-Gurtung die Grenzbeanspruchungen der Letzteren

(6) $$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung wegen $h_0 < \frac{n+2}{n} f$

(7) $$\begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m + \alpha\,\dfrac{\alpha - m + 1}{\alpha + m - 1}\,\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\,l}{4}, \\[2mm] Z_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{Z}_m - (Z_m), \end{cases}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

(8) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(\gamma - 1)(m-1)^2}{\alpha - \gamma - m + 1}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\[2mm] D_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{D}_m - (D_m), \end{cases}$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen

(9) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - \dfrac{(\gamma - 1)(m-1)^2}{\alpha - \gamma - m + 1}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\[2mm] V_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{V}_m - (V_m) + \dfrac{p\lambda}{g}\,g_s, \end{cases}$$

wobei die eine Grenzbeanspruchung zur Unterscheidung von der andern mit einer Klammer versehen ist. Abweichend von 9) hat man nach A. 39, 9) für die Kämpferverticale

(10) $$V_0 = \mathfrak{V}_0, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 + \frac{p\,l}{4},$$

und nach A. 39, 16) für die Scheitelverticale

(11) $$V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{p\lambda}{2}.$$

Diese Gleichungen ergeben mit Rücksicht auf die obigen Formeln für die Eigengewichtsbeanspruchungen sämmtliche Ausdrücke der Stabkräfte ganz wie in Beispiel 89, nur der jetzt unten liegenden X-Gurtung entsprechend mit entgegengesetzten Vorzeichen. Da nun auch die in den Gleichungen auftretenden Grössen mit den in Beispiel 89 verwendeten übereinstimmen, so müssen wir die gleichen Zahlenwerthe wie dort mit entgegengesetzten Vorzeichen erhalten, nämlich in Tonnen

für $m =$	1	2	3	4:
$X_m =$	13,50	25,20	31,50	0
$Z_m =$	66,40	53,90	44,75	38,52
$Z_m =$	13,28	8,68	3,07	1,32
$D_m =$	— 4,15	— 2,80	0,64	31,95
$D_m =$	— 20,75	— 15,50	— 9,10	6,39
$V_m =$	3,15	1,61	— 1,38	0,60
$V_m =$	19,35	12,97	5,88	4,80,

sowie $V_0 = 3{,}75$ und 20,55 tn.

Für die Grenzwerthe der Reaction einer Zwischenstütze hat man nach § 78, 6) 7)

$$R = \mathfrak{R} + \frac{pl}{2} + \frac{k}{l_0}\frac{pl^2}{8f} + \frac{p_0 l_0}{2}, \qquad R = \mathfrak{R}, \tag{12}$$

und für die Grenzwerthe der Horizontalreaction und Verticalreaction einer Endstütze nach § 67, 14) 12) und § 78, 12)

$$H = \mathfrak{H} + \frac{pl^2}{8f}, \qquad H = \mathfrak{H}, \tag{13}$$

$$B = \mathfrak{B} + \frac{p_0 l_0}{2}, \qquad B = \mathfrak{B} - \frac{k}{l_0}\frac{pl^2}{8f}. \tag{14}$$

Da nun $p_0 = 0$, so sind die unteren Grenzwerthe aller drei Reactionen deren bereits berechnete Werthe für Eigengewicht allein, die obern erhält man mit Rücksicht auf 3) 4) und $q : g = 5$

$$R = 5\mathfrak{R} = 73{,}5, \qquad H = 5\mathfrak{H} = 63, \qquad B = 5\mathfrak{B} = -31{,}5 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Spannglieder treten nach 5) gleichzeitig mit den Grenzwerthen von H ein und sind demnach

$$S = 5\mathfrak{S} = 70{,}4, \qquad S = \mathfrak{S} = 14{,}08 \text{ tn}.$$

Bemerkung. Hätten wir angenommen, dass die betrachteten Träger einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören, welche durch Locomotiven der Radanordnung Fig. 18 befahren wird, so würden

sich alle Stabkräfte den Zahlenwerthen nach wie in Beispiel 90 mit entgegengesetzten Vorzeichen ergeben haben. Nur eine Stabkraft S kommt dort nicht vor, ihre Grenzwerthe sind durch 5) mit Rücksicht auf die Grenzwerthe von H bestimmt. Indessen wird man Hängebogen ohne genügende Gründe nicht bei Eisenbahnbrücken anwenden.

Beispiel 94. Continuirliches Trapezbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. (Feste Hängebrücke oder Sprengbrücke). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke mit drei Oeffnungen von 12, 24, 12 m sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 157 zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger in allen drei Oeffnungen $g = 0{,}7$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}8$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Für die mittlere Oeffnung gelten die im vorigen Beispiele erhaltenen Stabkräfte. Wir haben uns also nur noch mit den Stabkräften der äussern Oeffnungen und Stützenreactionen zu beschäftigen. Nach § 17, 14) 15) 17) hat man

$$(1) \qquad \varepsilon = \nu = m - \mu \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{n h_0}{h_0 - h_n}.$$

Wie immer bei Hängebogen werden wir den Horizontalschub nach aussen und die Ordinaten nach unten als positiv ansehen.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 79, 17) 19) mit § 31, 16) und 1)

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = m(n-m)\dfrac{g\lambda^2}{2h_m}, \\ \mathfrak{Z}_m = -(m-1)(n-m+1)\dfrac{g\lambda z}{2h_{m-1}} + \mathfrak{H}\dfrac{z}{\lambda}, \\ \mathfrak{D}_m = -\left(n - 2m + 1 + m\dfrac{n-m}{\mu-m}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = \left(n - 2m + \dfrac{g_x - g_s}{g} + m\dfrac{n-m}{\mu-m}\right)\dfrac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

worin $\mathfrak{H}$ den schon im vorigen Beispiele berechneten Werth hat. Nach Einsetzen von $l = 12$, $k = 4$, $n = 4$, $\lambda = 3$, $\mu = 4{,}5$, $g = 0{,}7$,

$g_x = 0{,}4$, $g_z = 0{,}3$, $\mathfrak{H} = 12{,}6$ nehmen diese Gleichungen folgende Formen an:

$$\mathfrak{X}_m = 3{,}15\, m \frac{4-m}{2h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = 13{,}27 - 3{,}32\,(m-1)\frac{5-m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = -\,1{,}05\left(5 - 2m + m\,\frac{4-m}{4{,}5-m}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = 4{,}35 - 1{,}05\, m\left(2 - \frac{4-m}{4{,}5-m}\right).$$

Wir erhalten danach in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = 2{,}70$	$\mathfrak{Z}_1 = 13{,}28$	$\mathfrak{D}_1 = -\,4{,}15$	$\mathfrak{V}_1 = 3{,}15$
$\mathfrak{X}_2 = 5{,}04$	$\mathfrak{Z}_2 = 10{,}42$	$\mathfrak{D}_2 = -\,3{,}05$	$\mathfrak{V}_2 = 1{,}83$
$\mathfrak{X}_3 = 6{,}30$	$\mathfrak{Z}_3 = 7{,}96$	$\mathfrak{D}_3 = -\,1{,}41$	$\mathfrak{V}_3 = 0{,}15.$
$\mathfrak{X}_4 = 0$	$\mathfrak{Z}_4 = 6{,}63$	$\mathfrak{D}_4 = 6{,}39$	

Die Beanspruchungen der Pfeilerverticale und Widerlagerverticale für Eigengewicht allein sind nach A. 42, 7, 10)

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{g\,l}{2} - \frac{\lambda g_z}{2}, \qquad \mathfrak{V}_n = \frac{\lambda g_x}{2}, \tag{3}$$

woraus $\mathfrak{V}_0 = 3{,}75$ tn, $\mathfrak{V}_n = 0{,}6$ tn.

Für die dem Eigengewichte allein entsprechende Reaction $\mathfrak{R}$ einer Zwischenstütze und die Horizontalreaction $\mathfrak{H}$ wie Verticalreaction $\mathfrak{V}$ einer Endstütze gelten die Gleichungen 3) 4) des vorigen Beispiels, welche liefern

$$\mathfrak{H} = 12{,}6, \qquad \mathfrak{V} = 0{,}7\,.\,6 - \frac{4}{12}\,12{,}6 = 0,$$

$$\mathfrak{R} = 0{,}7\,(12 + 6) + \frac{4}{12}\,12{,}6 = 16{,}8 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Nach § 79 sind die Grenzbeanspruchungen aller Stäbe, mit Ausnahme derjenigen der Z-Gurtung, genau so gross wie für Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern. Wir erhalten aus § 32, 6) 7) 8) und § 19, 4) 8) die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung

$$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m, \tag{4}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen mit 1)

$$\left\{\begin{aligned} D_m &= \mathfrak{D}_m + \frac{(\mu - n)\,(m-1)^2}{n\mu + n - \mu - nm}\,\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{p\lambda}{2}, \\ D_m &= \frac{q+g}{g}\,\mathfrak{D}_m - (D_m), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerthe

$$D_m = \mathfrak{D}_m + 4{,}2 \frac{(m-1)^2}{35 - 8m} \frac{d_m}{h_{m-1}}, \qquad D_m = 6\mathfrak{D}_m - (D_m),$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit 1)

(6) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{B}_m - \dfrac{(\mu - n)\,(m-1)^2}{n\mu + n - \mu - nm} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \dfrac{q+g}{g} \mathfrak{B}_m - (V_m) + \dfrac{p\lambda}{g} g_s, \end{cases}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerthe

$$V_m = \mathfrak{B}_m - 4{,}2 \frac{(m-1)^2}{35 - 8m}, \qquad V_m = 6\mathfrak{B}_m - (V_m) + 3{,}6.$$

Ausnahmsweise hat man die Grenzbeanspruchungen der Pfeilerverticale nach A. 42, 6)

(7) $$V_0 = \mathfrak{B}_0, \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 + \frac{pl}{2},$$

und diejenigen der Widerlagerverticale nach A. 42, 18)

(8) $$V_n = \mathfrak{B}_n, \qquad V_n = \mathfrak{B}_n + \frac{p\lambda}{2}.$$

Die Grenzwerthe von Z_m ergeben sich nach § 79, wenn der Beitrag des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p zu dem für $H_p = 0$ entstehenden grössten Grenzwerth gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, der andere Grenzwerth aber wie für $H_p = 0$ angenommen wird. Wir erhalten so nach § 32, 5) mit § 79, 19)

(9) $$\begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m + \dfrac{z}{\lambda} H_p, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m - (m-1)\,(n-m+1) \dfrac{p\lambda z}{2h_{m-1}}, \end{cases}$$

oder im vorliegenden Falle, weil p, g in allen Oeffnungen gleich gross angenommen wurden, mit § 19, 3) einfacher

(10) $$Z_m = \mathfrak{Z}_m + \frac{z}{\lambda} H_p, \qquad Z_m = \frac{q+g}{g} \mathfrak{Z}_m - (Z_m),$$

und nach Einsetzen der Zahlenwerthe, wegen $H_p = \frac{p}{g} \mathfrak{H} = 50{,}4$,

$$Z_m = \mathfrak{Z}_m + 53{,}09, \qquad Z_m = 6\mathfrak{Z}_m - (Z_m).$$

In den Ausdrücken für die zweiten Grenzwerthe sind die ersten, soweit zur Unterscheidung nöthig, mit Klammern versehen. Die angesetzten Gleichungen liefern nun folgende Zahlenwerthe in Tonnen.

Für	$m =$	1	2	3	4:
	$X_m =$	13,50	25,20	31,50	0
	$Z_m =$	66,40	63,51	61,05	59,72
	$Z_m =$	13,28	0,99	13,29	19,94
	$D_m =$	$-$ 4,15	$-$ 2,80	0,64	31,95
	$D_m =$	$-$ 20,75	$-$ 15,50	$-$ 9,10	6,39
	$V_m =$	3,15	1,61	$-$ 1,38	0,60
	$V_m =$	19,35	12,97	5,88	4,80,

sowie $V_0 = 3{,}75$ und 20,55 tn.

Für die Grenzwerthe der Reaction R einer Zwischenstütze, sowie der Horizontalreaction H und Verticalreaction B einer Endstütze gelten die Gleichungen 12)—14) des vorigen Beispiels, welche wegen $p = p_0$, $g = g_0$ und $q : g = 5$ liefern:

$$R = 5\,\mathfrak{R} = 84 \qquad R = \mathfrak{R} = 16{,}8$$
$$H = 5\,\mathfrak{H} = 63 \qquad H = \mathfrak{H} = 12{,}6$$
$$B = 2{,}8 \,.\, 6 = 16{,}8 \qquad B = -\frac{4}{12}\,50{,}4 = -\,16{,}8 \text{ tn.}$$

Damit sind sämmtliche Grenzwerthe bestimmt. Dieselben wurden in Fig. 158 für eine Trägerhälfte eingetragen.

Bemerkungen. Wie obige Zusammenstellung zeigt, sind sämmtliche Eigengewichtsbeanspruchungen und mit Ausnahme der Z_m auch sämmtliche Grenzbeanspruchungen genau gleich den gleich bezeichneten der Mittelöffnung. Dies konnten wir nach dem am Schlusse des § 20 Gesagten von vornherein wissen (auch aus einem Vergleiche der verwendeten Formeln entnehmen), da das Gebilde der Stabaxen einer äussern Oeffnung demjenigen eines Trägerstücks der Mittelöffnung congruent ist und p, g in beiden Oeffnungen gleich gewählt wurden. Man kann also in solchen Fällen die Rechnung bedeutend abkürzen, was wir hier unterlassen haben, um die Uebereinstimmung unmittelbar hervortreten zu lassen, und weil nicht immer $k = f$, $l = 2l_0$, $p = p_0$, $g = g_0$ zu sein brauchen. Dass nicht auch die Grenzbeanspruchungen Z_m übereinstimmen, trotzdem ein bestimmter Horizontalschub H zu allen Z_m gleiche Beiträge $H\frac{z}{\lambda}$ liefert, liegt daran, dass für die Oeffnung ohne Zwischengelenk der Horizontalschub unabhängig von ihrer Belastung entsteht, während für die Oeffnung mit Zwischengelenk durch jeden von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschub eine Verkehrsbelastung bedingt ist, deren Wirkung sich mit derjenigen des Horizontalschubs combinirt.

Hätte der Träger nur eine Oeffnung ohne Zwischengelenk und eine mit Zwischengelenk gehabt, so würde die Berechnung ganz wie oben durchzuführen gewesen und die Reaction V, H der Endstütze, welcher die Oeffnung mit Zwischengelenk anliegt, wie in Beispiel 89 bestimmt geblieben sein. Bezüglich dieser Reaction bei Anschluss eines Spanngliedes (Fig. 156) siehe Beispiel 93.

Wäre der Träger, umgekehrt wie hier, nach Art der Fig. 159 angeordnet worden (in welchem Falle wir wie immer bei Sprengbogen den Horizontalschub nach innen und die Ordinaten nach oben positiv annehmen), so würde für die Stabkräfte der Oeffnung mit Zwischengelenk die Berechnung des Beispiels 89 ohne jede Aenderung gelten, für die Stabkräfte der Oeffnungen ohne Zwischengelenk aber die obige Berechnung mit dem einzigen Unterschiede, dass in den verwendeten Gleichungen der §§ 31, 32, 79 und Aufgabe 42 wegen nun oben liegender X-Gurtung die oberen statt der unteren Vorzeichen Verwendung zu finden hätten, womit alle Stabkräfte die oben gefundenen Zahlenwerthe mit entgegengesetzten Vorzeichen erhielten. Die Stützenreactionen würden wie oben bestimmt bleiben. Im nächsten Beispiele ist die Berechnung für bewegte Radlastzüge gegeben.

Beispiel 95. Continuirliches Trapezbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Für eine eingeleisige Eisenbahnbrücke sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 159 mit Oeffnungen von 12, 24, 12 m zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}7$ tn, wovon 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen, wenn die Brücke durch Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, befahren wird.

Die mittlere Oeffnung stellt ein Bogenfachwerk mit drei Gelenken dar, dessen vollständige Berechnung unter obigen Voraussetzungen in B. 90 gezeigt wurde. Auch die Grenzwerthe des Horizontalschubs bleiben wie dort

$$\mathfrak{H} = 12{,}6, \qquad H = 12{,}6 + 49{,}94 = 62{,}54 \text{ tn}.$$

Die in B. 90 festgestellten Eigengewichtsbeanspruchungen und Grenzbeanspruchungen der Stäbe gelten nach § 20 auch für die gleich-

bezeichneten Beanspruchungen der Endöffnungen (Fig. 159, vgl. auch die Bemerkungen zum vorigen Beispiele), da das Gebilde der Stabaxen einer äusseren Oeffnung demjenigen einer Trägerhälfte der Mittelöffnung congruent ist. Eine Ausnahme machen nur die Grenzbeanspruchungen Z_m des geraden Verbindungsgurts der Auflager. Diese ergeben sich nach § 79, wenn der Beitrag des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p zu dem für $H_p = 0$ entstehenden grössten Grenzwerthe gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, der andre aber wie für $H_p = 0$ angenommen wird. Wir erhalten so nach § 33, 2) und § 79, 19) folgende Grenzwerthe. Mit dem grössten H_p (Belastung der Mittelöffnung durch Zug I, Rad O bei d)

$$(1) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - \frac{z}{\lambda} H_p,$$

Belastung der betrachteten Seitenöffnung allein durch Zug I, Rad O bei Verticale $m - 1$,

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + \Big[(n - m + 1) \sum_0^{m-1} Pa + (m - 1) \sum_{m-1}^{n} P(l - a)\Big] \frac{z}{l h_{m-1}}.$$

Diese Gleichungen liefern mit $l = 12$, $n = 4$, $\lambda = 3$, $z = 3{,}16$, $H_p = 49{,}94$ und den aus der Tabelle in Beispiel 6 entnommenen oder wie in Beispiel 42 berechneten Summen $\sum$ folgende Grenzbeanspruchungen:

$$Z_1 = -\,13{,}28 - 52{,}60 = -\,65{,}88 \text{ tn}$$
$$Z_2 = -\,10{,}43 - 52{,}60 = -\,63{,}02 \text{ „}$$
$$Z_3 = -\;\;7{,}97 - 52{,}60 = -\,60{,}57 \text{ „}$$
$$Z_4 = -\;\;6{,}64 - 52{,}60 = -\,59{,}24 \text{ „}.$$

$$Z_1 = -\,13{,}28 + (4\,.\,\;0\;\; + 0\,.\,173)\,\frac{3{,}16}{54} = -\,13{,}28 \text{ tn } (-\,13{,}28)$$
$$Z_2 = -\,10{,}43 + (3\,.\,30{,}2 + 1\,.\,89{,}4)\,\frac{3{,}16}{42} = \quad 3{,}11 \text{ „ } (\quad 2{,}71)$$
$$Z_3 = -\;\;7{,}97 + (2\,.\,80{,}7 + 2\,.\,32{,}4)\,\frac{3{,}16}{30} = \quad 13{,}40 \text{ „ } (\quad 13{,}40)$$
$$Z_4 = -\;\;6{,}64 + (1\,.\,144 + 3\,.\,10{,}2)\,\frac{3{,}16}{18} = \quad 24{,}01 \text{ „ } (\quad 24{,}96).$$

Die Ansätze der zweiten Grenzwerthe entsprechen der ersten Rich-

tung des Zuges I, während die Resultate für die zweite Zugrichtung in Klammern beigefügt sind.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Verticalreactionen der Stützen hat man nach § 78, 16) 8) für eine Endstütze

(3) $$\mathfrak{B} = 0,$$

und für eine Zwischenstütze, wenn l_0, g_0 der anliegenden Endöffnung entsprechen,

(4) $$\mathfrak{R} = \frac{g\,l}{2} + \frac{g_0\,l_0}{2} + \frac{k}{l_0}\,\mathfrak{H},$$

das heisst also

$$\mathfrak{R} = 0{,}7\,(12 + 6) + \frac{4}{12}\,12{,}6 = 16{,}8 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Verticalreaction B einer Endstütze ergeben sich nach § 78, 13) 14) wie folgt. Mit dem grössten H_p

(5) $$B = -\frac{k}{l_0}\,H_p,$$

bei Belastung der anliegenden Oeffnung durch Zug II, Vorderrad O bei l,

(6) $$B = \frac{1}{l_0}\sum_0^{l_0} P a.$$

Wir erhalten so

$$B = -\frac{4}{12}\,49{,}94 = -\,16{,}65, \qquad B = \frac{257}{12} = 21{,}42 \text{ tn}.$$

Der untere Grenzwerth der Reaction einer Zwischenstütze ist $R = \mathfrak{R}$, der obere ergiebt sich wegen $l = 2\,l_0$, $k = f$ bei Belastung der beiden anliegenden Oeffnungen durch Zug I, Rad O bei d oder der Stütze selbst (oder an beliebiger Stelle zwischen diesen Punkten) nach § 78, 5)

(7) $$R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_0}\sum_0^{d} P a + \sum_d^{l} P + \frac{1}{l_0}\sum_0^{l_0} P(l_0 - a).$$

Diese Gleichung liefert mit Rad O bei d für die erste Zugrichtung

$$R = 16{,}8 + \frac{226}{12} + 4\,.\,6 + 4 + \frac{1}{12}(5\,.\,11{,}9 + 6\,.\,7{,}7 + 6\,.\,6{,}4 + 6\,.\,5{,}1 + 4\,.\,3{,}9 + 5\,.\,0{,}9) = 79{,}87 \text{ tn},$$

und für die zweite Zugrichtung

$$R = 16{,}8 + \frac{178}{12} + 4\,.\,6 + 4 + 5 + \frac{1}{12}(6\,.\,11{,}7 + 4\,.\,10{,}5 + 5\,.\,7{,}5 + 6\,.\,3{,}3 + 6\,.\,2 + 6\,.\,0{,}7) = 79{,}69 \text{ tn}.$$

Mit Rad O bei der Stütze hätten wir für die erste und zweite Zugrichtung dieselben Werthe erhalten wie für die zweite und erste.

Die horizontalen Grenzreactionen der Endstützen sind die Grenzwerthe von H. Sämmtliche Grenzwerthe einer Trägerhälfte sind in Fig. 160 eingetragen.

Hätte der Träger neben der Oeffnung mit Zwischengelenk nur *eine* Oeffnung ohne Zwischengelenk gehabt, so würde die Berechnung ganz wie oben durchzuführen gewesen und die Reaction V, H der einen Endstütze wie in Beispiel 90 bestimmt geblieben sein. Wäre der Träger als Hängebogen nach Art von Fig. 157 angeordnet gewesen, so würden sich bei gleichem Vorgehen wie oben, wegen geänderter Lage der X-Gurtung, für gleiche g_x, g_s alle Stabkräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen den Zahlenwerthen nach wie oben ergeben haben. Die Stützenreactionen würden wie oben geblieben sein, dabei jedoch der Horizontalschub nach Aussen als positiv gelten.

Beispiel 96. Continuirliches Halbparabelbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. (Feste Hängebrücke). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 40$ m Spannweite sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 161 mit parabolischem Obergurte zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 1{,}2$ tn, Verkehrslast $p = 2$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_x = 0{,}6$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_s = 0{,}6$ tn auf diejenigen des Obergurts. Das Eigengewicht der Spannglieder beträgt $g_0 = 0{,}15$ tn per laufenden Meter Horizontalprojection. Es sind die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Wie bei Hängebogen üblich und nach §§ 66, 78 bei Anwendung unsrer Formeln freigestellt, nehmen wir die Ordinaten nach unten und den Horizontalschub nach aussen als positiv an. Die Formberechnung bleibt genau wie in Beispiel 91 und ergiebt die dortigen Zahlenwerthe.

Eigengewicht allein. Für Belastung durch das Eigengewicht allein hat man nach § 75, 6) die Beanspruchungen der X-Gurtung und Diagonalen

$$\mathfrak{X}_m = 0, \qquad \mathfrak{D}_m = 0,$$

die Beanspruchungen der Verticalen

$$\mathfrak{V}_m = \lambda g_x = 1{,}2 \text{ tn},$$

jedoch ausnahmsweise nach A. 39, 13) 17)

$$\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}_{10} = \frac{\lambda g_x}{2} = 0{,}6 \text{ tn}.$$

Für die Z-Gurtung liefert § 75, 6)

$$\mathfrak{Z}_m = \frac{g\,l}{8f} n z_m,$$

wonach mit den aus der Formberechnung zu entnehmenden z_m in Tonnen:

$$\mathfrak{Z}_1 = 53{,}14 \qquad \mathfrak{Z}_6 = 49{,}20$$
$$\mathfrak{Z}_2 = 52{,}15 \qquad \mathfrak{Z}_7 = 48{,}72$$
$$\mathfrak{Z}_3 = 51{,}26 \qquad \mathfrak{Z}_8 = 48{,}38$$
$$\mathfrak{Z}_4 = 50{,}47 \qquad \mathfrak{Z}_9 = 48{,}14$$
$$\mathfrak{Z}_5 = 49{,}78 \qquad \mathfrak{Z}_{10} = 48{,}02.$$

Alle diese Beanspruchungen sind genau so gross wie die gleich bezeichneten des Beispiels 91, nur von entgegengesetzten Vorzeichen.

Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stützenreactionen gelten die Gleichungen B. 93, 3) 4), wonach die Horizontalreaction und Verticalreaction einer Endstütze

$$\mathfrak{H} = \frac{1{,}2 \,.\, 40^2}{8 \,.\, 5} = 48, \qquad \mathfrak{V} = 0{,}15 \frac{11}{2} - \frac{5{,}5}{11} 48 = -23{,}18,$$

und die Reaction einer Zwischenstütze

$$\mathfrak{R} = 1{,}2 \,.\, 20 + \frac{5{,}5}{11} 48 + 0{,}15 \,.\, 5{,}5 = 48{,}82 \text{ tn}.$$

Die Beanspruchung der Spannglieder ist durch Gleichung B. 93, 5) bestimmt, welche für Eigengewicht allein liefert

$$\mathfrak{S} = 48 \frac{12{,}3}{11} = 53{,}67 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Da die Formberechnung genau dieselben h_m, w_d, w_v wie in Beispiel 91 ergab und damit bei gleichen n, f auch die ε, ν, φ, χ, ψ gleiche Werthe erlangen, so gelten für die Grenzwerthe der Stabkräfte die in Beispiel 91 verwendeten Gleichungen der §§ 70, 75, 19 und Aufgabe 39, jedoch, weil die X-Gurtung jetzt unten liegt, mit den unteren statt oberen Vorzeichen. Da ferner die in den Gleichungen auftretenden Grössen von gleichen Werthen wie in Beispiel 91 sind, so erhalten wir bei gleichem Vorgehen wie in Beispiel 91 sämmtliche Grenzwerthe der Stabkräfte von gleichen Zahlenwerthen wie dort und mit entgegengesetzten Vorzeichen. Es sind also die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen in Tonnen:

$X_1 = \pm\ 5{,}19$	$Z_1 = 141{,}70$	$Z_1 = 53{,}14$
$X_2 = \pm\ 11{,}12$	$Z_2 = 139{,}71$	$Z_2 = 51{,}51$
$X_3 = \pm\ 17{,}93$	$Z_3 = 139{,}19$	$Z_3 = 48{,}77$
$X_4 = \pm\ 25{,}69$	$Z_4 = 140{,}09$	$Z_4 = 44{,}97$
$X_5 = \pm\ 34{,}29$	$Z_5 = 142{,}36$	$Z_5 = 40{,}16$
$X_6 = \pm\ 43{,}08$	$Z_6 = 145{,}84$	$Z_6 = 34{,}56$
$X_7 = \pm\ 49{,}98$	$Z_7 = 149{,}76$	$Z_7 = 28{,}88$
$X_8 = \pm\ 49{,}87$	$Z_8 = 152{,}13$	$Z_8 = 25{,}27$
$X_9 = \pm\ 34{,}20$	$Z_9 = 147{,}69$	$Z_9 = 28{,}83$
$X_{10} = \pm\ 0$	$Z_{10} = 128{,}06$	$Z_{10} = 48{,}02$,

und die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder:

	$V_0 = -\ 11{,}19$	$V_0 = 14{,}39$
$D_1 = \pm\ 12{,}88$	$V_1 = -\ 9{,}81$	$V_1 = 16{,}21$
$D_2 = \pm\ 12{,}50$	$V_2 = -\ 8{,}94$	$V_2 = 15{,}34$
$D_3 = \pm\ 12{,}22$	$V_3 = -\ 7{,}85$	$V_3 = 14{,}25$
$D_4 = \pm\ 12{,}00$	$V_4 = -\ 6{,}53$	$V_4 = 12{,}93$
$D_5 = \pm\ 11{,}74$	$V_5 = -\ 4{,}80$	$V_5 = 11{,}20$
$D_6 = \pm\ 11{,}01$	$V_6 = 9{,}35$	$V_6 = -\ 2{,}95$
$D_7 = \pm\ 10{,}59$	$V_7 = 7{,}48$	$V_7 = -\ 1{,}08$
$D_8 = \pm\ 9{,}29$	$V_8 = -\ 2{,}80$	$V_8 = 9{,}20$
$D_9 = \pm\ 19{,}96$	$V_9 = -\ 5{,}54$	$V_9 = 11{,}94$
$D_{10} = \pm\ 35{,}35$	$V_{10} = 0{,}60$	$V_{10} = 2{,}60$.

Für die Grenzwerthe der Stützenreactionen gelten die Gleichungen B. 93, 12)—14). Hiernach treten die unteren Grenzwerthe für Eigengewicht allein ein, während mit $p_0 = 0$, $p : g = 2 : 1{,}2$ die obere Grenzreaction einer Zwischenstütze

$$R = 48{,}82 + 40 + \frac{5{,}5}{11}\,\frac{2}{1{,}2}\,48 = 128{,}82 \text{ tn},$$

sowie die oberen Grenzwerthe der Horizontalreaction und Verticalreaction einer Endstütze

$$H = \frac{3{,}2}{1{,}2}\,\mathfrak{H} = 128 \text{ tn},$$

$$B = -\ 23{,}18 - \frac{5{,}5}{11}\,\frac{2}{1{,}2}\,48 = -\ 63{,}18 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Spannungsglieder treten nach B. 93, 5)

zugleich mit den Grenzwerthen von H ein, sie sind also $\mathfrak{S} = 53{,}67$ und

$$S = 53{,}67 \frac{3{,}2}{1{,}2} = 143{,}12 \text{ tn}.$$

Hätten wir das Eigengewicht der Spannglieder vernachlässigt, so würden sich nur

$$\mathfrak{B} = -24 \qquad \mathfrak{R} = 48 \qquad B = -64 \qquad R = 128$$

anstatt der oben berechneten Werthe

$$-23{,}18 \qquad 48{,}82 \qquad -63{,}18 \qquad 128{,}82$$

ergeben haben, alle übrigen Werthe aber ungeändert geblieben sein.

Beispiel 97. Continuirliches Halbparabelbogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen. (Feste Hängebrücke oder Sprengbrücke). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke mit drei Oeffnungen von 20, 40, 20 m Spannweite sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 162 mit parabolischem Obergurte zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter in allen drei Oeffnungen $g = 1{,}2$ tn, Verkehrslast $p = 2$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,6 tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen.

Für die mittlere Oeffnung gelten dieselben Stabkräfte wie im vorigen Beispiele. Wir haben uns also nur noch mit den Stabkräften der äussern Oeffnungen und Stützenreactionen zu beschäftigen, wobei der Horizontalschub nach aussen und die Ordinaten nach unten positiv angenommen werden. Da das Gebilde der Stabaxen der Endöffnung demjenigen des ersten Trägerstücks der Mittelöffnung congruent ist, so hat man wie in den Beispielen 91 und 96:

		$\mathfrak{z}_m$	h_m	s_m	d_m	ε	v
für	$m = 1$	0,95	4,55	2,21	4,97	— 4,79	— 5,35
	2	1,80	3,70	2,17	4,21	— 4,35	— 4,93
	3	2,55	2,95	2,14	3,56	— 3,93	— 4,54
	4	3,20	2,30	2,10	3,05	— 3,54	— 4,18
	5	3,75	1,75	2,07	2,66	— 3,18	— 3,89
	6	4,20	1,30	2,05	2,38	— 2,89	— 3,71

		$\mathfrak{z}_m$	h_m	z_m	d_m	ε	ν
für	$m = 7$	4,55	0,95	2,03	2,21	$-$ 2,71	$-$ 3,80
	8	4,80	0,70	2,02	2,12	$-$ 2,80	$-$ 4,67
	9	4,95	0,55	2,01	2,07	$-$ 3,67	$-$11,00
	10	5,00	0,55	2,00	2,06	$-$10,00,	

und nach § 16, 11) 13) weiter

$$x_m = \lambda = 2, \qquad \mathfrak{x}_m = w_d = w_v = h_0 = 5{,}5.$$

Alle Längen sind in Metern gegeben.

Eigengewicht allein. Nach § 79, 28) hat man für die X-Gurtung und Diagonalen in allen Feldern

$$\mathfrak{X}_m = 0, \qquad \mathfrak{D}_m = 0$$

und für die Verticalen mit $g_x = 0{,}6$

$$\mathfrak{V}_m = \lambda g_x = 1{,}2 \text{ tn}.$$

Jedoch bilden Ausnahmen und folgen aus A. 42, 7) 10)

$$\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}_{10} = \frac{\lambda g_x}{2} = 0{,}6 \text{ tn}.$$

Für die Z-Gurtung liefert § 79, 28) mit dem schon im vorigen Beispiele berechneten Werthe $\mathfrak{H} = 48$

$$\mathfrak{Z}_m = \mathfrak{H}\frac{z_m}{\lambda} = 24\, z_m,$$

woraus in Tonnen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= 53{,}14 & \mathfrak{Z}_6 &= 49{,}20 \\ \mathfrak{Z}_2 &= 52{,}15 & \mathfrak{Z}_7 &= 48{,}72 \\ \mathfrak{Z}_3 &= 51{,}26 & \mathfrak{Z}_8 &= 48{,}38 \\ \mathfrak{Z}_4 &= 50{,}47 & \mathfrak{Z}_9 &= 48{,}18 \\ \mathfrak{Z}_5 &= 49{,}78 & \mathfrak{Z}_{10} &= 48{,}02. \end{aligned}$$

Alle diese Beanspruchungen sind genau den gleich bezeichneten der mittleren Oeffnung entsprechend. Da dies nach Ausweis der angewandten Formeln so sein muss, so wäre eine besondere Berechnung der Eigengewichtsbeanspruchungen für die äussern Oeffnungen überflüssig gewesen. (Vgl. die Bemerkungen zu Beispiel 99).

Für die vom Eigengewichte allein herrührende Reaction $\mathfrak{R}$ einer Zwischenstütze, sowie die Horizontalreaction $\mathfrak{H}$ und Verticalreaction $\mathfrak{V}$ einer Endstütze gelten die Gleichungen B. 93, 3) 4), welche liefern

$$\mathfrak{H} = \frac{1{,}2 \cdot 40^2}{8 \cdot 5} = 48 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{V} = 1{,}2 \cdot 10 - \frac{5}{20}\, 48 = 0,$$

$$\mathfrak{R} = 1{,}2\,(20 + 10) + \frac{5}{20}\, 48 = 48 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Da g, p in allen Oeffnungen gleich gross angenommen wurden, so haben wir nach § 19, 2)—4) 8) zur Berechnung einer Grenzbeanspruchung aus der andern

$$(1) \quad \begin{cases} X_m + (X_m) = 0, & Z_m + (Z_m) = \frac{q+g}{g}\,\mathfrak{Z}_m, \\ D_m + (D_m) = 0, & V_m + (V_m) = \frac{q+g}{g}\,\mathfrak{V}_m + \frac{p\lambda}{g}\,g_z, \end{cases}$$

worin der eine Grenzwerth zur Unterscheidung vom andern mit einer Klammer versehen ist. Hiernach sind die beiden Grenzbeanspruchungen jedes Stabes der X-Gurtung und jeder Diagonale numerisch gleich und von verschiedenen Vorzeichen, während für die Z-Gurtung und Verticalen

$$Z_m = 3{,}667\,\mathfrak{Z}_m - (Z_m), \qquad V_m = 6{,}4 - (V_m).$$

Es bleibt nun noch für jeden Stab eine Grenzbeanspruchung auszudrücken.

Die Grenzwerthe einer Stabkraft ergeben sich nach § 79, wenn man den Beitrag des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p zu dem für $H_p = 0$ entstehenden grössten Grenzwerth gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, den andern Grenzwerth aber wie für H_p annimmt. Der grösste von der Verkehrslast herrührende Horizontalschub ist nach § 79 und wegen $f = k$, $l_z = 2l$, $p_z = p$,

$$(2) \qquad H_p = \left(\frac{pl^2}{8f}\right)_z = \frac{pl^2}{2k},$$

wenn sich der Ausdruck mit dem Index z auf die Oeffnung mit Zwischengelenk, der zweite Ausdruck auf die betrachtete Oeffnung bezieht. Die Beiträge dieses Horizontalschubs zu den Stabkräften sind nach § 79, 26)

$$(3) \quad \begin{cases} X'_m = -\,m(n-m)\,\frac{p\lambda^2}{2\,h_m}, \\ Z'_m = (m-1)(n-m+1)\,\frac{z_m}{h_{m-1}}\,\frac{p\lambda}{2} + \frac{p\,l}{2k}\,n z_m, \\ D'_m = \left(n - 2m + 1 - m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{p\lambda}{2}, \\ V'_m = -\left(n - 2m - 1 - m\,\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Für die dem Falle $H_p = 0$ entsprechenden Grenzwerthe der Gurtungskräfte hat man nach § 32, 4) 5)

$$X_m = m(n-m)\frac{p\lambda^2}{2h_m}, \qquad X_m = 0,$$

$$Z_m = \mathfrak{Z}_m - (m-1)(n-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Daher ist je eine Grenzbeanspruchung im Ganzen

$$(4) \qquad X_m = m(n-m)\frac{p\lambda^2}{2h_m},$$

$$(5) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - (m-1)(n-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2},$$

woraus mit den oben berechneten $\mathfrak{Z}_m$ unter Beachtung des über die zweiten Grenzwerthe Gesagten folgende Grenzbeanspruchungen in Tonnen hervorgehen:

$X_1 = \pm$ 7,91	$Z_1 =$ 53,14	$Z_1 =$ 141,72
$X_2 = \pm$ 17,30	$Z_2 =$ 34,98	$Z_2 =$ 156,25
$X_3 = \pm$ 28,47	$Z_3 =$ 14,24	$Z_3 =$ 173,73
$X_4 = \pm$ 41,74	$Z_4 = -$ 9,33	$Z_4 =$ 194,40
$X_5 = \pm$ 57,14	$Z_5 = -$ 36,62	$Z_5 =$ 219,16
$X_6 = \pm$ 73,85	$Z_6 = -$ 67,94	$Z_6 =$ 248,36
$X_7 = \pm$ 88,42	$Z_7 = -$ 101,26	$Z_7 =$ 279,92
$X_8 = \pm$ 91,43	$Z_8 = -$ 130,23	$Z_8 =$ 307,64
$X_9 = \pm$ 65,45	$Z_9 = -$ 135,63	$Z_9 =$ 312,16
$X_{10} = \pm$ 0	$Z_{10} = -$ 82,89	$Z_{10} =$ 248,98.

Für die Diagonalen ergeben sich aus 3) die Beiträge des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs in Tonnen:

$$D_1' = 2\left(\frac{9}{4{,}79} + 9\right)\frac{5{,}97}{5{,}5} = 19{,}66$$

$$D_2' = 2\left(\frac{16}{4{,}35} + 7\right)\frac{4{,}21}{4{,}55} = 19{,}76$$

$$D_3' = 2\left(\frac{21}{3{,}93} + 5\right)\frac{3{,}56}{3{,}70} = 19{,}91$$

$$D_4' = 2\left(\frac{24}{3{,}54} + 3\right)\frac{3{,}05}{2{,}95} = 20{,}22$$

$$D_5' = 2\left(\frac{25}{3{,}18} + 1\right)\frac{2{,}66}{2{,}30} = 18{,}50$$

$$D_6' = 2\left(\frac{24}{2{,}89} - 1\right)\frac{2{,}38}{1{,}75} = 17{,}99$$

$$D_7' = 2\left(\frac{21}{2{,}71} - 3\right)\frac{2{,}21}{1{,}30} = 16{,}15$$

$$D_8' = 2\left(\frac{16}{2,80} - 5\right)\frac{2,12}{0,95} = \quad 3,19$$

$$D_9' = 2\left(\frac{9}{3,67} - 7\right)\frac{2,07}{0,70} = -26,90$$

$$D_{10}' = 2\left(\frac{0}{10} - 9\right)\frac{2,06}{0,55} = -67,42.$$

Die Grenzbeanspruchungen ohne Rücksicht auf H_p sind für die Diagonalen 1 bis 7 wegen $0 < m - \varepsilon < n$ nach § 32, 10)

$$D_m = -\left(n - 2m + 1 - m\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2}, \qquad D_m = 0$$

und für die Diagonalen 8 bis 10 wegen $m - \varepsilon > n$ nach § 32, 7)

$$D_m = -\frac{(m-\varepsilon)(n-m)^2}{n-m-\varepsilon(n-1)}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2},$$

$$D_m = \frac{(m-\varepsilon-n)(m-1)^2}{n-m-\varepsilon(n-1)}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2},$$

sodass also der erste Werth negativ, der zweite positiv ist. Daher folgt mit Rücksicht auf 3) oder die Vorzeichen der berechneten D_m' eine Grenzbeanspruchung im Ganzen für die Diagonalen 1 bis 7

$$D_m = D_m',$$

für die Diagonale 8

$$(7) \qquad D_m = \frac{(m-\varepsilon-n)(m-1)^2}{n-m-\varepsilon(n-1)}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2} + D_m',$$

und für die Diagonalen 9 bis 10

$$(8) \qquad D_m = \frac{(m-\varepsilon-n)(m-1)^2}{n-m-\varepsilon(n-1)}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2}.$$

Da aus 7) 8)

$$D_8 = \frac{0,8 \cdot 49 \cdot 2,12 \cdot 2}{27,2 \cdot 0,95} + 3,19 = 9,62$$

$$D_9 = \frac{2,67 \cdot 64 \cdot 2,07 \cdot 2}{84,03 \cdot 0,70} = 29,70$$

$$D_{10} = \frac{10 \cdot 81 \cdot 2,06 \cdot 2}{90 \cdot 0,55} = 67,42,$$

so erhalten wir bei Beachtung von 1) folgende Grenzbeanspruchungen in Tonnen:

$$D_1 = \pm 19,66 \qquad D_6 = \pm 17,99$$
$$D_2 = \pm 19,76 \qquad D_7 = \pm 16,15$$
$$D_3 = \pm 19,91 \qquad D_8 = \pm 9,62$$
$$D_4 = \pm 20,22 \qquad D_9 = \pm 29,70$$
$$D_5 = \pm 18,50 \qquad D_{10} = \pm 67,40.$$

Für die Verticalen liefert 3) die Beiträge des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs in Tonnen:

$$V_1' = -2\left(\frac{9}{5,85} + 7\right) = -17,36$$

$$V_2' = -2\left(\frac{16}{4,93} + 5\right) = -16,49$$

$$V_3' = -2\left(\frac{21}{4,54} + 3\right) = -15,25$$

$$V_4' = -2\left(\frac{24}{4,18} + 1\right) = -13,48$$

$$V_5' = -2\left(\frac{25}{3,89} - 1\right) = -10,85$$

$$V_6' = -2\left(\frac{24}{3,71} - 3\right) = -6,94$$

$$V_7' = -2\left(\frac{21}{3,80} - 5\right) = -1,05$$

$$V_8' = -2\left(\frac{16}{4,67} - 7\right) = 7,15$$

$$V_9' = -2\left(\frac{9}{11} - 9\right) = 16,36.$$

Die Grenzbeanspruchungen ohne Rücksicht auf H_p sind für die Verticalen 1 bis 6 wegen $0 < m - \nu < n$ nach § 32, 11)

$$V_m = \mathfrak{B}_m + \left(n - 2m + 1 - m\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{B}_m,$$

und für die Verticalen 7 bis 9 wegen $m - \nu > n$ nach § 32, 8)

$$V_m = \mathfrak{B}_m + \frac{(m-\nu)(n-m)^2}{n-m-\nu(n-1)}\frac{\nu-1}{\nu}\frac{p\lambda}{2},$$

$$V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{(m-\nu-n)(m-1)^2}{n-m-\nu(n-1)}\frac{p\lambda}{2},$$

wobei also der erste von der Verkehrslast herrührende Ausdruck positiv, der zweite negativ ist. Daher erhält man mit Rücksicht auf 3) oder die Vorzeichen der berechneten V_m' eine Grenzbeanspruchung im Ganzen für die Verticalen 1 bis 6

(9) $$V_m = \mathfrak{B}_m + V_m',$$

für die Verticale 7

(10) $$V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{(m-\nu-n)(m-1)^2}{n-m-\nu(n-1)}\frac{p\lambda}{2} + V_m',$$

und für die Verticalen 8 bis 9

(11) $$V_m = \mathfrak{B}_m - \frac{(m-\nu-n)(m-1)^2}{n-m-\nu(n-1)}\frac{p\lambda}{2}.$$

Unter Beachtung des über den zweiten Grenzwerth Gesagten erhalten wir hiernach folgende Grenzbeanspruchungen in Tonnen:

$$V_1 = 1{,}2 - 17{,}36 = -16{,}16$$
$$V_2 = 1{,}2 - 16{,}49 = -15{,}29$$
$$V_3 = 1{,}2 - 15{,}25 = -14{,}05$$
$$V_4 = 1{,}2 - 13{,}48 = -12{,}28$$
$$V_5 = 1{,}2 - 10{,}85 = -\ 9{,}65$$
$$V_6 = 1{,}2 -\ 6{,}94 = -\ 5{,}74$$
$$V_7 = 1{,}2 - \frac{0{,}8\,.\,36\,.\,2}{37{,}2} - 1{,}05 = -\ 1{,}40$$
$$V_8 = 1{,}2 - \frac{2{,}67\,.\,49\,.\,2}{44{,}03} = -\ 4{,}74$$
$$V_9 = 1{,}2 - \frac{10\,.\,64\,.\,2}{100} = -\ 11{,}60\,,$$

$$V_1 = 6{,}4 + 16{,}16 = 22{,}56 \qquad V_6 = 6{,}4 +\ 5{,}74 = 12{,}14$$
$$V_2 = 6{,}4 + 15{,}29 = 21{,}69 \qquad V_7 = 6{,}4 +\ 1{,}40 =\ 7{,}80$$
$$V_3 = 6{,}4 + 14{,}05 = 20{,}45 \qquad V_8 = 6{,}4 +\ 4{,}74 = 11{,}14$$
$$V_4 = 6{,}4 + 12{,}28 = 18{,}68 \qquad V_9 = 6{,}4 + 11{,}60 = 18{,}00.$$
$$V_5 = 6{,}4 +\ 9{,}65 = 16{,}05$$

Ausnahmsweise sind die Grenzbeanspruchungen der Pfeilerverticale nach A. 42, 6) mit obigem Ausdrucke 2)

(12) $$V_0 = \mathfrak{B}_0 - \frac{n-1}{n}\frac{p\,l}{2}, \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 + \frac{p\,l}{2},$$

und diejenigen der Widerlagerverticalen nach A. 42, 9)

(13) $$V_n = \mathfrak{B}_n\,, \qquad V_n = \mathfrak{B}_n + \frac{p\,l}{2}.$$

Diese Gleichungen liefern

$$V_0 = -\ 17{,}4 \qquad V_0 = 20{,}6 \qquad V_{10} = 0{,}6 \qquad V_{10} = 2{,}6 \text{ tn}.$$

Für die Grenzwerthe der Reaction R einer Zwischenstütze, sowie der Horizontalreaction H und Verticalreaction B einer Endstütze gelten die Gleichungen B. 93, 12)—14), wonach wegen $g = g_0 = 1{,}2$, $p = p_0 = 2$ die oberen Grenzwerthe von R, H,

$$R = \frac{3{,}2}{1{,}2}\,\mathfrak{R} = 128, \qquad H = \frac{3{,}2}{1{,}2}\,\mathfrak{H} = 128,$$

und beide Grenzwerthe von B

$$B = 2\,.\,10 = 20,$$
$$B = -\frac{5}{20}\,\frac{2}{1{,}2}\,\mathfrak{H} = -\ 20 \text{ tn}.$$

Die unteren Grenzwerthe von R, H treten für Eigengewicht allein ein. Damit sind sämmtliche Grenzwerthe bestimmt.

Bemerkungen. Anstatt die Berechnung wie hier durchzuführen, kann man auch wie in Beispiel 99 für beliebige Gurtungsformen vorgehen, besonders dann, wenn nicht $k = f$, die Parabelaxe durchs Auflager, die Oeffnung mit Zwischengelenk doppelt so gross als diejenigen ohne Zwischengelenk, die Auflager der Ersteren in gleicher Höhe und g, p in allen Oeffnungen gleich gross angenommen werden. Allerdings ist diese Anordnung am zweckmässigsten und man wird sie gewöhnlich treffen.

Hätte der Träger neben der Oeffnung mit Zwischengelenk nur eine Oeffnung ohne Zwischengelenk gehabt, so würde die Berechnung ganz wie oben durchzuführen gewesen und die Reaction V, H der einen Endstütze wie in Beispiel 91 bestimmt gebliebensein. Bezüglich dieser Reaction bei Anschluss eines Spanngliedes (Fig. 161) siehe Beispiel 96.

Wäre der Träger als Sprengbogen nach Art von Fig. 166 angeordnet worden (in welchem Falle wir den Horizontalschub nach innen und die Ordinaten nach oben positiv rechnen), so würde für die Stabkräfte der Oeffnung mit Zwischengelenk die Berechnung in Beispiel 91 ohne jede Aenderung gelten, für die Stabkräfte der Oeffnungen ohne Zwischengelenk aber die obige Berechnung mit dem alleinigen Unterschiede, dass in den verwendeten Gleichungen der §§ 19, 32, 79 und Aufgabe 42 der nun oben liegenden X-Gurtung wegen die oberen statt unteren Vorzeichen zu verwenden wären, womit alle Stabkräfte die oben gefundenen Zahlenwerthe mit entgegengesetzten Vorzeichen erhielten. Die Stützenreactionen würden wie oben bestimmt bleiben.

Beispiel 98. Continuirliches Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen (Feste Hängebrücke). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 24$ m Spannweite sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 163 mit kreisförmigem (einem Kreisbogen eingeschriebenem) Obergurte zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}7$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}8$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_x = 0{,}4$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_z = 0{,}3$ tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen anzugeben.

Wir nehmen die Ordinaten nach unten und den Horizontalschub nach aussen als positiv an. Die Formberechnung ergibt bei gleichem Vorgehen wie in Beispiel 87 die dort berechneten Werthe, womit bei gleichen n, f auch die φ, χ, ψ übereinstimmen. Verfahren wir nun weiter ganz wie in Beispiel 87, so erhalten wir zur Berechnung sämmtlicher Eigengewichtsbeanspruchungen und Grenzbeanspruchungen der Stäbe die dort verwendeten Gleichungen der §§ 19, 69, 70 und Aufgabe 39, nur, weil die X-Gurtung jetzt unten liegt, mit den unteren statt oberen Vorzeichen. Weil aber auch die in den Formeln auftretenden Grössen wie in Beispiel 87 gewählt wurden, so ergeben sich sämmtliche Stabkräfte den Zahlenwerthen nach genau wie dort und mit entgegengesetzten Vorzeichen, das heisst in Tonnen

für $m =$	1	2	3	4:
$\mathfrak{X}_m =$	— 0,52	— 0,71	— 0,35	0
$X_m =$	— 11,20	— 25,66	— 29,93	0
$X_m =$	8,08	21,40	27,80	0
$\mathfrak{Z}_m =$	14,82	14,17	13,66	12,99
$Z_m =$	74,10	73,21	76,71	75,36
$Z_m =$	14,82	11,81	5,25	2,58
$\mathfrak{D}_m =$	0,70	0,23	— 0,39	— 0,34
$D_m =$	14,92	14,57	10,17	28,27
$D_m =$	— 10,72	— 13,14	— 12,51	— 30,31
$\mathfrak{V}_m =$	1,10	1,29	1,26	0,60
$V_m =$	— 5,02	— 0,74	— 0,72	0,60
$V_m =$	15,22	12,08	11,88	4,80,

sowie $\mathfrak{V}_0 = 0{,}14$, $V_0 = -9{,}26$ und $11{,}89$ tn. Für die Beanspruchungen S der Spannglieder und die Stützenreactionen erhält man wie in Beispiel 93 die dort berechneten Werthe. — Sollte bei Berechnung der Stützenreactionen das Eigengewicht der Spannglieder berücksichtigt werden, so wäre wie in Beispiel 97 zu verfahren.

Beispiel 99. Continuirliches Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen (Feste Hängebrücke oder Sprengbrücke). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke mit drei Oeffnungen von 12, 24, 12 m Spannweite sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 164

mit kreisförmigen Obergurten zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger in allen drei Oeffnungen $g = 0{,}7$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}8$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzbeanspruchungen der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Für die mittlere Oeffnung ergeben sich sämmtliche Stabkräfte wie im vorigen Beispiele. Die Stützenreactionen erhalten bei gleichem Vorgehen wie in Beispiel 94 die dort berechneten Werthe. Wir haben uns also nur noch mit den Stabkräften der äussern Oeffnungen zu beschäftigen, wobei wieder die Ordinaten nach unten und der Horizontalschub nach aussen positiv angenommen werden. Da das Gebilde der Stabaxen der Endöffnung demjenigen des ersten Trägerstücks der Mittelöffnung congruent ist, so hat man wie in Beispiel 87 und 98

für	$m =$	1	2	3	4:
	$\mathfrak{z}_m =$	1,86	3,08	3,77	4,00
	$h_m =$	2,64	1,42	0,73	0,50
	$z_m =$	3,53	3,24	3,08	3,01
	$d_m =$	4,00	3,32	3,09	3,04
	$\varepsilon =$	$-1{,}42$	$-1{,}16$	$-1{,}06$	$-2{,}17$,
	$v =$	$-2{,}16$	$-2{,}06$	$-3{,}17$	

und nach § 16, 11) 13) weiter

$$x_m = \lambda = 3, \qquad \mathfrak{x}_m = w_d = w_v = h_0 = 4{,}5.$$

Alle Längen sind in Metern gegeben.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 79, 7)

$$(1)\begin{cases} \mathfrak{X}_m = m(n-m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{g\lambda}{2} - \mathfrak{H}\left(\mathfrak{z}_m - \dfrac{m}{n}k\right)\dfrac{x_m}{\lambda h_m}, \\ \mathfrak{Z}_m = -(m-1)(n-m+1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{g\lambda}{2} + \mathfrak{H}\left(\mathfrak{z}_{m-1} - \dfrac{m-1}{n}k\right)\dfrac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ \mathfrak{D}_m = -\left(n-2m+1-m\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{g\lambda}{2} - \mathfrak{H}\left(w_d - \dfrac{m-\varepsilon}{n}k\right)\dfrac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}}, \\ \mathfrak{V}_m = \left(n-2m+\dfrac{g_x-g_z}{g} - m\dfrac{n-m}{v}\right)\dfrac{g\lambda}{2} + \mathfrak{H}\left(w_v - \dfrac{m-v}{n}k\right)\dfrac{1}{v\lambda}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen mit $l = 12$, $k = 4$, $n = 4$, $g = 0{,}7$,

$g_x = 0{,}4$, $g_s = 0{,}3$ und dem aus B. 93, 4) folgenden Horizontalschube $\mathfrak{H} = 12{,}6$ nachstehende Formen an:

$$\mathfrak{X}_m = 3{,}15\, m \frac{4-m}{h_m} - 12{,}6 \frac{\mathfrak{z}_m - m}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = -1{,}05\,(m-1)(5-m)\frac{z_m}{h_{m-1}} + 4{,}2\,(5{,}5-m)\frac{z_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = -1{,}05\left(5 - 2m - m\frac{4-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}} - 4{,}2\frac{4{,}5-m+\varepsilon}{\varepsilon}\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = 4{,}35 - 1{,}05\, m\left(2 + \frac{4-m}{\nu}\right) + 4{,}2\frac{4{,}5-m+\nu}{\nu}.$$

Wir erhalten danach mit Rücksicht auf die oben zusammengestellten Zahlenwerthe die Eigengewichtsbeanspruchungen in Tonnen für die X-Gurtung:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{3{,}15 \,.\, 3}{2{,}64} - \frac{12{,}6 \,.\, 0{,}86}{2{,}64} = 3{,}58 - 4{,}10 = -0{,}52$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{3{,}15 \,.\, 4}{1{,}42} - \frac{12{,}6 \,.\, 1{,}08}{1{,}42} = 8{,}87 - 9{,}58 = -0{,}71$$

$$\mathfrak{X}_3 = \frac{3{,}15 \,.\, 3}{0{,}73} - \frac{12{,}6 \,.\, 0{,}77}{0{,}73} = 12{,}95 - 13{,}29 = -0{,}34$$

$$\mathfrak{X}_4 = \frac{3{,}15 \,.\, 0}{0{,}5} - \frac{12{,}6 \,.\, 0}{0{,}5} = 0 - 0 = 0,$$

dieselben für die Z-Gurtung:

$$\mathfrak{Z}_1 = -1{,}05 \,.\, 0\,\frac{3{,}53}{4{,}5} + 4{,}2 \,.\, 4{,}5\,\frac{3{,}53}{4{,}5} = 0 + 14{,}83 = 14{,}83$$

$$\mathfrak{Z}_2 = -1{,}05 \,.\, 3\,\frac{3{,}24}{2{,}64} + 4{,}2 \,.\, 3{,}5\,\frac{3{,}24}{2{,}64} = -3{,}87 + 18{,}04 = 14{,}17$$

$$\mathfrak{Z}_3 = -1{,}05 \,.\, 4\,\frac{3{,}08}{1{,}42} + 4{,}2 \,.\, 2{,}5\,\frac{3{,}08}{1{,}42} = -9{,}11 + 22{,}77 = 13{,}66$$

$$\mathfrak{Z}_4 = -1{,}05 \,.\, 3\,\frac{3{,}01}{0{,}73} + 4{,}2 \,.\, 1{,}5\,\frac{3{,}01}{0{,}73} = -12{,}99 + 25{,}98 = 12{,}99,$$

für die Diagonalen:

$$\mathfrak{D}_1 = -1{,}05\left(3 + \frac{3}{1{,}42}\right)\frac{4}{4{,}5} + 4{,}2\,\frac{2{,}08 \,.\, 4}{1{,}42 \,.\, 4{,}5} = -4{,}77 + 5{,}47 = 0{,}70$$

$$\mathfrak{D}_2 = -1{,}05\left(1 + \frac{4}{1{,}16}\right)\frac{3{,}32}{2{,}64} + 4{,}2\,\frac{1{,}34 \,.\, 3{,}32}{1{,}16 \,.\, 2{,}64} = -5{,}87 + 6{,}10 = 0{,}23$$

$$\mathfrak{D}_3 = 1{,}05\left(1 - \frac{3}{1{,}06}\right)\frac{3{,}09}{1{,}42} + 4{,}2\,\frac{0{,}44 \,.\, 3{,}09}{1{,}06 \,.\, 1{,}42} = -4{,}18 + 3{,}79 = -0{,}39$$

$$\mathfrak{D}_4 = 1{,}05\left(3 - \frac{0}{2{,}17}\right)\frac{3{,}04}{0{,}73} - 4{,}2\,\frac{1{,}67 \,.\, 3{,}04}{2{,}17 \,.\, 0{,}73} = 13{,}12 - 13{,}46 = -0{,}34,$$

und für die Verticalen:

$$\mathfrak{V}_1 = 4{,}35 - 1{,}05 \,.\, 1\left(2 - \frac{3}{2{,}16}\right) - 4{,}2\,\frac{1{,}34}{2{,}16} = \quad 3{,}71 - 2{,}61 = 1{,}10$$

$$\mathfrak{V}_2 = 4{,}35 - 1{,}05 \,.\, 2\left(2 - \frac{2}{2{,}06}\right) - 4{,}2\,\frac{0{,}44}{2{,}06} = \quad 2{,}19 - 0{,}90 = 1{,}29$$

$$\mathfrak{V}_3 = 4{,}35 - 1{,}05 \,.\, 3\left(2 - \frac{1}{3{,}17}\right) - 4{,}2\,\frac{1{,}67}{3{,}17} = -0{,}96 + 2{,}21 = 1{,}25.$$

Für die Pfeilerverticale und Widerlagerverticale gelten nach A. 42, 7) 10) die Gleichungen

$$(2) \qquad \mathfrak{V}_0 = \frac{gl}{2} - \frac{\lambda g_s}{2} - \mathfrak{H}\left(\frac{h_1}{\lambda} - \frac{k}{l}\right), \qquad \mathfrak{V}_n = \frac{\lambda g_x}{2},$$

woraus

$$\mathfrak{V}_0 = 0{,}14 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{V}_n = 0{,}6 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Nach § 79 ergeben sich die Grenzwerthe einer Stabkraft, wenn wir dieselben zunächst ohne Rücksicht auf den Horizontalschub H (nach den Formeln des III. Abschnitts) berechnen, sodann den Beitrag des grösstmöglichen Horizontalschubs H der grössten gefundenen Grenzbeanspruchung gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinns) addiren, den Beitrag des Horizontalschubs für Eigengewicht allein aber der andern Grenzbeanspruchung zufügen. Ohne Rücksicht auf den Horizontalschub sind nach § 32 die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung

$$(3) \qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung

$$(4) \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonale 2, wegen $0 < m - \varepsilon < n$, mit § 19, 4),

$$(5) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(\varepsilon - m + n)\,(m-1)^2}{(n-1)\,\varepsilon - n + m}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{D}_m - (D_m), \end{cases}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonale 1 wegen $m = 1$ und diejenigen der Diagonalen 3, 4 wegen $m - \varepsilon > n$

$$(6) \qquad D_m = \frac{g}{q}\,\mathfrak{D}_m, \qquad D_m = \mathfrak{D}_m,$$

die Grenzbeanspruchungen der Verticale 1 wegen $m = 1$ und diejenigen der Verticalen 2, 3 wegen $m - \nu > n$, mit § 19, 10),

(7) $$V_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_m + \frac{p\lambda}{g}\,g_s, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m.$$

In diesen Gleichungen bedeuten $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ die für $\mathfrak{H} = 0$ eintretenden Eigengewichtsbeanspruchungen, welche wir deshalb oben neben den von $\mathfrak{H}$ allein herrührenden gesondert angeführt haben. In der zweiten Gleichung 5) bezeichnet (D_m) den ersten Grenzwerth, sodass die beiden Grenzbeanspruchungen der Diagonale 2

$$D_2 = -5{,}87 - \frac{0{,}84\,.\,3{,}32}{5{,}48\,.\,2{,}64}\,4{,}2 = -6{,}68 \text{ tn},$$

$$D_2 = -6\,.\,5{,}87 + 6{,}68 = -28{,}54 \text{ tn}.$$

Da nun nach § 79, 2) 3) die Beiträge des grössten Horizontalschubs H zu den Stabkräften

(8) $$\begin{cases} X'_m = -H\left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}k\right)\frac{x_m}{\lambda h_m} = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}'_m, \\ Z'_m = H\left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}k\right)\frac{z_m}{\lambda h_{m-1}} = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}'_m, \\ D'_m = -H\left(w_d - \frac{m-\varepsilon}{n}k\right)\frac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}} = \frac{q}{g}\,\mathfrak{D}'_m, \\ V'_m = H\left(w_v - \frac{m-v}{n}k\right)\frac{1}{v\lambda} = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}'_m, \end{cases}$$

und die Beiträge $\mathfrak{X}'_m$, $\mathfrak{Z}'_m$, $\mathfrak{D}'_m$, $\mathfrak{V}'_m$ für Eigengewicht allein bereits berechnet wurden, so erhalten wir in oben erwähnter Weise mit $q:g = 5$ in Tonnen die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

$$\begin{array}{ll} X_1 = 5\,.\;\;3{,}58 - \;\;4{,}10 = 13{,}80 & X_1 = \;\;3{,}58 - 5\,.\;\;4{,}10 = -16{,}92 \\ X_2 = 5\,.\;\;8{,}87 - \;\;9{,}58 = 34{,}77 & X_2 = \;\;8{,}87 - 5\,.\;\;9{,}58 = -39{,}03 \\ X_3 = 5\,.\,12{,}95 - 13{,}29 = 51{,}46 & X_3 = 12{,}95 - 5\,.\,13{,}29 = -54{,}50 \\ X_4 = 5\,.\;\;0 \;\;- \;\;0 \;\;= 0 & X_4 = \;\;0 \;\;- 5\,.\;\;0 \;\;= \;\;0, \end{array}$$

die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:

$$\begin{array}{l} Z_1 = \;\;\;\;5\,.\;\;0 \;\;+ 14{,}82 = \;\;\;14{,}82 \\ Z_2 = -5\,.\;\;3{,}87 + 18{,}04 = -\;\;1{,}31 \\ Z_3 = -5\,.\;\;9{,}11 + 22{,}77 = -22{,}78 \\ Z_4 = -5\,.\,12{,}99 + 25{,}98 = -38{,}97, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Z_1 = \;\;\;\;\;0 \;\;\;+ 5\,.\,14{,}82 = \;\;74{,}10 \\ Z_2 = -\;\;3{,}87 + 5\,.\,18{,}04 = \;\;86{,}33 \\ Z_3 = -\;\;9{,}11 + 5\,.\,22{,}77 = 104{,}74 \\ Z_4 = -12{,}99 + 5\,.\,25{,}98 = 116{,}91, \end{array}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$\begin{aligned} D_1 &= -5 \,.\, 4{,}77 + 5{,}47 = -18{,}38 \\ D_2 &= -28{,}54 + 6{,}10 = -22{,}44 \\ D_3 &= -5 \,.\, 4{,}18 + 3{,}79 = -17{,}11 \\ D_4 &= 5 \,.\, 13{,}12 - 13{,}42 = 52{,}14, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= -4{,}77 + 5 \,.\, 5{,}47 = 22{,}58 \\ D_2 &= -6{,}68 + 5 \,.\, 6{,}10 = 23{,}82 \\ D_3 &= -4{,}18 + 5 \,.\, 3{,}79 = 14{,}77 \\ D_4 &= 13{,}12 - 5 \,.\, 13{,}46 = -54{,}18, \end{aligned}$$

und diejenigen der Verticalen:

$$\begin{aligned} V_1 &= 5 \,.\, 3{,}71 - 2{,}61 = 15{,}94 \\ V_2 &= 5 \,.\, 2{,}19 - 0{,}90 = 10{,}05 \\ V_3 &= -5 \,.\, 0{,}96 + 2{,}21 = -2{,}59, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= 3{,}71 - 5 \,.\, 2{,}61 = -9{,}34 \\ V_2 &= 2{,}19 - 5 \,.\, 0{,}90 = -2{,}31 \\ V_3 &= -0{,}96 + 5 \,.\, 2{,}21 = 10{,}09. \end{aligned}$$

Ausnahmsweise hat man nach A. 42, 6) die Grenzbeanspruchungen der Pfeilerverticale

$$(9) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 + \frac{pl}{2}, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \left(\frac{z_1}{\lambda} - \frac{k}{l}\right)\left(\frac{pl^2}{8f}\right)_z,$$

wobei der Index z andeutet, dass sich der betreffende Ausdruck auf die Oeffnung mit Zwischengelenk bezieht, — und diejenigen der Widerlegerverticale nach A. 42, 9)

$$(10) \qquad V_n = \mathfrak{V}_n + \frac{p\lambda}{2}, \qquad V_n = \mathfrak{V}_n.$$

Diese Gleichungen liefern:

$$V_0 = 16{,}94, \quad V_0 = -14{,}34, \quad V_4 = 4{,}8, \quad V_4 = 0{,}6 \text{ tn}.$$

Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt. Dieselben wurden in Fig. 165 für eine Trägerhälfte eingetragen.

Bemerkungen. Die oben berechneten Stabkräfte für Eigengewicht allein stimmen genau mit den gleichbezeichneten der Mittelöffnung überein. Dies konnten wir von vornherein wissen, da das Gebilde der Stabaxen der Endöffnung demjenigen eines Trägerstücks der Mittelöffnung congruent ist und wegen $g = g_0$ für Eigengewicht allein auch die äussern Kräfte dieselben sind. Man kann also in solchen Fällen die Rechnung abkürzen, was wir hier unterlassen haben,

um auch das allgemeinere Verfahren zu zeigen und weil Proberechnungen immer nützlich sind.

Da p, g in allen Oeffnungen gleich gross angenommen wurden, so bestehen für die Grenzbeanspruchungen der Stäbe im Ganzen nach § 19, 2) 3) 4) 8) die Gleichungen

$$(11) \begin{cases} X_m = \frac{q+g}{g}\mathfrak{X}_m - (X_m), & Z_m = \frac{q+g}{g}\mathfrak{Z}_m - (Z_m), \\ D_m = \frac{q+g}{g}\mathfrak{D}_m - (D_m), & V_m = \frac{q+g}{g}\mathfrak{V}_m - (V_m) + \frac{pl}{g}g_s, \end{cases}$$

von welchen wir keinen Gebrauch machten und mittelst deren also Proben vorgenommen werden können. — In den Gleichungen 8) beziehen sich q, g auf die Oeffnung mit Zwischengelenk, worauf zu achten, wenn diese Grössen nicht in allen Oeffnungen gleichwerthig angenommen werden.

Hätte der Träger neben der Oeffnung mit Zwischengelenk nur eine Oeffnung ohne Zwischengelenk gehabt, so würde die Berechnung ganz wie oben durchzuführen gewesen und die Reaction V, H der einen Endstütze wie in Beispiel 87 bestimmt geblieben sein. Bezüglich dieser Reaction bei Anschluss eines Spanngliedes (Fig. 163) siehe Beispiel 98.

Wäre der Träger als Sprengbogen nach Art von Fig. 166 angeordnet worden (in welchem Falle wir den Horizontalschub nach innen und die Ordinaten nach unten positiv annehmen), so würde für die Stabkräfte der Oeffnung mit Zwischengelenk die Berechnung in Beispiel 87 ohne jede Aenderung gelten, für die Stabkräfte der Oeffnung ohne Zwischengelenk aber die obige Berechnung mit dem einzigen Unterschiede, dass in den verwendeten Gleichungen der §§ 19, 32, 79 und Aufgabe 42 der dann oben liegenden X-Gurtung entsprechend die oberen statt der unteren Vorzeichen zu verwenden wären, womit alle Stabkräfte die oben gefundenen Zahlenwerthe mit entgegengesetzten Vorzeichen erhielten. Die Stützenreactionen würden wie oben bestimmt bleiben. Im nächsten Beispiele ist die Berechnung für bewegte Radlastzüge gegeben.

Beispiel 100. Continuirliches Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Für eine eingeleisige Eisenbahnbrücke sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 166 mit kreisförmigen Untergurten

zur Verwendung kommen. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}7$ tn, wovon 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen, wenn die Brücke durch Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, befahren wird.

Die mittlere Oeffnung stellt ein Bogenfachwerk mit drei Gelenken dar, dessen vollständige Berechnung in Beispiel 88 gezeigt wurde. Auch die Grenzwerthe des Horizontalschubs bleiben wie dort

$$\mathfrak{H} = 12{,}6 \text{ tn}, \qquad H = 12{,}6 + 49{,}94 = 62{,}54 \text{ tn}.$$

Die in Beispiel 87 durchgeführte Berechnung der Form und der Eigengewichtsbeanspruchungen für die Mittelöffnung gilt auch für die Endöffnung, da das Gebilde der Stabaxen in letzterer demjenigen eines Trägerstücks der ersteren congruent ist und bei Eigengewicht allein mit gleichem g auch die äussern Kräfte übereinstimmen (vergl. auch die Bemerkungen zum vorigen Beispiele).

Nach § 79 ergeben sich die Grenzwerthe der Stabkräfte in den äussern Oeffnungen, wenn man den Beitrag des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p zu dem für $H_p = 0$ entstehenden grössten Grenzwerthe gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, den andern aber wie für $H_p = 0$ annimmt. Die Grenzwerthe für $H_p = 0$ sind nach § 33 für die X-Gurtung $X_m = \mathfrak{X}_m$ und mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei Verticale m,

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m - \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{x_m}{l h_m},$$

für die Z-Gurtung $Z_m = \mathfrak{Z}_m$ und mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei Verticale $m - 1$,

$$(2) \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m + \left[(n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^n P(l-a)\right]\frac{z_m}{l h_{m-1}}.$$

Wir setzen die Gleichungen für die erste Richtung des Zuges I an und fügen die der zweiten Richtung entsprechenden Resultate in Klammern bei. Es zeigt sich dann, wie in fast allen andern Fällen, dass die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung allein genügt hätte. Aus 1) folgt für die X-Gurtung:

$$X_1 = 0{,}52 - (3\,.\,30{,}2 + 1\,.\,89{,}4)\,\frac{1}{4\,.\,2{,}64} = -\,16{,}53 \text{ tn } (-\,16{,}01)$$

$$X_2 = 0{,}71 - (2\,.\,80{,}7 + 2\,.\,32{,}4)\,\frac{1}{4\,.\,1{,}42} = -\,39{,}08 \;\text{„}\; (-\,39{,}08)$$

$$X_3 = 0{,}35 - (1\,.\,144 + 3\,.\,10{,}2)\,\frac{1}{4\,.\,0{,}73} = -\,59{,}44 \;\text{„}\; (-\,61{,}29)$$

$$X_4 = 0 \quad - (0\,.\,226 + 4\,.\;0\;)\,\frac{1}{4\,.\,0{,}5} = \quad 0 \;\text{„}\; (\;0\;)$$

und aus 2) für die Z-Gurtung:

$$Z_1 = -\,14{,}82 + (4\,.\;0\; + 0\,.\,173)\,\frac{3{,}53}{12\,.\,4{,}5} = -\,14{,}82 \text{ tn } (-\,14{,}82)$$

$$Z_2 = -\,14{,}17 + (3\,.\,30{,}2 + 1\,.\,89{,}4)\,\frac{3{,}24}{12\,.\,2{,}64} = \quad 4{,}34 \;\text{„}\; (\;3{,}69)$$

$$Z_3 = -\,13{,}66 + (2\,.\,80{,}7 + 2\,.\,32{,}4)\,\frac{3{,}08}{12\,.\,1{,}42} = \quad 27{,}19 \;\text{„}\; (\;27{,}19)$$

$$Z_4 = -\,12{,}99 + (1\,.\,144 + 3\,.\,10{,}2)\,\frac{3{,}01}{12\,.\,0{,}73} = \quad 47{,}00 \;\text{„}\; (\;48{,}86).$$

Nach § 33 hat man für $H_p = 0$ die Beanspruchungen der Diagonalen und Verticalen bei beliebiger Belastung

$$(3)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[(n-m+\varepsilon)\sum\limits_0^{m-1} Pa + (n\varepsilon - \varepsilon - n + m)\sum\limits_{m-1}^{m} P(z-a) \\ \qquad + (m-\varepsilon)\sum\limits_m^n P(l-a)\Big]\,\dfrac{d_m}{\varepsilon\, l\, h_{m-1}} \\ \qquad \text{mit } z = \dfrac{m-1}{(n-1)\,\varepsilon - n + m}\,\varepsilon l, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m + \Big[(n-m+\nu)\sum\limits_0^{m-1} Pa + (n\nu - \nu - n + m)\sum\limits_{m-1}^{m} P(z-a) \\ \qquad + (m-\nu)\sum\limits_m^n P(l-a)\Big]\,\dfrac{1}{\nu l} \\ \qquad \text{mit } z = \dfrac{m-1}{(n-1)\,\nu - n + m}\,\nu l. \end{cases}$$

Da hiernach im Falle	$m =$	1	2	3	4:
für die Diagonalen	$z =$	0	2,54	6,09	12 m,
für die Verticalen	$z =$	0	3,02	7,23 m,	

so ergeben sich nach §§ 33, 25 die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen 1, 2, 4 für Eigengewicht allein und mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei Verticale 1 bezw. 2 und 3, die Grenzwerthe von D_3 mit Zug I von z bis l, Rad O bei Verticale 3 und mit Zug II von 0 bis Verticale 2, Vorderrad O bei der letzteren, die Grenzwerthe von V_1

für Eigengewicht allein und mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei Verticale 1, die Grenzwerthe von V_2 mit Zug I von s bis l, Rad O bei Verticale 2 und mit Zug II von 0 bis Verticale 1, Vorderrad O bei der letzteren, die Grenzwerthe von V_3 mit Zug II von Verticale 3 bis l, Vorderrad O bei jener Verticale und mit Zug II von 0 bis Verticale 2, Vorderrad O bei der letzteren. Wir erhalten so aus 3) 4) die noch fehlenden Grenzwerthe für die Diagonalen:

$$D_1 = -0{,}70 + [7{,}26.30{,}2 + 2{,}42.89{,}4] \frac{4}{1{,}42 . 12 . 4{,}5} = 22{,}72 \text{ tn } (22{,}04)$$

$$D_2 = -0{,}23 + [0{,}84.5.0{,}5 + 5{,}48(4.0{,}96 + 6.2{,}16 + 6.3{,}46) + 3{,}16.32{,}4] \frac{3{,}32}{1{,}16 . 12 . 2{,}64} = 26{,}20 \text{ tn } (27{,}83)$$

$$D_3 = 0{,}39 + [4{,}18(6.2{,}91 + 6.1{,}61 + 4.0{,}41) + 4{,}06.10{,}2] \frac{3{,}09}{1{,}06 . 12 . 1{,}42} = 28{,}04 \text{ tn } (28{,}18)$$

$$D_3 = 0{,}39 - 0{,}06.93{,}4 \frac{3{,}09}{1{,}06 . 12 . 1{,}42} = -0{,}57 \text{ tn}$$

$$D_4 = 0{,}34 - [144 + 3.10{,}2] \frac{3{,}04}{12 . 0{,}73} = -61{,}25 \text{ tn } (-63{,}12),$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = -1{,}10 - [9{,}48.30{,}2 + 3{,}16.89{,}4] \frac{1}{2{,}16 . 12} = -23{,}04 \text{ tn } (-22{,}39)$$

$$V_2 = -1{,}29 - [8{,}18(6.2{,}98 + 6.1{,}68 + 4.0{,}48) + 4{,}06.32{,}4] \frac{1}{2{,}06 . 12} = -16{,}50 \text{ tn } (-17{,}88)$$

$$V_2 = -1{,}29 + 0{,}06.30{,}6 \frac{1}{2{,}06 . 12} = -1{,}22 \text{ tn}$$

$$V_3 = -1{,}26 - 6{,}17.30{,}6 \frac{1}{3{,}17 . 12} = -6{,}22 \text{ tn}$$

$$V_3 = -1{,}26 + 2{,}17.93{,}4 \frac{1}{3{,}17 . 12} = 4{,}07 \text{ tn}.$$

Die Beiträge des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs zu den Stabkräften sind nach § 79, 2) 3)

$$(5) \quad \begin{cases} X'_m = H_p \left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n} k\right) \frac{x_m}{\lambda h_m} = \alpha \mathfrak{X}'_m, \\ Z'_m = -H_p \left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n} k\right) \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}} = \alpha \mathfrak{Z}'_m, \\ D'_m = H_p \left(w_d - \frac{m-\varepsilon}{n} k\right) \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} = \alpha \mathfrak{D}'_m, \\ V'_m = -H_p \left(w_v - \frac{m-v}{n} k\right) \frac{1}{v\lambda} = \alpha \mathfrak{V}'_m, \end{cases}$$

worin $\alpha = H_p : \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{X}'_m$, $\mathfrak{Z}'_m$, $\mathfrak{D}'_m$, $\mathfrak{V}'_m$ die Beiträge des vom Eigengewichte herrührenden Horizontalschubs bedeuten. Sind diese wie in Beispiel 99 für sich berechnet, so wird man natürlich die zweiten Ausdrücke 5) verwenden. Im vorliegenden Falle ist $\alpha = 49{,}94 : 12{,}6 = 3{,}963$. Nach den ersten oder zweiten Ausdrücken 5) erhält man

für $m =$	1	2	3	4:
$X'_m =$	16,25	37,97	52,67	0
$Z'_m =$	− 58,75	− 71,49	− 90,24	− 102,96
$D'_m =$	− 21,68	− 24,17	− 15,02	53,34
$V'_m =$	10,34	3,57	− 8,76.	

Werden diese Beiträge zu den grössten oben erhaltenen Grenzwerthen gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, die andern aber ungeändert gelassen, so ergeben sich die resultirenden Grenzbeanspruchungen in Tonnen für die X-Gurtung:

$$X_1 = 0{,}52 + 16{,}25 = 16{,}77 \qquad X_1 = -16{,}53$$
$$X_2 = 0{,}71 + 37{,}97 = 38{,}68 \qquad X_2 = -39{,}08$$
$$X_3 = 0{,}35 + 52{,}67 = 53{,}02 \qquad X_3 = -61{,}29$$
$$X_4 = 0 - 0 = 0 \qquad X_4 = 0,$$

für die Z-Gurtung:

$$Z_1 = -14{,}82 - 58{,}75 = -73{,}57 \qquad Z_1 = -14{,}82$$
$$Z_2 = -14{,}17 - 71{,}49 = -85{,}66 \qquad Z_2 = 4{,}34$$
$$Z_3 = -13{,}66 - 90{,}24 = -103{,}90 \qquad Z_3 = 27{,}19$$
$$Z_4 = -12{,}99 - 102{,}96 = -115{,}95 \qquad Z_4 = 48{,}86,$$

für die Diagonalen:

$$D_1 = -0{,}70 - 21{,}68 = -22{,}38 \qquad D_1 = 22{,}72$$
$$D_2 = -0{,}23 - 24{,}17 = -24{,}40 \qquad D_2 = 27{,}83$$
$$D_3 = -0{,}57 - 15{,}02 = -15{,}59 \qquad D_3 = 28{,}18$$
$$D_4 = 0{,}34 + 53{,}34 = 53{,}68 \qquad D_4 = -63{,}12,$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = -1{,}10 + 10{,}34 = 9{,}24 \qquad V_1 = -23{,}04$$
$$V_2 = -1{,}22 + 3{,}57 = 2{,}35 \qquad V_2 = -17{,}88$$
$$V_3 = -6{,}22 - 8{,}76 = -14{,}98 \qquad V_3 = 4{,}07.$$

Die Grenzwerthe von V_0 sind nach A. 42, 4) 5) bei Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0,

(6) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a)$$

und mit dem grössten H_p

(7) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 + \left(\frac{h_1}{\lambda} - \frac{k}{l}\right) H_p.$$

Für die Grenzwerthe von V_n hat man nach A. 42

(8) $$V_n = -K_x, \qquad V_n = \mathfrak{V}_n,$$

unter K_x die grösste darüber liegende Knotenpunktslast verstanden. Wir erhalten

$$V_0 = -0{,}14 - \frac{257}{12} = -21{,}56$$

$$V_0 = -0{,}14 + \left(\frac{1{,}86}{3} - \frac{4}{12}\right) 49{,}94 = 14{,}19$$

$$V_4 = -0{,}6 - 6 - 6\,\frac{1{,}7}{3} - 6\,\frac{0{,}5}{3} = -10{,}8$$

$$V_4 = -0{,}6 \text{ tn.}$$

Die Stützenreactionen erhalten bei gleichem Vorgehen wie in Beispiel 95 die dort berechneten Werthe. Sämmtliche Grenzwerthe einer Trägerhälfte sind in Fig. 167 eingetragen.

Bemerkungen. Wir haben oben die Belastungen der Bemerkung am Schlusse des § 25 entsprechend mit Rücksicht auf die Lagen der Grenzpunkte z der Beitragsstrecken gewählt. Doch würde es auch genügt haben, sich einfach an die Vorschriften des § 33 zu halten.

Hätte der Träger neben der Oeffnung mit Zwischengelenk nur eine Oeffnung ohne Zwischengelenk gehabt, so würde die Berechnung ganz wie hier durchzuführen gewesen und die Reaction V, H der einen Endstütze wie in Beispiel 88 geblieben sein. Wäre der Träger als Hängebogen nach Art von Fig. 164 angeordnet gewesen, so würden sich bei gleichem Vorgehen wie oben wegen geänderter Lage der X-Gurtung für gleiche g_x, g_s alle Stabkräfte den Zahlenwerthen nach wie oben mit entgegengesetzten Vorzeichen ergeben haben. Die Stützenreactionen würden wie oben geblieben sein, dabei jedoch der Horizontalschub nach Aussen als positiv gelten.

Hätten wir den betrachteten Träger mit demjenigen constanten p berechnet, welches für einen direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 24 m auf zwei Stützen dem max M_x bei der Trägermitte entspricht ($p = 2{,}77$ oder abgerundet 2,8 nach Beispiel 8), so würden sich die Stützenreactionen wie im vorigen Beispiele und sämmtliche Stabkräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen den Zahlen-

werthen nach wie dort ergeben haben. Diese Werthe zeigen den obigen gegenüber bedeutende Abweichungen.

Beispiel 101. Continuirliches Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen (und Gegendiagonalen). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke sollen continuirliche Bogenträger nach der Anordnung Fig. 168 mit Oeffnungen von 21, 24, 21 m zur Verwendung kommen. Trägerhöhe der Mittelöffnung bei den Stützen 4,5 m, in der Mitte 0,5 m, die Untergurtaxe dieser Oeffnung ist einem Kreisbogen eingeschrieben. Eigengewicht per laufenden Meter Träger für die Mittelöffnung 0,7 tn, für die äussern Oeffnungen 0,6 tn, Verkehrslast per laufenden Meter der ergriffenen Strecke 2,8 tn. Vom Eigengewichte kommen 0,4 tn per laufenden Meter auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, der Rest auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Die vollständige Berechnung für die Mittelöffnung ist in Beispiel 87 gezeigt, woselbst sich auch die Grenzwerthe des Horizontalschubs ergaben

$$\mathfrak{H} = 12,6 \text{ tn}, \qquad H = 12,6 + 50,4 = 63 \text{ tn}.$$

Wir haben uns also nur noch mit den Stabkräften der äussern Oeffnungen und den Verticalreactionen der Stützen zu beschäftigen.

Eigengewicht allein. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Beanspruchungen sind nach § 79, 17) 19) und § 34, 6)

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\, m(n-m)\dfrac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = (m-1)(n-m+1)\dfrac{g\lambda^2}{2h} - \mathfrak{H}, \\ \mathfrak{D}_m = (n-2m+1)\dfrac{g\lambda d}{2h}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(n-2m+\dfrac{g_x-g_z}{g}\right)\dfrac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen mit $n = 7$, $\lambda = 3$, $h = 4,5$, $d = 5,41$, $g = 0,6$, $g_x = 0,4$, $g_z = 0,2$, $\mathfrak{H} = 12,6$ folgende Formen an:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_m &= -\,0,6\, m\,(7-m), \\ \mathfrak{Z}_m &= (m-1)(8-m) - 12,6, \\ \mathfrak{D}_m &= 2,164\,(4-m), \\ \mathfrak{V}_m &= 1,8\, m - 6,6, \end{aligned}$$

woraus in Tonnen folgen:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{X}_1 = -3{,}6 & \mathfrak{Z}_1 = -12{,}6 & \mathfrak{D}_1 = 6{,}49 & \mathfrak{V}_1 = -4{,}8 \\ \mathfrak{X}_2 = -6{,}0 & \mathfrak{Z}_2 = -9{,}0 & \mathfrak{D}_2 = 4{,}33 & \mathfrak{V}_2 = -3{,}0 \\ \mathfrak{X}_3 = -7{,}2 & \mathfrak{Z}_3 = -6{,}6 & \mathfrak{D}_3 = 2{,}16 & \mathfrak{V}_3 = -1{,}2. \\ \mathfrak{X}_4 = -7{,}2 & \mathfrak{Z}_4 = -5{,}4 & \mathfrak{D}_4 = 0 & \end{array}$$

Für die Pfeilerverticale hat man nach A. 42, 7)

(2) $$\mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_z}{2} - \frac{g\,l}{2},$$

und hiernach $\mathfrak{V}_0 = -6{,}0$ tn. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Verticalreactionen einer Zwischenstütze und einer Endstütze sind nach § 78, 8) 15) mit $k = 0$

(3) $$\mathfrak{R} = \frac{g\,l}{2} + \frac{g_0\,l_0}{2}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{g_0\,l_0}{2},$$

wobei Grössen mit dem Index 0 der anliegenden äussern Oeffnung entsprechen. Wir erhalten so

$$\mathfrak{R} = 0{,}7\,.\,12 + 0{,}6\,.\,10{,}5 = 14{,}7 \text{ tn},$$
$$\mathfrak{B} = 0{,}6\,.\,10{,}5 = 6{,}3 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Nach § 79 sind die Grenzbeanspruchungen aller Stäbe mit Ausnahme derjenigen des geraden Verbindungsgurts der Auflager genau wie für Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern bestimmt. Wir haben also nach § 35 für die X-Gurtung

(4) $$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

für die Diagonalen

(5) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n-m)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)2h}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - (m-1)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)2h}, \end{cases}$$

und für die Verticalen

(6) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m - (n-m)^2 \dfrac{p\lambda}{(n-1)2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m + (m-1)^2 \dfrac{p\lambda}{(n-1)2}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen mit

$$\frac{q}{g} = 5{,}667, \qquad \frac{p\lambda}{2(n-1)} = 0{,}7, \qquad \frac{p\lambda}{2h(n-1)} = 0{,}842$$

die oberen Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung

$$\begin{array}{ll} X_1 = -20{,}40 & X_3 = -40{,}80 \\ X_2 = -34{,}00 & X_4 = -40{,}80, \end{array}$$

und beide Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder:

$$\begin{array}{llll} D_1 = 36{,}80 \text{ und } 6{,}49 & V_1 = -30{,}0 \text{ und } -4{,}8 \\ D_2 = 25{,}38 \quad 3{,}49 & V_2 = -20{,}5 \quad -2{,}1 \\ D_3 = 15{,}58 \quad -1{,}21 & V_3 = -12{,}4 \quad 1{,}6. \\ D_4 = 7{,}58 \quad -7{,}58 & \end{array}$$

Für die Pfeilerverticale hat man nach A. 42, 6)

$$(7) \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{pl}{2}, \qquad V_0 = \mathfrak{V},$$

also $V_0 = -35{,}4$ und $-6{,}0$ tn:

Die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung ergeben sich nach § 79, wenn man den Beitrag des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p zu dem für $H_p = 0$ eintretenden grössten Grenzwerth gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, den andern aber wie für $H_p = 0$ annimmt. Wir erhalten so nach § 35, 2) mit § 79, 19)

$$(8) \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m + (m-1)(n-m+1)\frac{p\lambda^2}{2h}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - H_p,$$

und hiernach in Tonnen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -12{,}6 + 0.7.2{,}8 = -12{,}6 \\ Z_2 &= -9{,}0 + 1.6.2{,}8 = 7{,}8 \\ Z_3 &= -6{,}6 + 2.5.2{,}8 = 21{,}4 \\ Z_4 &= -5{,}4 + 3.4.2{,}8 = 28{,}2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= -12{,}6 - 50{,}4 = -63{,}0 \\ Z_2 &= -9{,}0 - 50{,}4 = -59{,}4 \\ Z_3 &= -6{,}6 - 50{,}4 = -57{,}0 \\ Z_4 &= -5{,}4 - 50{,}4 = -55{,}8. \end{aligned}$$

Die unteren Grenzwerthe der Verticalreactionen sind die für Eigengewicht allein berechneten, die oberen hat man nach § 78, 7) 12)

$$(9) \qquad R = \mathfrak{R} + \frac{pl}{2} + \frac{p_0 l_0}{2}, \qquad B = \mathfrak{B} + \frac{p_0 l_0}{2},$$

woraus

$$\begin{aligned} R &= 14{,}7 + 1{,}4\,(24 + 21) = 77{,}7 \text{ tn}, \\ B &= 6{,}3 + 1{,}4 . 21 = 35{,}7 \text{ tn}. \end{aligned}$$

Die Grenzwerthe der Horizontalreactionen der Endstützen sind die Grenzwerthe von H.

Sollen die Diagonalen der äussern Oeffnungen nur auf Zug widerstehen, so sind in den drei mittleren Feldern Gegendiagonalen anzuordnen. Eer Einfluss derselben ist durch den am Schlusse des § 50

hervorgehobenen Satz bestimmt, da H die Beanspruchungen der Diagonalen ungeändert lässt. Dabei ist zu beachten, dass die Maximalbelastung eines oberen Knotenpunktes

$$K_o = 0{,}4\,.\,3 + 2{,}8\,.\,3 = 9{,}6 \text{ tn}.$$

In der Mittelöffnung können der geringeren Diagonalenlängen wegen Gegendiagonalen eher entbehrt werden. Sämmtliche bei Anordnung von Gegendiagonalen in den äussern Oeffnungen entstehenden Grenzwerthe sind in Fig. 169 für eine Trägerhälfte eingetragen.

Bemerkungen. Hätte der Träger neben der Oeffnung mit Zwischengelenk nur *eine* Oeffnung ohne Zwischengelenk gehabt, so würde die Berechnung ganz wie oben durchzuführen gewesen und die Reaction V, H der einen Endstütze wie in Beispiel 87 geblieben sein.

Wäre die untere Gurtung der äussern Oeffnungen nicht horizontal angeordnet, so würden auch die Stäbe der oberen Gurtung und Füllungsglieder durch H beansprucht sein. Für Eigengewicht allein hätte man nach § 79, 7) mit $k = 0$, $x_m = \lambda$, $\mathfrak{x}_m = w_d = w_v = h_0$:

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\left[m(n-m) - \dfrac{2\,\mathfrak{z}_m}{g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\right]\dfrac{g\lambda^2}{2\,h_m}, \\ \mathfrak{Z}_m = \left[(m-1)(n-m+1) - \dfrac{2h_0}{g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\right]\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \left[n - 2m + 1 - m\,\dfrac{n-m}{\varepsilon} + \dfrac{2h_0}{\varepsilon g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\right]\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left[n - 2m + \dfrac{g_x - g_z}{g} - m\,\dfrac{n-m}{\nu} + \dfrac{2h_0}{\nu g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\right]\dfrac{g\lambda}{2}, \end{cases}$$

während die Beiträge des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p zu den Stabkräften nach § 79, 2) wären

$$(11)\quad \begin{cases} X'_m = H_p\,\dfrac{\mathfrak{z}_m}{h_m}, & Z'_m = -\,H_p\,\dfrac{h_0 z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ D'_m = H_p\,\dfrac{h_0 d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}}, & V'_m = -\,H_p\,\dfrac{h_0}{\nu\lambda}. \end{cases}$$

Mit diesen und den aus § 32 für $H_p = 0$ entnommenen Formeln hätte man sämmtliche Stabkräfte analog wie oben Z_m zu berechnen, wenn man nicht etwa vorzöge, die Grenzwerthe der Stabkräfte für $H_p = 0$ wie in Beispiel 100 zunächst numerisch zu ermitteln und dann die Beiträge von H zuzufügen. Die Stützenreactionen bleiben wie oben bestimmt.

Wären auch die äussern Oeffnungen von 24 m Spannweite gewesen, so hätte man auf den Gedanken kommen können, sie geometrisch gleich der Mittelöffnung anzuordnen, abgesehen natürlich

vom Scheitelgelenke. Dies würde aber nicht zweckmässig sein, weil damit bei geringem Horizontalschube (wenn in der Mittelöffnung nur Eigengewicht wirkt) um die Mitten der äussern Oeffnungen der geringen Trägerhöhe wegen unverhältnissmässig starke Beanspruchungen entstehen könnten. Beispielsweise hätten wir mit $g = g_0 = 0,7$ bei gleichen Eigengewichtsbeanspruchungen wie in der Mittelöffnung (wegen gleicher äusserer Kräfte bei gleicher geometrischer Anordnung) die negativen Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung und die positiven der Z-Gurtung in Tonnen:

$$X_1 = -\ 32,89 \qquad Z_1 = -\ 12,82$$
$$X_2 = -\ 105,77 \qquad Z_2 = 23,26$$
$$X_3 = -\ 258,90 \qquad Z_3 = 95,14$$
$$X_4 = -\ 403,20 \qquad Z_4 = 246,77\,.$$

Anstatt, wie bei den bis jetzt betrachteten continuirlichen Bogenträgern, die Grenzen der Trägerstücke über die Pfeiler zu legen, was sich im Allgemeinen empfehlen wird, könnte man sie unter besonderen Verhältnissen unbeschadet der statisch bestimmten Stabilität auch wie in Fig. 170 in der Mittelöffnung oder in beiden äussern Oeffnungen anordnen. Die Mittelöffnung der Fig. 170 unterscheidet sich von dem in Fig. 171 angedeuteten Bogen mit 5 Gelenken der Brücke über den Magdalenenstrom bei Honda in Columbien nur dadurch, dass die in Fig. 171 mit 1 und 4 bezeichneten Horizontalreactionen vom Träger selbst geliefert werden. Von dem continuirlichen Gelenkträger Fig. 131, 137 weicht die Trägerart Fig. 170 insofern ab, als an Stelle der Gleitung bei einem Auflager, durch welche eine statische Bedingungsgleichung geliefert wird (Reactionscomponente längs der Bahn gleich Null), ein weiteres Gelenke in der Trägermitte tritt (Moment in Hinsicht des Gelenks gleich Null). Bei der Brücke über den Magdalenenstrom (Spannweite 109,728 m, Bogenpfeil 15,85 m, Entfernung der „Hüftgelenke“ von den Kämpfergelenken 3 Feldlängen bei 16 gleichen Feldern im Ganzen, vergl. die Aufsätze von *Bosse* und *Backhaus*, Zeitschrift d. Ver. deutscher Ingenieure 1886) war es die Nothwendigkeit der Vermeidung von Strompfeilern und der Aufstellung ohne Gerüste, welche zu der gewählten Anordnung führte. Selbstverständlich lassen sich die Träger Fig. 170, 171 bei einfachem Systeme mit Verticalen für beliebige Belastung nach den Gleichungen der §§ 16—20 berechnen, welche mit Hülfe der Verfahren § 12, d, e, f auch die Grenzwerthe liefern

können. Für den mittleren Theil kommen bequemer die Formeln für Träger mit drei Gelenken zur Verwendung.

Beispiel 102. Continuirliches Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen (und Gegendiagonalen). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Die Verhältnisse der Mittelöffnung sind in Beispiel 88 vollständig festgestellt, woselbst sich auch als Grenzwerthe des Horizontalschubs ergaben

$$\mathfrak{H} = 12{,}6 \qquad H = 12{,}6 + 49{,}94 = 62{,}54 \text{ tn}.$$

Die Stabkräfte der äussern Oeffnungen und die Verticalreactionen der Stützen für Eigengewicht allein wurden im vorigen Beispiele berechnet, sodass nur noch die entsprechenden Grenzwerthe zu ermitteln übrig bleiben.

Nach § 79 sind die Grenzbeanspruchungen aller Stäbe der äussern Oeffnungen mit Ausnahme derjenigen des geraden Verbindungsgurts der Auflager wie für Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern bestimmt. Für jenen Verbindungsgurt ergeben sich die Grenzbeanspruchungen, wenn man den Beitrag des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p dem für $H_p = 0$ entstehenden grössten Grenzwerthe gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, den andern aber wie für $H_p = 0$ annimmt. Man erhält so nach § 36 mit § 79, 19) die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung $X_m = \mathfrak{X}_m$ und mit Zug I (Fig. 23, 24) von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m - \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{1}{nh},$$

die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung mit dem grössten H_p

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - H_p,$$

und mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale $m-1$,

$$(3) \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m + \left[(n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^n P(l-a)\right]\frac{1}{nh},$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen mit Zug II (Fig. 22) von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

(4) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d}{lh}\sum_m^n P(l-a),$$

und mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

(5) $$D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d}{lh}\sum_0^{m-1} Pa,$$

die Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

(6) $$V_m = \mathfrak{V}_m - \frac{1}{l}\sum_m^n P(l-a),$$

und mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

(7) $$V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{1}{l}\sum_0^{m-1} Pa.$$

Vorstehende Gleichungen liefern mit den aus der Tabelle in Beispiel 6 entnommenen oder wie in Beispiel 42 berechneten $\sum$ in Tonnen für die X-Gurtung (die Ansätze entsprechen der ersten Richtung des Zuges I, die Resultate für die zweite Richtung sind in Klammern beigefügt):

$$X_1 = -3,6 - \frac{6 \cdot 30,2 + 1 \cdot 383}{31,5} = -21,51\ (-21,10)$$

$$X_2 = -6,0 - \frac{5 \cdot 80,7 + 2 \cdot 271}{31,5} = -36,02\ (-33,23)$$

$$X_3 = -7,2 - \frac{4 \cdot 144 + 3 \cdot 173}{31,5} = -41,96\ (-40,08)$$

$$X_4 = -7,2 - \frac{3 \cdot 226 + 4 \cdot 89,4}{31,5} = -40,08\ (-41,96),$$

für die Z-Gurtung:

$$Z_1 = \mathfrak{Z}_1 = -12,60$$

$$Z_2 = -9,0 + \frac{6 \cdot 30,2 + 1 \cdot 383}{31,5} = 8,91$$

$$Z_3 = -6,6 + \frac{5 \cdot 80,7 + 2 \cdot 271}{31,5} = 23,42$$

$$Z_4 = -5,4 + \frac{4 \cdot 144 + 3 \cdot 173}{31,5} = 29,36,$$

$$Z_1 = -12,6 - 49,94 = -62,54$$

$$Z_2 = -9,0 - 49,94 = -58,94$$

$$Z_3 = -6,6 - 49,94 = -56,54$$

$$Z_4 = -5,4 - 49,94 = -55,34,$$

für die Diagonalen:

$$D_1 = 6{,}49 + \frac{530}{17{,}47} = 36{,}83 \qquad D_1 = \mathfrak{D}_1 = 6{,}49$$

$$D_2 = 4{,}33 + \frac{382}{17{,}47} = 26{,}20 \qquad D_2 = 4{,}33 - \frac{30{,}6}{17{,}47} = 2{,}58$$

$$D_3 = 2{,}16 + \frac{257}{17{,}47} = 16{,}87 \qquad D_3 = 2{,}16 - \frac{93{,}4}{17{,}47} = -3{,}19$$

$$D_4 = 0 + \frac{170{,}7}{17{,}47} = 9{,}75 \qquad D_4 = 0 - \frac{170{,}7}{17{,}47} = -9{,}75,$$

und für die Verticalen:

$$V_1 = -4{,}8 - \frac{530}{21} = -30{,}04 \qquad V_1 = \mathfrak{V}_1 = -4{,}80$$

$$V_2 = -3{,}0 - \frac{382}{21} = -21{,}19 \qquad V_2 = -3{,}0 + \frac{30{,}6}{21} = -1{,}54$$

$$V_3 = -1{,}2 - \frac{257}{21} = -13{,}44 \qquad V_3 = -1{,}2 + \frac{93{,}4}{21} = 3{,}25.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Pfeilerverticale sind $V_0 = \mathfrak{V}_0$ und nach A. 42, 4) mit Zug II von 0 bis n, Vorderrad O bei 0,

$$V_0 = \mathfrak{V}_0 - \frac{1}{l}\sum_0^n P(l-a), \tag{8}$$

also in unserm Falle

$$V_0 = -6{,}0 - \frac{692}{21} = -38{,}95, \qquad V_0 = -6{,}0 \text{ tn}.$$

Für die Diagonale 1 und Verticale 1, deren untere Grenzbeanspruchungen für Eigengewicht allein eintreten, sind ganz wie in Beispiel 45 mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, noch etwas ungünstigere obere Grenzbeanspruchungen als für Zug II berechnet zu erwarten. In der That liefern die für beliebige Belastung gültigen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} D_1 &= \mathfrak{D}_1 + \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{d}{lh}, \\ V_1 &= \mathfrak{V}_1 - \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{1}{l}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

mit den schon für X_1 verwendeten $\sum$

$$D_1 = 6{,}49 + \frac{6 \cdot 30{,}2 + 383}{17{,}47} = 38{,}79 \text{ tn},$$

$$V_1 = -4{,}8 - \frac{6 \cdot 30{,}2 + 383}{21} = -31{,}67 \text{ tn},$$

gegen oben erhaltene 36,83 und — 30,04 tn.

Die unteren Grenzwerthe der Verticalreactionen der Stützen treten für Eigengewicht allein ein, die oberen ergeben sich wegen $k = 0$ für eine Zwischenstütze nach § 78, 5) bei Belastung der beiden anliegenden Oeffnungen durch Zug I, Rad O bei der Stütze,

$$(10) \qquad R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l}\sum_0^l Pa + \frac{1}{l_0}\sum_0^{l_0} P(l_0 - a),$$

für die Endstütze nach § 78, 13) bei Belastung der anliegenden Oeffnung l_0 durch Zug II, Vorderrad O bei l,

$$(11) \qquad B = \mathfrak{B} + \frac{1}{l_0}\sum_0^{l_0} Pa.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$R = 14{,}7 + \frac{808}{24} + \frac{535}{21} = 73{,}85 \text{ tn } (74{,}03),$$

$$B = 6{,}3 + \frac{692}{21} = 39{,}25 \text{ tn}.$$

Sollen die Diagonalen der äussern Oeffnungen nur auf Zug widerstehen, so sind in den drei mittleren Feldern Gegendiagonalen anzuordnen. Der Einfluss derselben ist wie für $H = 0$ durch den am Schlusse des § 50 hervorgehobenen Satz bestimmt, wobei zu beachten, dass die stärkste Knotenpunktslast im Obergurte beträgt

$$K = 0{,}4 \,.\, 3 + 6 + 2 \,.\, 6\,\frac{1{,}7}{3} + 4\,\frac{0{,}5}{3} = 14{,}67 \text{ tn}.$$

Sämmtliche bei Anwendung von Gegendiagonalen gültigen Grenzwerthe einer Trägerhälfte sind in Fig. 172 eingetragen. Das am Schlusse des vorigen Beispiels bezüglich des Trägers mit zwei Oeffnungen und mit nicht horizontalem Untergurte Gesagte lässt sich hier wiederholen, wobei nur B. 88 und § 33 anstatt B. 87 und § 32 zu citiren sind.

Beispiel 103. Continuirliches Bogenfachwerk einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen (Dachbinder).

Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen des in Fig. 173 angedeuteten Dachbinders unter folgenden Voraussetzungen zu berechnen. Feste Last per laufenden Meter der Mittelöffnung 0,6 tn, der äussern Oeffnungen 0,5 tn, wovon 0,35 bezw. 0,3 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,25 bezw. 0,2 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. Belastung durch Schnee und Winddruck per laufenden Meter der Mittelöffnung 0,46 tn, der äussern Oeffnungen 0,5 tn. Diese bewegte Last soll beliebige Theile der Dachfläche

treffen können. Alle gekrümmten Gurtungen sind Kreisbogen eingeschrieben.

Die vollständige Berechnung der Mittelöffnung ist in Beispiel 85 gezeigt (siehe auch die Bemerkung zur dort gegebenen Tabelle), wir haben uns also nur noch mit den Stabkräften der äussern Oeffnungen und Stützenreactionen zu beschäftigen, wobei wie für die Mittelöffnung der Horizontalschub nach innen und die Ordinaten nach oben positiv gerechnet werden.

Formberechnung. Die Gleichung des Kreisbogens der Spannweite l und des Pfeiles f, welcher die Form des Obergurts der äussern Oeffnungen bestimmt, ist nach § 17, 37)

$$(1) \qquad y = -\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}\right)^2 + x(l-x)},$$

oder mit $l = 24$, $f = 4$,

$$y = -16 + \sqrt{256 + x(24-x)},$$

woraus für $x = 4$ und 8 die Ordinaten $y = 2{,}33$ und $3{,}60$ folgen. Hiernach hat man

für	$m = 1$	2	3:
$h_m = y =$	2,33	3,60	4
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$	4	4,63	5,38
$x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$	4,63	4,20	4,02
$\varepsilon = \nu = \dfrac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$	1	2,83	10,

während die Länge der Untergurtstäbe $z_m = \lambda = 4$ Meter ist.

Eigengewicht allein. Nach § 79, 17) 19) mit § 31, 16) hat man für die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = -m(n-m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = (m-1)(n-m+1)\dfrac{g\lambda^2}{2h_{m-1}} - \mathfrak{H}, \\ \mathfrak{D}_m = \left(n - 2m + 1 - m\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = -\left(n - 2m + \dfrac{g_x - g_z}{g} - m\dfrac{n-m}{\nu}\right)\dfrac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Mit $n = 6$, $\lambda = 4$, $g = 0{,}5$, $g_x = 0{,}3$, $g_z = 0{,}2$ und dem schon für die Mittelöffnung berechneten Horizontalschube $\mathfrak{H} = 9{,}6$ tn nehmen diese Gleichungen folgende Formen an:

$$\mathfrak{X}_m = - m(6-m)\frac{x_m}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = (m-1)(7-m)\frac{4}{h_{m-1}} - 9{,}6,$$

$$\mathfrak{D}_m = \left(7 - 2m - m\frac{6-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = m\left(2 + \frac{6-m}{\nu}\right) - 6{,}2.$$

Wir erhalten daraus in Tonnen:

$\mathfrak{X}_1 = -9{,}94$			$\mathfrak{V}_1 = 0{,}80$
$\mathfrak{X}_2 = -9{,}93$	$\mathfrak{Z}_2 = -1{,}02$	$\mathfrak{D}_2 = 0{,}34$	$\mathfrak{V}_2 = 0{,}64$
$\mathfrak{X}_3 = -9{,}04$	$\mathfrak{Z}_3 = -0{,}71$	$\mathfrak{D}_3 = 0{,}15.$	

Für $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{D}_1$ entsteht der unbestimmte Ausdruck $0:0$. Indessen liefert die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf Knotenpunkt 1 des Untergurts die ganze Beanspruchung des Untergurtstabes 1 für jede Belastung

(3) $$Z_1 = Z_2,$$

während nach A. 28, 5) die Eigengewichtsbeanspruchung der mittleren Verticale ist

(4) $$\mathfrak{V}_\sigma = \left(\frac{g n^2}{4 h_\sigma}\Delta - g_x\right)\lambda,$$

unter Δ die Ordinatendifferenz des mittleren und vorhergehenden oberen Knotenpunkts verstanden. Diese Gleichungen ergeben

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = -1{,}02 \text{ tn},$$

$$\mathfrak{V}_3 = \left(\frac{0{,}5\,.\,36}{4\,.\,4}\,0{,}4 - 0{,}3\right)4 = 0{,}6 \text{ tn}.$$

Beziehen sich bei Berechnung der Stützenreactionen Grössen mit dem Index 0 auf die der Stütze anliegende Oeffnung ohne Zwischengelenk, so hat man für Eigengewicht allein mit $k = 0$ die Reaction einer Zwischenstütze nach § 78, 7)

(5) $$\mathfrak{R} = \frac{g\,l}{2} + \frac{g_0 l_0}{2},$$

sowie die Horizontalreaction und Verticalreaction einer Endstütze nach § 67, 17) und § 78, 15)

(6) $$\mathfrak{H} = \frac{g l^2}{8 f}, \qquad \mathfrak{V} = \frac{g_0 l_0}{2}.$$

Hieraus folgen mit $l = 32$, $l_0 = 24$, $g = 0{,}6$, $g_0 = 0{,}5$,

$$\mathfrak{R} = 15{,}6, \qquad \mathfrak{H} = 9{,}6, \qquad \mathfrak{V} = 6 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Nach § 79 sind die Grenzbeanspruchungen aller Stäbe mit Ausnahme derjenigen der Z-Gurtung genau wie für Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern bestimmt. Wir haben also nach §§ 32, 19 die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung

$$(7) \qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

$$(8) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(\varepsilon - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\,\varepsilon - n + m}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{D}_m - (D_m), \end{cases}$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen

$$(9) \qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m + \dfrac{(\nu - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\,\nu - n + m}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{V}_m - (V_m) - \dfrac{p\lambda}{g}\,g_s. \end{cases}$$

Für die Grenzbeanspruchungen der mittleren Verticale hat man wegen $\sigma\Delta < h$ nach A. 28, 8) ausnahmsweise

$$(10) \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma + \frac{\sigma-1}{2}\,\frac{\Delta}{h_\sigma}\,pl, \qquad V_\sigma = \mathfrak{V}_\sigma - \left(1 - \frac{\sigma\Delta}{h_\sigma}\right)p\lambda.$$

Die Grenzwerthe von Z_m ergeben sich nach § 79, wenn man den Beitrag des grössten von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschubs H_p zu dem für $H_p = 0$ entstehenden grössten Grenzwerthe gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addirt, den anderen Grenzwerth aber wie für $H_p = 0$ annimmt. Wir erhalten so nach § 32, 5) mit § 79, 19)

$$(11) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - H_p, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + (m-1)(n-m+1)\,\frac{p\lambda^2}{2h_{m-1}}.$$

In vorstehenden Gleichungen sind $g = 0{,}5$, $p = 0{,}5$, $q = 1$, während das grösste H_p aus den Verhältnissen der Mittelöffnung folgt

$$H_p = \frac{p}{g}\,\mathfrak{H} = \frac{0{,}46}{0{,}6}\,9{,}6 = 7{,}36 \text{ tn}.$$

Wir erhalten damit in Tonnen die oberen Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

$$X_1 = -\,19{,}88 \qquad X_2 = -\,19{,}86 \qquad X_3 = -\,18{,}08,$$

die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:

$$Z_1 = Z_2 = -\,1{,}02 - 7{,}36 = -\,8{,}38$$
$$Z_3 = -\,0{,}71 - 7{,}36 = -\,8{,}07,$$

$$Z_1 = Z_2 = -\,1{,}02 + \frac{5\,.\,4}{2{,}33} = \;\;7{,}56$$

$$Z_3 = -\,0{,}71 + \frac{8\,.\,4}{9{,}6} = 19{,}29,$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_2 = 0{,}34 - \frac{6{,}83\,.\,1\,.\,4{,}63}{10{,}15\,.\,2{,}33} = -\,1{,}00 \qquad D_2 = 3\,.\,0{,}34 + 1{,}0 = 2{,}02$$

$$D_3 = 0{,}15 - \frac{13\,.\,4\,.\,5{,}38}{47\,.\,3{,}6} = -\,1{,}50 \qquad D_3 = 3\,.\,0{,}15 + 1{,}5 = 1{,}95,$$

und diejenigen der Verticalen:

$$V_1 = 0{,}80 + \frac{6\,.\,0\,.\,0}{0} = 0{,}80$$

$$V_2 = 0{,}64 + \frac{6{,}83\,.\,1}{10{,}15} = 1{,}31$$

$$V_3 = 0{,}60 + \frac{0{,}4\,.\,12}{4} = 1{,}80,$$

$$V_1 = 3\,.\,0,\,8 - 0,\,8 - 0{,}8 = \;\;0{,}80$$

$$V_2 = 3\,.\,0{,}64 - 1{,}31 - 0{,}8 = \;\;0{,}19$$

$$V_3 = 0{,}6 - \left(1 - \frac{3\,.\,0{,}4}{4}\right) 2 = -\,0{,}80.$$

Die oberen Grenzwerthe der Reaction R einer Zwischenstütze und der Horizontalreaction H und Verticalreaction B einer Endstütze sind nach § 78, 7) 12) und § 67, 14) mit $k = 0$

$$(12) \qquad R = \mathfrak{R} + \frac{p\,l}{2} + \frac{p_0\,l_0}{2},$$

$$(13) \qquad H = \mathfrak{H} + \frac{p\,l^2}{8\,f}, \qquad B = \mathfrak{B} + \frac{p_0\,l_0}{2},$$

woraus mit $p = 0{,}46$, $p_0 = 0{,}5$, $f = 8$,

$$R = 28{,}96 \qquad H = 16{,}96 \qquad B = 12 \text{ tn}.$$

Die unteren Grenzwerthe dieser Reactionen treten für Eigengewicht allein ein. Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt. Dieselben wurden in Fig. 174 für eine Trägerhälfte eingetragen.

Bemerkungen. Hätte der Träger neben der Oeffnung mit Zwischengelenk nur eine Oeffnung ohne Zwischengelenk gehabt, so würde die Berechnung genau wie oben vorzunehmen gewesen, die Reaction V, H der einen Endstütze aber wie in Beispiel 85 geblieben sein.

Wie bei parabolischen Segmentträgern mit constantem Horizontalschube oder mit schief verschiebbarem Auflager, so lässt sich auch bei parabolischen Segmentträgern über die Oeffnungen ohne Zwischen-

gelenk continuirlicher Bogen erreichen, dass bei Belastung durch ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht allein (oder eine sonstige gleichmässig vertheilte Last) die eine Gurtung unbeansprucht bleibt und somit die bei jenen Trägern gesuchte Materialersparniss eintritt. Man erhält nämlich nach § 79, 13) 19) mit § 41, 5) die Beanspruchung des geraden Gurts als X-Gurtung

$$\mathfrak{X} = \mp \frac{gl^2}{8f} \pm \mathfrak{H},$$

die Beanspruchung des geraden Gurts als Z-Gurtung

$$\mathfrak{Z} = \pm \frac{gl^2}{8f} \mp \mathfrak{H},$$

unter f den Pfeil des die Gurtungsform bestimmenden Parabelbogens verstanden. Hieraus folgt als Bedingung für die Beanspruchung Null

$$\frac{gl^2}{8f} = \mathfrak{H}. \tag{14}$$

Zu beachten ist, dass sich der Ausdruck links auf die betrachtete Oeffnung ohne Zwischengelenk bezieht, während $\mathfrak{H}$ aus den Verhältnissen der Oeffnung mit Zwischengelenk zu berechnen ist.

Angenommen beispielsweise, wir hätten im obigen Falle bei gegebenen Verhältnissen der Mittelöffnung und von g, l der äussern Oeffnungen in diesen für Eigengewicht allein keine Beanspruchung des Untergurts haben wollen. Dann würde nach 14) der Obergurt einem Parabelbogen vom Pfeile

$$f = \frac{gl^2}{8\mathfrak{H}} = \frac{0{,}5 \cdot 24^2}{8 \cdot 9{,}6} = 3{,}75 \text{ m}$$

einzuschreiben gewesen sein. Nach der Formel

$$h_m = m(n - m)\frac{4f}{n^2}$$

wären die Verticalenlängen geworden

	$h_1 = 2{,}08$	$h_2 = 3{,}33$	$h_3 = 3{,}75$
anstatt wie oben	2,33	3,6	4.

Für sämmtliche Stabkräfte der äussern Oeffnungen aber hätten nun die einfacheren Formeln der §§ 41, 42 anstatt der obigen Verwendung finden können.

Aufgabe 42. Pfeilerverticalen und Widerlagerverticalen bei continuirlichen Bogenträgern.

Für die in Fig. 175—178 angedeuteten Endverticalen der Oeffnungen ohne Zwischengelenk des continuirlichen Bogenfachwerks (bezüglich der Oeffnungen mit Zwischengelenk siehe Aufgabe 39) die

Beanspruchungen bei beliebiger Belastung und die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge festzustellen, wenn die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenk in gleicher Höhe liegen und die Fahrbahnlast im Falle von Fig. 175, 177 auf die Knotenpunkte des Obergurts, im Falle von Fig. 176, 178 auf diejenigen des Untergurts wirkt.

Pfeilerverticale Fig. 175, 176. Die Bedingungen fürs Gleichgewicht am Auflager 0 lauten

$$H \pm Z_1 \frac{\lambda}{z_1} = 0, \qquad V \pm V_0 - K_s \pm Z_1 \frac{\mathfrak{z}_1}{z_1} = 0,$$

sodass allgemein

$$(1) \qquad \pm V_0 = K_s + H \frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda} - V.$$

Für beliebige Belastung hat man von der Verkehrslast herrührend

$$V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a) + \frac{k}{l} H, \qquad K_s = 0,$$

$$(2) \qquad H = \frac{1}{2f} \Big[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a) \Big]_s,$$

worin wie im Weiteren der Index s andeutet, dass sich der Klammerausdruck auf die Oeffnung mit Zwischengelenk bezieht. Mit vorstehenden Ausdrücken liefert 1) die ganze Beanspruchung der Pfeilerverticale bei jeder Belastung

$$(3) \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 \mp \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a) \pm \left(\frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda} - \frac{k}{l}\right) H,$$

unter $\mathfrak{B}_0$ die Beanspruchung durch Eigengewicht allein verstanden.

Der Knotenpunkt v liegt in allen praktischen Fällen (sofern überhaupt Endverticalen vorhanden sind) für Fig. 175 oberhalb, für Fig. 176 unterhalb der Verbindungsgeraden der Endgelenke oder doch auf derselben. Alsdann ist in 3) der H enthaltende letzte Summand positiv und wir erhalten die Grenzwerthe für bewegte Radlastzüge wie folgt:

Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0,

$$(4) \qquad V_0 = \mathfrak{B}_0 \mp \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a),$$

Belastung der Oeffnung mit Zwischengelenken durch Zug I, Rad O bei d,

(5) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \left(\frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda} - \frac{k}{l}\right) H.$$

Die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last werden hiernach

(6) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 \mp \frac{p\,l}{2}, \qquad V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \left(\frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda} - \frac{k}{l}\right) \left(\frac{p\,l^2}{8f}\right)_z.$$

Soll das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf je eine Oeffnung gelten, so liefert 1) für die Beanspruchung durch dasselbe

(7) $$\pm \mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_z}{2} - \frac{g\,l}{2} + \left(\frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda} - \frac{k}{l}\right) \left(\frac{g\,l^2}{8f}\right)_z.$$

Ist die Z-Gurtung gerade, dann hat man

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{k}{n}, \qquad \frac{\mathfrak{z}_1}{\lambda} - \frac{k}{l} = 0,$$

der Horizontalschub ist ohne Einfluss auf V_0, obige Gleichungen gehen in die für Balkenfachwerke mit zwei Gelenkauflagern gültigen über (Aufgabe 19).

Widerlagerverticale Fig. 175, 176. Ganz wie in Aufgabe 39 für die erste Scheitelverticale erhalten wir bei beliebiger Belastung

(8) $$X_n = 0, \qquad V_n = \mp K_x = \mathfrak{V}_n \mp \frac{1}{\lambda} \sum_c^l P(a - c).$$

Bei bewegter Belastung ist die untere Grenzbeanspruchung $V_n = \mathfrak{V}_n$, die obere ergibt sich für bewegte Radlastzüge aus 8) mit Zug II von c bis l, Vorderrad O bei l, und für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus

(9) $$V_n = \mathfrak{V}_n \mp \frac{p\,\lambda}{2}.$$

Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewichte ist

(10) $$\mathfrak{V}_n = \mp \frac{\lambda g_x}{2}.$$

Pfeilerverticale Fig. 177, 178. Ganz wie in Aufgabe 39 für die zweite Kämpferverticale haben wir bei beliebiger Belastung

(11) $$Z_1 = 0, \qquad V_0 = \pm K_z = \mathfrak{V}_0 \pm \frac{1}{\lambda} \sum_0^v P(v - a).$$

Bei bewegter Belastung ist die untere Grenzbeanspruchung $V_0 = \mathfrak{V}_0$, die obere ergibt sich für bewegte Radlastzüge aus 11) mit Zug II

von 0 bis v, Vorderrad O bei 0, und für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus

(12) $$V_0 = \mathfrak{V}_0 \pm \frac{p\lambda}{2}.$$

Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewicht ist

(13) $$\mathfrak{V}_0 = \pm \frac{\lambda g_z}{2}.$$

Widerlagerverticale Fig. 177, 178. Fürs Gleichgewicht am Auflager l muss sein

$$H \mp X_n \frac{\lambda}{x_n} = 0, \qquad V' \mp V_n - K_x \pm \frac{k - \mathfrak{x}_{n-1}}{x_n} X_n = 0,$$

wonach allgemein

(14) $$\mp V_n = K_x - \frac{k - \mathfrak{x}_{n-1}}{\lambda} H - V'.$$

Für beliebige Belastung hat man von der Verkehrslast herrührend

$$V' = \frac{1}{l} \sum_0^l Pa - \frac{k}{l} H, \qquad K_x = 0,$$

während H durch 2) ausgedrückt ist. Mit diesen Werthen folgt aus 14)

(15) $$V_n = \mathfrak{V}_n \pm \frac{1}{l} \sum_0^l Pa \mp \left(\frac{k}{l} - \frac{k - \mathfrak{x}_{n-1}}{\lambda}\right) H.$$

Der Knotenpunkt c liegt in allen praktischen Fällen (sofern überhaupt Endverticalen vorhanden sind) für Fig. 177 oberhalb, für Fig. 178 unterhalb der Verbindungsgeraden der Endgelenke oder doch auf derselben. Alsdann ist in 15) der mit H behaftete Summand positiv und es ergeben sich die Grenzwerthe für bewegte Radlastzüge wie folgt:

Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei l,

(16) $$V_n = \mathfrak{V}_n \pm \frac{1}{l} \sum_0^l Pa,$$

Belastung der Oeffnung mit Zwischengelenken durch Zug I, Rad O bei d,

(17) $$V_n = \mathfrak{V}_n \mp \left(\frac{k}{l} - \frac{k - \mathfrak{x}_{n-1}}{\lambda}\right) H.$$

Die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last werden hiernach

(18) $$V_n = \mathfrak{V}_n \pm \frac{pl}{2}, \qquad V_n = \mathfrak{V}_n \mp \left(\frac{k}{l} - \frac{k - \mathfrak{x}_{n-1}}{\lambda}\right) \left(\frac{pl^2}{8f}\right).$$

Soll das Eigengewicht innerhalb je einer Oeffnung als gleichmässig vertheilt gelten, so ergibt 14) für die Beanspruchung durch dasselbe

$$(19) \qquad \mp \mathfrak{V}_0 = \frac{\lambda g_x}{2} - \frac{g\,l}{2} + \left(\frac{k}{l} - \frac{k - \mathfrak{x}_{n-1}}{\lambda}\right)\left(\frac{g\,l^2}{8f}\right)_s.$$

Ist die X-Gurtung gerade, dann hat man

$$\mathfrak{x}_{n-1} = k - \frac{k}{n}, \qquad \frac{k}{l} - \frac{k - \mathfrak{x}_{n-1}}{\lambda} = 0,$$

der Horizontalschub hat keinen Einfluss auf V_n, die Formeln 14)—19) gehen in die entsprechenden für Balkenfachwerke mit zwei Gelenkauflagern über (Aufgabe 19).

Bemerkungen. Wenn wir auch bei den Ableitungen dieser Aufgabe die Bezeichnungen mit besonderer Rücksicht auf Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen wählten, so gelten dieselben doch für die Endverticalen Fig. 175—178 bei sonst ganz beliebigem Systeme. Hätten wir die Auflager der Oeffnung mit Zwischengelenk nicht gleich hoch liegend vorausgesetzt, so würden nur andere Ausdrücke für H als oben zu verwenden gewesen sein.

Aufgabe 48. Gelenkdrücke bei continuirlichen Bogenträgern. Für continuirliche Bogenträger der in § 78 betrachteten Art und gleich hohen Stützpunkten der Oeffnung mit Zwischengelenk die resultirenden Gelenkdrücke anzugeben.

Für das Zwischengelenk und etwaige Endgelenke, welchen Oeffnungen mit Zwischengelenken anliegen, ist die Berechnung bereits in Aufgabe 41 erledigt. Die resultirenden Gelenkdrücke über den Zwischenstützen sind die Reactionen der Letzteren, welche in § 78 festgestellt wurden. Es bleiben also nur noch die resultirenden Drücke der Endgelenke mit anliegenden Oeffnungen ohne Zwischengelenk anzugeben. Die Kenntniss der resultirenden Endgelenkdrücke oder Widerlagerreactionen ist bei Hängebogen auch für die Berechnung der Verankerung nöthig. Mit den in § 78 für die Stützenreactionen gewählten Bezeichnungen haben wir bei beliebiger Belastung

$$(1) \qquad R' = \sqrt{B^2 + H^2},$$

worin, wenn $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ dem Eigengewichte allein entsprechen,

$$(2) \qquad \begin{cases} B = \mathfrak{B} + \frac{1}{l_0} \sum_0^{l_0} Pa - \frac{k}{2fl_0}\left[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\right], \\ H = \mathfrak{H} + \frac{1}{2f}\left[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\right]. \end{cases}$$

Hiernach kann R' für jede bestimmte Belastung berechnet werden. Soll das Eigengewicht für je eine Oeffnung als gleichmässig vertheilt gelten, dann sind

(3) $$\mathfrak{B} = \frac{g_0 l_0}{2} - \frac{k}{l_0}\frac{g l^2}{8f}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{g l^2}{8f}.$$

Nach 1) wird R' umso grösser, je grösser die Zahlenwerthe von B und H sind, wobei es gleichgültig ist, ob B einen positiven oder negativen Werth hat. Man erhält nun die Grenzwerthe von R' bei bewegter Belastung im Allgemeinen etwas zu ungünstig, wenn man nach Berechnung der Grenzwerthe und Werthe für Eigengewicht allein von B, H (§ 78) das eine Mal die beiden numerisch grössten, das andere Mal die beiden numerisch kleinsten gefundenen Werthe in 1) einsetzt.

Beispiel 104. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Der in Beispiel 54 behandelte parabolische Segmentträger soll als Träger mit schief verschiebbarem Auflager hergestellt und der Winkel α der Auflagerbahn gegen die Horizontale so gewählt werden, dass für Eigengewicht allein keine Beanspruchung des Untergurts eintritt. Die Grenzbeanspruchungen der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen (Fig. 179).

Die Berechnung der Form, der Beanspruchungen aller nicht zum Untergurte gehörigen Stäbe und Verticalreactionen der Stützen bleibt ganz wie in Beispiel 54. Damit der Untergurt bei Belastung durch das Eigengewicht allein keine Beanspruchung erleide, muss nach § 83, 17) sein

(1) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{4f}, \qquad \gamma = \frac{n}{4f},$$

d. h. im vorliegenden Falle mit $l = 32$, $f = 3{,}2$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}, \qquad \gamma = \frac{5}{8}, \qquad \alpha = 53^0 51' 34''.$$

Alsdann sind für Eigengewicht allein nur die Obergurtstäbe und Verticalen beansprucht. Der untere Grenzwerth des Horizontalschubs, welcher für Eigengewicht allein eintritt, sowie der obere Grenzwerth desselben sind nach § 84, 6)

(2) $$\mathfrak{H} = \frac{g\,l}{2}\operatorname{tg}\alpha, \qquad H = \frac{q}{g}\mathfrak{H},$$

woraus mit $g = 0{,}73$, $q = 3{,}5$

$$\mathfrak{H} = 0{,}73 \,.\, 12\,\frac{15}{8} = 16{,}42, \qquad H = 3{,}5 \,.\, 12\,\frac{15}{8} = 78{,}75 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen jedes Untergurtstabes sind gleich gross und von verschiedenen Vorzeichen, und zwar hat man auf der ersten Trägerhälfte, wo der Untergurt die Z-Gurtung bildet, nach § 84, 9)

$$(3) \qquad Z_m = \pm \frac{h_{m-1}}{m-1+\gamma h_{m-1}} \frac{p\lambda^2}{2} n\gamma^2,$$

und auf der zweiten Trägerhälfte, wo der Untergurt die X-Gurtung bildet, nach § 84, 8)

$$(4) \qquad X_m = \pm \frac{h_m}{m+\gamma h_m} \frac{p\lambda^2}{2} n\gamma^2.$$

Für die beiden äussersten Felder, in welchen die Diagonalen mit den Untergurtstäben zusammenfallen, liefert die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die unteren Knotenpunkte 1 und $n-1$ die ganzen Beanspruchungen der Untergurtstäbe bei jeder Belastung

$$(5) \qquad Z_1 = Z_2, \qquad X_n = X_{n-1}.$$

Wir erhalten demnach folgende Grenzbeanspruchungen des Untergurts in Tonnen:

$$Z_1 = Z_2 = \pm \frac{1{,}4 \cdot 8}{15} 38{,}95 = \pm 29{,}10$$

$$Z_3 = \pm \frac{2{,}4 \cdot 2}{7} 38{,}95 = \pm 26{,}72$$

$$Z_4 = \pm \frac{3 \cdot 8}{39} 38{,}95 = \pm 23{,}95,$$

$$X_5 = \pm \frac{3 \cdot 8}{55} 38{,}95 = \pm 16{,}98$$

$$X_6 = \pm \frac{2{,}4 \cdot 2}{15} 38{,}95 = \pm 12{,}46$$

$$X_8 = X_7 = \pm \frac{1{,}4 \cdot 8}{63} 38{,}95 = \pm 6{,}93,$$

während nach Beispiel 54 bei horizontaler Auflagerbahn die Grenzbeanspruchungen aller Untergurtstäbe 78,76 und 16,43 tn wären. Man sieht, dass eine sehr bedeutende Herabsetzung der Beanspruchungen stattfindet, wogegen allerdings jetzt Wechsel von Zug und Druck eintritt. Wollte man Letzteres vermeiden oder den Druck vermindern, so würde α kleiner als oben zu wählen sein, womit die Eigengewichtsbeanspruchung des Untergurts nicht gleich Null, sondern durch § 83, 16) bestimmt wird. Nebenbei sei bemerkt, dass je zwei symmetrisch zur Trägermitte gelegene Untergurtstäbe nicht

gleiche Beanspruchungen erleiden und also bei Dimensionirung nach Letzteren auch nicht gleiche Querschnitte erlangen.

Beispiel 105. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Der Träger des vorigen Beispiels soll nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Die Formberechnung bleibt wie in Beispiel 54, die Berechnung der nicht zum Untergurte gehörigen Stäbe und der Verticalreactionen der Stützen wie in Beispiel 55. Die Werthe α, γ erhält man wie im vorigen Beispiele, womit dann für Eigengewicht allein nur die Obergurtstäbe und Verticalen beansprucht sind. Die Grenzwerthe des Horizontalschubs ergeben sich nach § 83 gleichzeitig mit den Grenzwerthen der Verticalreaction bei l

(1) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{V}' \operatorname{tg} \alpha, \qquad H = V' \operatorname{tg} \alpha,$$

das heisst im vorliegenden Falle

$$\mathfrak{H} = 8{,}76 \frac{15}{8} = 16{,}42, \qquad H = 45{,}01 \frac{15}{8} = 84{,}79 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Untergurtstäbe sind nach § 83 wie folgt bestimmt. Auf der ersten Trägerhälfte, wo der Untergurt die Z-Gurtung bildet: Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei c (mitunter Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c),

(2) $$Z_m = \Big[(n - m + 1 - \gamma h_{m-1}) \sum_0^c Pa + (m - 1 + \gamma h_{m-1}) \sum_c^z P(z - a)\Big] \frac{1}{n h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug II von z bis l, Vorderrad O bei l,

(3) $$Z_m = -\frac{m - 1 + \gamma h_{m-1}}{n h_{m-1}} \sum_z^l P(a - z),$$

mit den Werthen

(4) $$z = \frac{m - 1}{m - 1 + \gamma h_{m-1}} l, \qquad c = (m - 1) \lambda.$$

Auf der zweiten Trägerhälfte, wo der Untergurt die X-Gurtung bildet: Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei v (mitunter Zug II von 0 bis v, Vorderrad O bei v),

(5) $$X_m = \Big[(n - m + \gamma h_m) \sum_0^v Pa + (m + \gamma h_m) \sum_v^z P(z - a)\Big] \frac{1}{n h_m},$$

Belastung durch Zug II von z bis l, Vorderrad O bei l,

(6) $$X_m = - \frac{m + \gamma h_m}{n h_m} \sum_z^l P(a - z),$$

mit den Werthen

(7) $$z = \frac{m}{m + \gamma h_m}, \qquad v = m\lambda.$$

Für die Untergurtstäbe in den beiden äussersten Feldern bleiben die Gleichungen 5) des vorigen Beispiels gültig.

Nach 4) 5) und wegen $h_1 = 1,4$ erhält man in Metern

für	$m =$	2	3	4	5	6	7:
mit	$h_m =$	2,4	3	3,2	3	2,4	1,4
	$z =$	12,80	13,71	14,77	17,45	19,20	21,33
	$c =$	3	6	9	12	15	18
	$v =$	6	9	12	15	18	21.

Weiter folgen als erste Grenzwerthe in Tonnen mit Zug I, erste Zugrichtung (Fig. 23),

$$Z_1 = Z_2 = \Big[\frac{49}{8}(6 . 3 + 6 . 1,7 + 4 . 0,5) + \frac{15}{8}(6 . 8,5 + 6 . 4,5 + 6 . 3,2 + 6 . 1,9 + 4 . 0,7)\Big] \frac{1}{8 . 1,4} = 35,17,$$

$$Z_3 = \Big[\frac{9}{2}(6 . 6 + 6 \cdot 4,7 + 4 . 3,5 + 5 . 0,5) + \frac{7}{2}(6 . 6,41 + 6 . 2,41 + 6 . 1,11)\Big] \frac{1}{8 . 2,4} = 28,78;$$

mit Zug I, zweite Zugrichtung (Fig. 24),

$$Z_4 = \Big[\frac{25}{8}(6 . 7,7 + 6 . 3,7 + 6 . 2,4 + 6 . 1,1) + \frac{39}{8}(6 . 5,77 + 6 . 4,47 + 4 . 3,27 + 5 . 0,27)\Big] \frac{1}{8 . 3} = 27,05,$$

$$X_5 = \Big[\frac{9}{8}(6 . 13,7 + 6 . 9,7 + 6 . 8,4 + 6 . 7,1 + 4 . 5,9 + 5 . 2,9) + \frac{55}{8}(6 . 2,45 + 6 . 1,15)\Big] \frac{1}{8 . 3} = 18,91.$$

Für die beiden ersten Fälle hätten sich mit der zweiten und für die beiden letzten Fälle mit der ersten Zugrichtung ergeben:

$$Z_2 = \left[\frac{49}{8}\, 6 \,.\, 1{,}7 + \frac{15}{8}\,(6 \,.\, 9{,}8 + 6 \,.\, 8{,}5 + 4 \,.\, 7{,}3 + 5 \,.\, 4{,}3 + 6 \,.\, 0{,}1)\right] \frac{1}{8 \,.\, 1{,}4} = 32{,}55,$$

$$Z_3 = \left[\frac{9}{2}\,(6 \,.\, 4{,}7 + 6 \,.\, 0{,}7) + \frac{7}{2}\,(6 \,.\, 7{,}71 + 6 \,.\, 6{,}41 + 4 \,.\, 5{,}21 + 5 \,.\, 2{,}21)\right] \frac{1}{8 \,.\, 2{,}4} = 28{,}85,$$

$$Z_4 = \left[\frac{25}{8}\,(6 \,.\, 9 + 6 \,.\, 7{,}7 + 4 \,.\, 6{,}5 + 5 \,.\, 3{,}5) + \frac{39}{8}\,(6 \,.\, 4{,}47 + 6 \,.\, 0{,}47)\right] \frac{1}{8 \,.\, 3} = 24{,}73,$$

$$X_5 = \left[\frac{9}{8}\,(6 \,.\, 15 + 6 \,.\, 13{,}7 + 4 \,.\, 12{,}5 + 5 \,.\, 9{,}5 + 6 \,.\, 5{,}3 + 6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7 + 4 \,.\, 1{,}5) + \frac{55}{8}\, 6 \,.\, 1{,}15\right] \frac{1}{8 \,.\, 3} = 18{,}27.$$

Da für X_6, X_7 die Strecke von v bis z kleiner als der Abstand 1,3 m der nächsten Räder von Rad O ist, so tritt zweifellos der zu 5) in Klammern erwähnte Fall ein, dass die erste Grenzbeanspruchung mit Zug II (Fig. 22) ungünstiger als mit Zug I wird. Wir erhalten

$$X_6 = [6(18 + 16{,}7 + 15{,}4 + 7 + 5{,}7 + 4{,}4) + 4\,(14{,}2 + 3{,}2) + 5\,(11{,}2 + 0{,}2)]\, \frac{1}{2 \,.\, 8 \,.\, 2{,}4} = 13{,}80,$$

$$X_8 = X_7 = [6(21 + 19{,}7 + 18{,}4 + 10 + 8{,}7 + 7{,}4) + 4\,(17{,}2 + 6{,}2) + 5\,(14{,}2 + 3{,}2)]\, \frac{1}{8 \,.\, 8 \,.\, 1{,}4} = 7{,}72.$$

Die zweiten Grenzbeanspruchungen ergeben sich in oben angeführter Weise in Tonnen:

$$Z_1 = Z_2 = -\,[6\,(11{,}2 + 9{,}9 + 8{,}6 + 0{,}2) + 4 \,.\, 7{,}4 + 5 \,.\, 4{,}4]\, \frac{15}{8 \,.\, 8 \,.\, 1{,}4} = -\,38{,}67,$$

$$Z_3 = -\,[6\,(10{,}29 + 8{,}99 + 7{,}69) + 4 \,.\, 6{,}49 + 5 \,.\, 3{,}49]\, \frac{7}{2 \,.\, 8 \,.\, 2{,}4} = -\,37{,}41,$$

$$Z_4 = -\,[6\,(9{,}23 + 7{,}93 + 6{,}63) + 4 \,.\, 5{,}43 + 5 \,.\, 2{,}43]\, \frac{39}{8 \,.\, 8 \,.\, 3} = -\,35{,}87,$$

$$X_5 = -\,[6\,(6{,}55 + 5{,}25 + 3{,}95) + 4 \,.\, 2{,}75]\, \frac{55}{8 \,.\, 8 \,.\, 3} = -\,30{,}22,$$

$$X_6 = -\,[6\,(4{,}8 + 3{,}5 + 2{,}2) + 4 \,.\, 1]\, \frac{15}{2 \,.\, 8 \,.\, 2{,}4} = -\,26{,}17,$$

$$X_8 = X_7 = -\,6\,(2{,}67 + 1{,}37 + 0{,}07)\, \frac{63}{8 \,.\, 8 \,.\, 1{,}4} = -\,17{,}34.$$

Damit sind sämmtliche verlangte Grenzwerthe bestimmt.

Bemerkungen. Anstatt die $\sum$ wie oben zu berechnen, hätten wir dieselben natürlich auch aus der Tabelle des Beispiels 6 entnehmen können. Wir fügen nun noch folgende Zusammenstellung bei.

	Oben berechnete Grenzwerthe:		Nach Beispiel 104.	Nach Beispiel 55 für $\alpha = 0$:	
Z_2	$= 35{,}17$ und	$-\ 38{,}67$	$\pm\ 29{,}10$	83,07 und	16,43
Z_3	$= 29{,}78$	$-\ 37{,}41$	$\pm\ 26{,}72$	81,89	16,43
Z_4	$= 27{,}05$	$-\ 35{,}87$	$\pm\ 23{,}95$	80,30	16,43
X_5	$= 18{,}91$	$-\ 30{,}22$	$\pm\ 16{,}98$	80,30	16,43
X_6	$= 13{,}80$	$-\ 26{,}17$	$\pm\ 12{,}46$	81,89	16,43
X_7	$= 7{,}72$	$-\ 17{,}34$	$\pm\ 6{,}93$	83,07	16,43.

Die in Beispiel 104 erhaltenen Werthe wurden mit derjenigen gleichmässig vertheilten Last von p per laufenden Meter berechnet, welche für $\alpha = 0$ (gewöhnliche Balkenträger) annähernd dieselben Gurtungsbeanspruchungen wie die verwendeten Locomotiven ergeben. Man sieht, dass dies jetzt keineswegs der Fall ist und es bestätigt sich wiederholt, dass die Lastäquivalente p bestimmter Fahrzeuge je nach Umständen sehr verschieden ausfallen können (Beispiele 7, 8, 16, 29, 88, 90, 100 u. s. w.). Ein Vergleich der nach Beispiel 55 zugesetzten Werthe mit den jetzt erhaltenen gibt zu der schon am Schlusse des vorigen Beispiels gemachten Bemerkung Veranlassung.

Aufgabe 44. Gelenkdrücke bei Trägern mit schief verschiebbarem Auflager.

Für den Träger mit einem festen und einem schief verschiebbaren Gelenkauflager in gleicher Höhe sollen die resultirenden Gelenkdrücke (Widerlagerreactionen) für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge angegeben werden (Fig. 180).

Verschiebbares Auflager. Da der Ursprung der Coordinaten ins feste Gelenkauflager gelegt wurde, so haben wir die Reaction des verschiebbaren Auflagers mit $H = V' \operatorname{tg} \alpha$ allgemein

(1) $$R' = V' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{V'}{\cos \alpha},$$

worin für beliebige Belastung

(2) $$V' = \mathfrak{V}' + \frac{1}{l} \sum_0^l Pa,$$

und von einem gleichmässig vertheilten Eigengewichte allein herrührend

(3) $$\mathfrak{V}' = \frac{gl}{2}.$$

Bei bewegter Belastung erhalten wir die Grenzwerthe von R' nach 1) zugleich mit den Grenzwerthen von V', also den unteren für Eigengewicht allein

(4) $$R' = \mathfrak{R}' = \frac{\mathfrak{V}'}{\cos\alpha},$$

den oberen für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei l, aus 1) 2), für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus 1) mit

(5) $$V' = \mathfrak{V}' + \frac{pl}{2},$$

und wenn auch das Eigengewicht gleichmässig vertheilt ist,

(6) $$R' = \frac{ql}{2\cos\alpha} = \frac{q}{g}\,\mathfrak{R}'.$$

Festes Auflager. Für dieses ist die Reaction bei beliebiger Belastung

(7) $$R = \sqrt{V^2 + H^2},$$

worin für beliebige Belastung

(8) $$V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a), \qquad H = V'\operatorname{tg}\alpha,$$

und beispielsweise von einem gleichmässig vertheilten Eigengewicht herrührend

(9) $$\mathfrak{V} = \frac{gl}{2}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{gl}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Hiernach kann R für jede bestimmte Belastung berechnet werden. Da alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu R beitragen, so ist der untere Grenzwerth bei bewegter Belastung

(10) $$R = \mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{V}^2 + \mathfrak{H}^2},$$

der obere folgt für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus 7) 8) mit 5) und

(11) $$V = \mathfrak{V} + \frac{pl}{2},$$

also wenn auch das Eigengewicht gleichmässig vertheilt ist,

(12) $$R = \frac{ql}{2\cos\alpha} = \frac{q}{g}\,\mathfrak{R}.$$

Für bewegte Radlastzüge ergibt sich der obere Grenzwerth von R

um etwas zu ungünstig, wenn man in 7) einfach die oberen Grenzwerthe von V, H einsetzt.

Beispiel 106. Bogenträger mit reellen Kämpfergelenken und einem imaginären Zwischengelenke.

Auf den in Fig. 181 angedeuteten Träger mit kreisförmigem Untergurte wirke eine gleichmässig vertheilte Eigenlast (oder sonstige Last) von $g = 0{,}7$ tn per laufenden Meter, wovon 0,4 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und 0,3 tn auf diejenigen des Untergurts kommen. Die entsprechenden Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Nach § 85, 9) 8) hat man die Verticalreactionen und Horizontalreaction der Stützen mit $k = 0$

(1) $$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' = \frac{gl}{2}, \qquad \mathfrak{H} = [xy + (l - x - y)\,d]\,\frac{g}{2f},$$

woraus mit $l = 24$, $d = 11{,}83$, $f = 4{,}5$, $x = 15$, $y = 18$ folgen

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' = 8{,}4 \text{ tn}, \qquad \mathfrak{H} = 12{,}72 \text{ tn}.$$

Für die Stabkräfte der ersten Trägerhälfte liefert § 18, 10) wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = 0$ bei oben liegender X-Gurtung:

(2) $$\begin{cases} \mathfrak{X}_m = -\left[m\,(n - m) - \frac{2}{g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{z}_m\right]\frac{x_m}{h_m}\,\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = \left[(m - 1)\,(n - m + 1) - \frac{2}{g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{x}_{m-1}\right]\frac{z_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = -\left[m\,(n - m) - \varepsilon\,(n - 2m + 1) - \frac{2}{g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\,w_d\right]\frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = \left[m\,(n - m) - v\left(n - 2m + \frac{g_x - g_z}{g}\right) - \frac{2}{g\lambda^2}\,\mathfrak{H}\,w_v\right]\frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen mit $n = 8$, $\lambda = 3$, $g = 0{,}7$, $g_x = 0{,}4$, $g_z = 0{,}3$, $\mathfrak{x}_{m-1} = w_d = w_v = h_0 = 4{,}5$ folgende Formen an:

$$\mathfrak{X}_m = -\,[m\,(8 - m) - 4{,}04\,\mathfrak{z}_m]\,\frac{8{,}15}{h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = [(m - 1)\,(n - m + 1) - 18{,}17]\,\frac{1{,}05\,z_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = -\,[m\,(8 - m) - \varepsilon\,(9 - 2m) - 18{,}17]\,\frac{1{,}05\,d_m}{\varepsilon h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = [m\,(8 - m + 2v) - 18{,}17]\,\frac{1{,}05}{v} - 8{,}55,$$

und es ergeben sich hieraus mit den schon in Beispiel 87 berechneten $\mathfrak{z}$, h, z, d, ε, v nachstehende Stabkräfte in Tonnen:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{X}_1 = 0{,}61 & \mathfrak{Z}_1 = -14{,}97 & \mathfrak{D}_1 = -0{,}81 & \mathfrak{V}_1 = -1{,}02 \\ \mathfrak{X}_2 = 1{,}00 & \mathfrak{Z}_2 = -14{,}39 & \mathfrak{D}_2 = -0{,}42 & \mathfrak{V}_2 = -1{,}20 \\ \mathfrak{X}_3 = 1{,}00 & \mathfrak{Z}_3 = -14{,}05 & \mathfrak{D}_3 = 0{,}00 & \mathfrak{V}_3 = -1{,}20. \\ \mathfrak{X}_4 = 1{,}00 & \mathfrak{Z}_4 = -13{,}72 & \mathfrak{D}_4 = 0{,}00 & \end{array}$$

Für die Kämpferverticale und Scheitelverticale liefert die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die anliegenden Knotenpunkte 0 und σ des Obergurts für jede Belastung

$$V_0 + \frac{h_1}{d_1} D_1 + K_0 = 0, \qquad V_\sigma + K_\sigma = 0, \tag{3}$$

unter K_0, K_σ die entsprechenden Knotenpunktslasten verstanden. Für unsern Fall erhalten wir daraus

$$V_0 = \frac{4}{4{,}5}\, 2{,}05 - 0{,}4 \,.\, 1{,}5 = 1{,}22, \quad V_4 = -0{,}4 \,.\, 3 = -1{,}2 \text{ tn.}$$

Nach dem am Schlusse des § 85 Gesagten erleiden die Stäbe der zweiten Trägerhälfte dieselben Beanspruchungen wie die symmetrisch dazu liegenden Stäbe der ersten Trägerhälfte, wie sich denn auch in Bestätigung jener Schlüsse $\mathfrak{D}_3 = 0$, $\mathfrak{V}_2 = -g_x \lambda = -1{,}2$ ergaben.

Bemerkungen. Anstatt auf die Stabkräfte der zweiten Trägerhälfte aus der Symmetrie zu schliessen, hätten wir sie natürlich aus den Formeln 2), welche dann nur der unten liegenden X-Gurtung wegen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen wären, berechnen können. Da mit den in § 85 gegebenen Formeln 2) 6) für H die Stabkräfte nach § 18, 15)—19) mit $M = M' = 0$, $k = 0$ leicht für beliebige Verkehrslast berechnet werden können, so lassen sich nach der Methode § 12 f oder § 12 e auch die Grenzwerthe ableiten, ohne dass die Theorie weiter ausgeführt zu werden braucht.

Aufgabe 45. Bogenträger mit reellen Kämpfergelenken und einem imaginären Zwischengelenke.

Bei einem Träger der oben erwähnten Art, Hängebogen oder Sprengbogen, sei der Verbindungsgurt der gleich hohen Auflager einer symmetrisch zur Mitte liegenden Parabel eingeschrieben, während die andre Gurtung horizontal ist. Das Gelenkviereck liegt zwischen Verticalen in Entfernungen x und y von einem Auflager, im Uebrigen kann das Trägersystem beliebig sein. Zu beweisen, dass bei gleichmässig über die Trägerlänge vertheilter Belastung der

Horizontalschub genau so gross ist, als wenn das Zwischengelenk reell und inmitten des Verbindungsgurts der Auflager angebracht wäre.

Nach § 85, 8) ist der Horizontalschub für eine über den Träger gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit, bei beliebigen Gurtungsformen mit den in Fig. 182 angedeuteten Bezeichnungen und $k = 0$,

$$(1) \qquad H = [xy + (l - x - y)\,d]\,\frac{p}{2f}.$$

Im vorliegenden Falle hat man mit Rücksicht auf § 17, 18)

$$x - d : y - d = f - \frac{4h}{l^2}\,x(l - x) : f - \frac{4h}{l^2}\,y(l - y),$$

woraus die Abscisse des imaginären Gelenks

$$(2) \qquad d = \frac{xy + \frac{fl^2}{4h}}{l - x - y}.$$

Die Substitution dieses Werthes in 1) ergibt

$$(3) \qquad H = \frac{pl^2}{8f},$$

womit zufolge § 66, 12) der verlangte Beweis erbracht ist.

Da mit dem Horizontalschube bei bestimmtem Trägersystem alle äussern Kräfte dieselben wie beim Bogen mit drei Gelenken bleiben, so gilt das Gleiche für sämmtliche Stabkräfte, was speziell für einfaches System mit Verticalen auch die Gleichungen § 18, 10) mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = 0$, $k = 0$ zeigen. Nach § 75 sind also für letzteres System die Diagonalen und Stäbe des Horizontalgurts unbeansprucht, die Verticalen erhalten nur die darauf liegende Knotenpunktslast als Druck bezw. die daran hängende als Zug und die Horizontalcomponenten aller Stabkräfte des Parabelgurts sind gleich gross. Aus diesen für den Bogen mit drei reellen Gelenken erhaltenen Regeln hätten wir auch umgekehrt auf 3) schliessen können, wenigstens für einfaches System mit Verticalen. Denn wenn die Diagonalen unbeansprucht sind, so können wir beliebige derselben wegnehmen oder zufügen, ohne irgendwelche Kräfte zu ändern.

VIII. Abschnitt.

Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke mehrfachen Systems auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme.

Beispiel 107. Parallelträger doppelten Systems mit gleichgestellten Diagonalen.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Parallelträger doppelten Systems mit gleichgestellten, nur auf Zug widerstandsfähigen Diagonalen zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe $h = 6$ m, Entfernung der Verticalen von einander $\lambda = 2{,}5$ m, Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Das doppelte System Fig. 183 (in welchem man sich die punktirten Gegendiagonalen zunächst wegdenken kann, da erst durch die Berechnung der einfachen Systeme bekannt wird, wieweit Gegendiagonalen nöthig sind) zerfällt in die einfachen Systeme Fig. 184 und 185, deren jedes die Hälfte der Belastungen aufzunehmen hat. Die Berechnung dieser einfachen Systeme wurde in Beispiel 41 und 46 vollständig durchgeführt, jedoch für die ganze oben angenommene Belastung. Wir haben also die dort gefundenen Beanspruchungen zu halbiren, womit die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und beide Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder die in Fig. 184 und 185 eingeschriebenen Werthe erlangen. Vereinigen wir nun die Systeme Fig. 184 und 185 zum Systeme Fig. 183 und addiren, wie angedeutet, die Grenzbeanspruchungen zusammenfallender Stäbe, so entstehen die in Fig. 183 eingeschriebenen Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind sämmtlich $g : q = 0{,}3$ mal so gross wie die oberen und deshalb nicht eingetragen.

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt 79,42 und 20,25 tn.

Wünscht man die Trägerenden nach Fig. 186 abzuändern, so ergeben sich mit Rücksicht auf die in Beispiel 41 und 46 berechneten Beanspruchungen der entsprechenden einfachen Systeme die in Fig. 186 eingeschriebenen Aenderungen der Grenzbeanspruchungen gegenüber Fig. 183.

Sollte der Träger für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden, so würden die Beanspruchungen der einfachen Systeme halb so gross wie in Beispiel 42 und 47 berechnet sein und zur Berechnung mit genauen Lastäquivalenten solcher Züge halb so gross wie in Beispiel 43 und 48. Das Verfahren im Uebrigen würde ganz wie oben (Uebung desselben mit den Zahlen jener Beispiele zu empfehlen) und die Stützenreactionen wie in jenen Beispielen bestimmt bleiben.

Beispiel 108. Parallelträger vierfachen Systems des gleichschenkligen Dreiecks.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Parallelträger nach der Anordnung Fig. 187 zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe $h = 6$ m, normale Feldlänge der einfachen Systeme $\lambda = 5$. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0,9$ tn, Verkehrslast $p = 2,1$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und 0,3 tn auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen für vorausbestimmte Knotenpunktslasten zu berechnen.

Das vierfache System Fig. 187 zerfällt in vier einfache Systeme, welche in Fig. 189, 190, 191, 192 in den Farben schwarz, grün, roth und blau gezeichnet sind. Die Belastung der Knotenpunkte dieser Systeme beträgt (Fig. 188)

für die obere Gurtung bei Eigengewicht allein $\frac{0,6 \cdot 5}{4} = 0,75$ tn,

„ „ „ „ „ Totalbelastung $\frac{2,7 \cdot 5}{4} = 3,375$ „ ,

„ „ untere Gurtung immer $\frac{0,3 \cdot 5}{4} = 0,375$ „ .

Auf die Knotenpunkte der Endverticalen, sofern sie nach der Fig. 188 belastet anzunehmen sind, kommt nur die Häfte dieser Lasten.

Die Berechnung der Systeme Schwarz und Roth für den Fall, dass alle Knotenpunkte viermal so stark wie hier belastet sind, wurde in Beispiel 31 gezeigt. Wir erhalten also die jetzigen Beanspruchungen dieser Systeme, wenn wir die dort ermittelten einfach durch 4 dividiren. Die betreffenden Zahlen sind in Fig. 188, 189, 191 bei ihren Stäben in den Farben der Systeme eingeschrieben. Die Beanspruchungen der Systeme Grün und Blau kann man entweder direct berechnen oder wie in Fig. 193—197 angedeutet durch Interpolation finden. Das letztere Verfahren ist umsomehr genügend als bei Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke auf grosse Genauigkeit überhaupt nicht zu rechnen ist.

Nur die in Fig. 194, 196 mit O, U, V_0, D bezeichneten Stabkräfte der Systeme Grün und Blau lassen sich nicht durch Interpolation erlangen. Für diese führt die Momentenmethode (Schnitt s durch O, D, U, Drehpunkte im Durchschnitte von U und O mit D) oder die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die Schnittpunkte der Stabaxen zum Ziele. Wir erhalten für das System Grün:

$$-V.1{,}25+O.6=0 \qquad O=\frac{5}{24}V$$

$$V.1{,}25-U.6=0 \qquad U=\frac{5}{24}V$$

$$V+V_0=0 \qquad V_0=-V$$

$$V_0-D\frac{6}{6{,}5}=0 \qquad D=-\frac{13}{12}V,$$

und für das System Blau:

$$V.1{,}25+O.6=0 \qquad O=-\frac{5}{24}V$$

$$-V.1{,}25-U.6=0 \qquad U=-\frac{5}{24}V$$

$$V+V_0=0 \qquad V_0=-V$$

$$V_0+D\frac{6}{6{,}5}=0 \qquad D=\frac{13}{12}V.$$

Hiernach treten die Grenzwerthe von O, U, V_0, D zugleich mit den Grenzwerthen von V ein. Diese sind im Systeme Grün:

$$V=\frac{3{,}375}{45}(3{,}75+8{,}75+13{,}75+18{,}75+23{,}75+28{,}75+33{,}75+38{,}75+43{,}75)$$

$$+\frac{0{,}375}{45}(1{,}25+6{,}25+11{,}25+16{,}25+21{,}25+26{,}25+31{,}25+36{,}25+41{,}25)=16{,}031+1{,}594=17{,}625 \text{ tn},$$

$$V=\frac{0{,}6}{2{,}7}\,16{,}031+1{,}594=5{,}186 \text{ tn},$$

und im Systeme Blau:

$$V = \frac{8 \cdot 45}{4} - 17{,}625 = 16{,}125 \text{ tn},$$

$$V = \frac{0{,}9 \cdot 45}{4} - 5{,}186 = 4{,}939 \text{ „ }.$$

Damit folgen die gesuchten Grenzbeanspruchungen im Systeme Grün:

$$O = U = 3{,}670 \qquad V_0 = -17{,}625 \qquad D = -19{,}094 \text{ tn},$$
$$O = U = 1{,}080 \qquad V_0 = -5{,}186 \qquad D = -5{,}616 \text{ „ },$$

und im Systeme Blau:

$$O = U = -3{,}359 \qquad V_0 = -16{,}125 \qquad D = 17{,}468 \text{ tn},$$
$$O = U = -1{,}029 \qquad V_0 = -4{,}939 \qquad D = 5{,}351 \text{ „ }.$$

Auch die Grenzbeanspruchungen der Systeme Grün und Blau sind in Fig. 190 und 192 in jenen Farben bei ihren Stäben eingeschrieben.

Werden nun die vier einfachen Systeme zu dem Systeme Fig. 187 vereinigt und dabei die Beanspruchungen zusammenfallender Stäbe addirt, so entstehen die in Tafel XVIII Fig. 188 eingetragenen Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Endverticalen sind genügend genau $g:q = 0{,}3$ mal so gross wie die oberen und wurden deshalb nicht eingeschrieben. Als Grenzwerthe der Stützenreactionen hat man 67,5 und 20,25 tn wie in Beispiel 31. Inmitten der Endverticale bei 0 wirkt nach l hin eine Horizontalkraft, im Systeme Grün vom Werthe

$$D \frac{2{,}5}{6{,}5} = -\frac{5}{12} V$$

und im Systeme Blau vom Werthe

$$D \frac{2{,}5}{6{,}5} = \frac{5}{12} V.$$

Die Endverticale des vierfachen Systems wird also durch eine in ihrer Mitte wirkende Horizontalkraft vom Maximalwerthe

$$\frac{5}{12} (17{,}625 - 16{,}125) = 0{,}625 \text{ tn}$$

und vom Minimalwerthe

$$\frac{5}{12} (5{,}186 - 4{,}939) = 0{,}103 \text{ tn}$$

nach Aussen gedrückt, worauf bei der Dimensionirung Rücksicht zu nehmen ist.

Sollen die Trägerenden nach Fig. 198 abgeändert werden, so hat man, da nach Fig. 188 die Systeme Grün und Blau keine Belastungen der Endverticalen erhalten, für das System Grün (Fig. 199)

$$O = 0, \quad V.1{,}25 - U.6 = 0, \quad V_0 = 0, \quad V + D\frac{6}{6{,}5} = 0$$

und für das System Blau (Fig. 200)

$$V.1{,}25 + O.6 = 0, \quad U = 0, \quad V_0 + V = 0, \quad V - D\frac{6}{6{,}5} = 0.$$

Nach vorstehenden Gleichungen bleiben U, D für Grün und O, D für Blau wie oben und es treten gegenüber Fig. 188 nur die in Fig. 198 angedeuteten Aenderungen der Beanspruchungen ein.

Hätte man den angenommenen Träger für bewegte Radlastzüge oder genaue Lastäquivalente solcher zu berechnen, so würden die Systeme Schwarz und Roth nach den Formeln des § 30 wie in Beispiel 33 bezw. nach den Formeln der Aufgabe 30 wie in Beispiel 32 zu berechnen und im Uebrigen ganz wie oben vorzugehen sein. Die Stützenreactionen würden wie in jenen Beispielen bestimmt bleiben.

Aufgabe 46. Formeln für Endverticalen von einfachen Fachwerkträgern.

Für einfache Balkenfachwerke mit Auflagern am Untergurte die Grenzbeanspruchungen der Endverticale Fig. 201 bei Belastung durch beliebige feste Last und gleichmässig vertheilte bewegte Last oder bewegte Radlastzüge auszudrücken auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme.

Das System Fig. 201 zerfällt in die einfachen Systeme Fig. 202 und 203, sodass mit den angedeuteten Bezeichnungen für jede Belastung

(1) $$H_0 = V_0 + V_0'.$$

Die Beanspruchungen V_0, V_0' sind wegen Vertheilung der Belastung auf zwei Systeme halb so gross als in Aufgabe 19 bestimmt. Für ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht von g per Längeneinheit Träger beispielsweise, wovon g_o auf die Knotenpunkte des Obergurts und g_u auf diejenigen des Untergurts kommen, hat man nach 1) mit A. 19, 5) 6)

(2) $$\mathfrak{H}_0 = \frac{g_u - g_o}{4} v - \frac{g l}{4}.$$

a) Die Fahrbahnlast greift in den Knotenpunkten des Obergurts an. In diesem Falle erhält man aus 1) mit A. 19, 7) 8) für jede Belastung

$$(3) \qquad H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{1}{2l}\sum_0^l P(l-a) - \frac{1}{2v}\sum_0^v P(v-a).$$

Hiernach tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu H_0 bei und zwar umsomehr je näher sie nach 0 kommen. Der untere Grenzwerth tritt für Eigengewicht allein ein, der obere ergibt sich aus 3) für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0, für gleichmässig vertheilte bewegte Last mit $P = pda$

$$(4) \qquad H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{l+v}{4}p,$$

welche Gleichung noch schneller aus 1) mit A. 19, 9) 10) folgt.

b) Die Fahrbahnlast greift in den Knotenpunkten des Untergurts an. Alsdann erhält man aus 1) mit A. 19, 11) 12) für jede Belastung

$$(5) \qquad H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{l-v}{2lv}\sum_0^v Pa - \frac{1}{2l}\sum_v^l P(l-a).$$

Hiernach tragen wieder alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu H_0 bei und zwar diesmal umsomehr je näher sie nach v kommen. Der untere Grenzwerth entsteht für Eigengewicht allein, der obere ergibt sich aus 5) für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei v (bei kleinem v mitunter bei Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v), für gleichmässig vertheilte bewegte Last mit $P = pda$

$$(6) \qquad H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{l-v}{4}p,$$

welcher Ausdruck noch bequemer aus 1) mit A. 19, 12) 15) folgt.

c) Die Fahrbahnlast greift zwischen beiden Gurten in der Endverticale an. Es gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Beziehungen a) unter Berücksichtigung des Eigengewichts der Fahrbahn in g_o bezw. $\mathfrak{K}_o$, für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Beziehungen b) unter Berücksichtigung des Eigengewichts der Fahrbahn in g_u bezw. $\mathfrak{K}_u$. Dies ergibt sich aus dem in Aufgabe 19 unter c) Gesagten.

Wie die Beziehungen der Aufgabe 19 gelten auch die hier gegebenen nicht nur für einfache Balkenfachwerke, sondern auch für einfache Bogenfachwerke, falls nur die Auflager in gleicher Höhe liegen.

Aufgabe 47. Abänderung der Trägerenden beim Parallelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen.

Zu entscheiden, welche Aenderung der Stabkräfte beim einfachen oder continuirlichen Träger gegenüber der Anordnung Fig. 204 mit horizontalen Gurtungen und gleich oder verschieden langen Feldern durch Abänderung der Trägerenden nach Fig. 205 für beliebige Belastung entstehen.

Wir haben in Fig. 204 für jede Belastung

$$D_1' = -D_1 \qquad D_2' = -D_2$$

$$O_1 + \frac{\lambda_1}{d_1} D_1 = 0 \qquad U_1 - \frac{\lambda_1}{d_1} D_1 = 0 .$$

Durch die Abänderung der Trägerenden erleiden nur die Beanspruchungen der Stäbe des ersten Feldes mit Einschluss der begränzenden Verticale Aenderungen. Es verlangt nun das Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung des Knotenpunkts 1 im Obergurte

für Fig. 204 $\quad -O_1 + \frac{\lambda_1}{d_1} D_1 + O_2 + \frac{\lambda_2}{d_2} D_2 = 0,$

„ „ 205 $\quad -\frac{\lambda_1}{d_1} O \qquad + O_2 + \frac{\lambda_2}{d_2} D_2 = 0,$

das Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung des Knotenpunkts 1 im Untergurte

für Fig. 204 $\quad -U_1 - \frac{\lambda_1}{d_1} D_1 + U_2 + \frac{\lambda_2}{d_2} D_2' = 0,$

„ „ 205 $\quad -U \qquad + U_2 + \frac{\lambda_2}{d_2} D_2' = 0,$

das Gleichgewicht gegen verticale Verschiebung

des Knotenpunkts 1 im Obergurte der Fig. 205

$$H + K_o + \frac{h}{d_1} O + \frac{h}{d_2} D_2 = 0,$$

des Knotenpunkts 1 im Untergurte der Fig. 205

$$-H + K_u + \frac{h}{d_2} D_2 = 0 .$$

Durch Subtraction erhält man aus den beiden ersten Gleichungen

(1) $$O = \frac{d_1}{\lambda_1} O_1 - D_1 = -\frac{d_1}{\lambda_1} 2 U_1 ,$$

aus den beiden folgenden Gleichungen

(2) $$U = U_1 + \frac{\lambda_1}{d_1} D_1 = 2 U_1 ,$$

und aus den zwei letzten Gleichungen

$$(3)\qquad H = \frac{K_u - K_o}{2} - \frac{h}{2d_1}\,O = \frac{h}{\lambda_1}\,U_1 + \frac{K_u - K_o}{2}.$$

In diesen Gleichungen beziehen sich Grössen mit dem Index 1 auf das System Fig. 204.

Beispiel 109. Doppeltes System mit gekreuzten Diagonalen bei beliebigen Gurtungsformen (Ellipsenträger). Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Fachwerkträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe in der Mitte $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Untergurt horizontal, Obergurt einem Ellipsenbogen eingeschrieben. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}7$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_u = 0{,}6$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_o = 0{,}3$ tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen anzugeben (Fig. 206).

Die Formberechnung wurde bereits in Beispiel 35 gezeigt. Wir haben danach

für					
$m =$	1	2	3	4	5:
$h_m =$	3,6	4,8	5,5	5,88	6
$d_m =$	4,5	5,76	6,58	7,12	7,4
$d'_m =$	5,76	6,58	7,12	7,4	7,5
$o_m =$	5,76	4,66	4,55	4,52	4,50
$\varepsilon =$	1	4	7,86	15,47	50

und fügen dem nach § 87, 19) bei

$$\varrho = 2 - \frac{h_{m-1} + h_{m+1}}{h_m} = \quad 0{,}667 \quad 0{,}104 \quad 0{,}058 \quad 0{,}044 \quad 0{,}040,$$

während $u_m = \lambda = 4{,}5$ ist. Alle Längen sind in Metern gegeben.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 90, 7):

$$(1)\begin{cases} \mathfrak{U}_m = \left[\dfrac{m\,(n-m)}{h_m} + \dfrac{(m-1)\,(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\dfrac{g\lambda u_m}{4} = -\dfrac{u_m}{o_m}\,\mathfrak{O}_m, \\ \mathfrak{D}_m = \left(n - 2m + 1 - m\,\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{g\lambda}{4}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}} = -\dfrac{d_m}{d'_m}\,\mathfrak{D}'_m, \\ \mathfrak{H}_m = m\,(n-m)\,\dfrac{g\lambda\varrho}{4} + \dfrac{g_u - g_o}{2}\,\lambda. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen mit den in der Aufgabe vorgeschriebenen Werthen folgende Formen an:

$$\mathfrak{U}_m = 4{,}556 \left[\frac{m\,(10-m)}{h_m} + \frac{(m-1)\,(11-m)}{h_{m-1}}\right] = -\frac{4{,}5}{o_m}\mathfrak{O}_m,$$

$$\mathfrak{D}_m = 1{,}013 \left(11 - 2m - m\,\frac{10-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{H}_m = 1{,}013\, m\,(10-m)\,\varrho + 0{,}675,$$

und wir erhalten daraus in Tonnen:

$\mathfrak{U}_2 = 26{,}58$	$\mathfrak{O}_2 = -27{,}52$	$\mathfrak{D}_2 = 4{,}86$	$\mathfrak{H}_2 = 2{,}36$
$\mathfrak{U}_3 = 32{,}58$	$\mathfrak{O}_3 = -32{,}94$	$\mathfrak{D}_3 = 3{,}23$	$\mathfrak{H}_3 = 1{,}91$
$\mathfrak{U}_4 = 35{,}99$	$\mathfrak{O}_4 = -36{,}15$	$\mathfrak{D}_4 = 1{,}90$	$\mathfrak{H}_4 = 1{,}74$
$\mathfrak{U}_5 = 37{,}58$	$\mathfrak{O}_5 = -37{,}88$	$\mathfrak{D}_5 = 0{,}64$	$\mathfrak{H}_5 = 1{,}69$

und $\mathfrak{H}_1 = 6{,}76$. Für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{D}_1$ entsteht der unbestimmte Ausdruck $0:0$, indessen liefert A. 49, 3) für die ganzen Eigengewichtsbeanspruchungen der Gurtungsstäbe 1

$$\mathfrak{U}_1 = (n-1)\,\frac{g\lambda}{2}\,\frac{u_1}{h_1} = -\frac{u_1}{o_1}\,\mathfrak{O}_1, \tag{2}$$

woraus $\mathfrak{U}_1 = 22{,}78$, $\mathfrak{O}_1 = -29{,}16$ tn.

Grenzwerthe. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind die soeben berechneten Beanspruchungen für Eigengewicht allein, die oberen hat man nach § 91, 1) 3)

$$U_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{U}_m, \qquad O_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{O}_m, \tag{3}$$

also wegen $q:g = 4$ in Tonnen:

$U_1 = 91{,}12$	$O_1 = -116{,}64$
$U_2 = 106{,}32$	$O_2 = -110{,}08$
$U_3 = 130{,}32$	$O_3 = -131{,}76$
$U_4 = 143{,}96$	$O_4 = -144{,}60$
$U_5 = 150{,}32$	$O_5 = -150{,}32.$

Die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen ergeben sich wie in Beispiel 35, jedoch wegen halb so grosser g, p der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort. Die Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen sind dann durch

$$D'_m = -\frac{d'_m}{d_m}\,D_m \tag{4}$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{D}_2 = 21{,}53 & D_2 = 2{,}27 & D_2' = -24{,}58 & D_2' = -2{,}59 \\
\mathfrak{D}_3 = 16{,}81 & D_3 = -0{,}66 & D_3' = -18{,}18 & D_3' = 0{,}71 \\
\mathfrak{D}_4 = 13{,}30 & D_4 = -3{,}81 & D_4' = -13{,}81 & D_4' = 3{,}95 \\
\mathfrak{D}_5 = 10{,}11 & D_5 = -6{,}93 & D_5' = -10{,}24 & D_5' = 7{,}12.
\end{array}$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind deren schon berechnete Eigengewichtsbeanspruchungen, die oberen hat man nach § 91, 8)

$$(5) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + m(n-m)\frac{p\lambda\varrho}{4} + \frac{p\lambda}{2},$$

woraus in Tonnen:

$$\begin{aligned}
H_1 &= 6{,}76 + 9 \,.\, 0{,}667 \,.\, 3{,}037 + 6{,}075 = 31{,}07 \\
H_2 &= 2{,}36 + 16 \,.\, 0{,}104 \,.\, 3{,}037 + 6{,}075 = 13{,}49 \\
H_3 &= 1{,}91 + 21 \,.\, 0{,}058 \,.\, 3{,}037 + 6{,}075 = 11{,}68 \\
H_4 &= 1{,}74 + 24 \,.\, 0{,}044 \,.\, 3{,}037 + 6{,}075 = 11{,}02 \\
H_5 &= 1{,}69 + 25 \,.\, 0{,}040 \,.\, 3{,}037 + 6{,}075 = 10{,}80.
\end{aligned}$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 35 bestimmt.

Beispiel 110. Doppeltes System mit gekreuzten Diagonalen bei beliebigen Gurtungsformen (Ellipsenträger). Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles im vorigen Beispiele Gesagte gültig. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen sind deren dort berechnete Beanspruchungen durch Eigengewicht allein. Da ferner nach § 92, 2) für

$$\begin{array}{lcccc}
 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5: \\
z = \dfrac{l}{1 - \dfrac{n-m}{m-1}\dfrac{h_{m-1}}{h_m}} = & -9 & -21{,}90 & -51{,}66 & -200,
\end{array}$$

so hat man die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m, nach § 92, 1) 2)

$$(1)\begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_m + \Big[\Big(\frac{n-m}{h_m} + \frac{n-m+1}{h_{m-1}}\Big)\sum_0^{m-1} Pa \\ \qquad + \Big(\frac{n-m}{h_m} - \frac{m-1}{h_{m-1}}\Big)\sum_{m-1}^{m} P(a-z) \\ \qquad + \Big(\frac{m}{h_m} + \frac{m-1}{h_{m-1}}\Big)\sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{u_m}{2l} = -\frac{u_m}{o_m}O_m, \end{cases}$$

jedoch nach A. 49, 4) ausnahmsweise

$$(2)\quad U_1 = \mathfrak{U}_1 + \Big[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\Big]\frac{u_1}{lh_1} = -\frac{u_1}{o_1}O_1,$$

und bei derselben Belastung nach § 92, 6) die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen, wenn K die Verkehrsbelastung des unteren Knotenpunktes m bedeutet,

$$(3)\quad H_m = \mathfrak{H}_m + \Big[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{e}{2l} + \frac{K}{2}.$$

Setzen wir die Gleichungen für die erste Richtung des Zuges I (Fig. 23, 24) an und fügen die der zweiten Richtung entsprechenden Resultate in Klammern bei, so folgen mit oder ohne Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 für den Untergurt:

$$U_1 = 22{,}78 + [9 \,.\, 54{,}2 + 1996]\frac{1}{36} = 91{,}77 \text{ tn } (88{,}43),$$

$$U_2 = 26{,}58 + \Big[\Big(\frac{8}{4{,}8} + \frac{9}{3{,}6}\Big)5 \,.\, 3{,}5 + \Big(\frac{8}{4{,}8} - \frac{1}{3{,}6}\Big)(6 \,.\, 18 + 6 \,.\, 16{,}7 + 4 \,.\, 15{,}5)$$
$$+ \Big(\frac{2}{4{,}8} + \frac{1}{3{,}6}\Big)1586\Big]\frac{1}{20} = 105{,}18 \text{ tn } (103{,}18),$$

$$U_3 = 32{,}58 + \Big[\Big(\frac{7}{5{,}5} + \frac{8}{4{,}8}\Big)(5 \,.\, 8 + 6 \,.\, 3{,}8 + 6 \,.\, 2{,}5 + 6 \,.\, 1{,}2)$$
$$+ \Big(\frac{7}{5{,}5} - \frac{2}{4{,}8}\Big)(6 \,.\, 35{,}4 + 6 \,.\, 34{,}1 + 4 \,.\, 32{,}9)$$
$$+ \Big(\frac{3}{5{,}5} + \frac{2}{4{,}8}\Big)1208\Big]\frac{1}{20} = 126{,}66 \text{ tn } (128{,}24),$$

$$U_4 = 35{,}99 + \Big[\Big(\frac{6}{5{,}88} + \frac{7}{5{,}5}\Big)(5 \,.\, 12{,}5 + 6 \,.\, 8{,}3 + 6 \,.\, 7 + 6 \,.\, 5{,}7 + 4 \,.\, 4{,}5 + 5 \,.\, 1{,}5)$$
$$+ \Big(\frac{6}{5{,}88} - \frac{3}{5{,}5}\Big)(6 \,.\, 69{,}66 + 6 \,.\, 68{,}36 + 4 \,.\, 67{,}16)$$
$$+ \Big(\frac{4}{5{,}88} + \frac{3}{5{,}5}\Big)884\Big]\frac{1}{20} = 135{,}72 \text{ tn } (140{,}40),$$

$$U_5 = 37{,}58 + \Big[\Big(\frac{5}{6} + \frac{6}{5{,}88}\Big)(5 \,.\, 17 + 6 \,.\, 12{,}8 + 6 \,.\, 11{,}5 + 6 \,.\, 10{,}2 + 4 \,.\, 9 + 5 \,.\, 6 + 6 \,.\, 1{,}8 + 6 \,.\, 0{,}5) + \Big(\frac{5}{6} - \frac{4}{5{,}88}\Big)(6 \,.\, 222{,}5 + 6 \,.\, 221{,}2 + 4 \,.\, 220) + \Big(\frac{5}{6} + \frac{4}{5{,}88}\Big) 617\Big]\frac{1}{20} = 145{,}80 \text{ tn } (147{,}13),$$

und mit den ungünstigsten dieser Werthe nach dem letzten Ausdruck 1) für den Obergurt:

$$O_1 = -117{,}46 \qquad O_2 = -108{,}92 \qquad O_3 = -129{,}67$$
$$O_4 = -141{,}02 \qquad O_5 = -147{,}13.$$

Ferner ergeben sich mit

$$K = 6 + 2 \,.\, 6\,\frac{3{,}2}{4{,}5} + 4\,\frac{2}{4{,}5} = 16{,}311 \text{ tn}$$

(Fig. 207) die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$H_1 = 6{,}76 + (9 \,.\, 54{,}2 + 1 \,.\, 1996)\frac{0{,}667}{90} + 8{,}155 = 33{,}32 \text{ tn } (32{,}43)$$
$$H_2 = 2{,}36 + (8 \,.\, 144 + 2 \,.\, 1586)\frac{0{,}104}{90} + 8{,}155 = 15{,}51 \text{ „ } (15{,}37)$$
$$H_3 = 1{,}91 + (7 \,.\, 285 + 3 \,.\, 1208)\frac{0{,}058}{90} + 8{,}155 = 13{,}69 \text{ „ } (13{,}68)$$
$$H_4 = 1{,}74 + (6 \,.\, 490 + 4 \,.\, 884)\frac{0{,}044}{90} + 8{,}155 = 13{,}06 \text{ „ } (13{,}01)$$
$$H_5 = 1{,}69 + (5 \,.\, 714 + 5 \,.\, 617)\frac{0{,}040}{90} + 8{,}155 = 12{,}80 \text{ „ } (12{,}80).$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen ergeben sich wie in Beispiel 36, jedoch wegen halb so grosser g, P der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort. Die Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen sind dann durch

$$(4) \qquad D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$D_2 = 21{,}18$	$D_2 = 1{,}64$	$D_2' = -24{,}19$	$D_2' = -1{,}87$
$D_3 = 16{,}81$	$D_3 = -1{,}68$	$D_3' = -18{,}19$	$D_3' = 1{,}81$
$D_4 = 13{,}49$	$D_4 = -4{,}41$	$D_4' = -14{,}02$	$D_4' = 4{,}58$
$D_5 = 10{,}40$	$D_5 = -7{,}52$	$D_5' = -10{,}53$	$D_5' = 7{,}62.$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 36 oder 42 bestimmt.

Aufgabe 48. Einfache Balkenfachwerke doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Anwendung von Lastäquivalenten.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte einfacher Balkenfachwerke doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen und beliebigen Gurtungsformen mit Rücksicht auf die Lastäquivalente direct befahrener vollwandiger Träger zu berechnen.

Die Gurtungen können wie bei einfachem Systeme genügend genau mit demjenigen constanten p berechnet werden, welches für einen durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite l dem max M_x bei der Trägermitte entspricht. Für die Diagonalen gilt das in Aufgabe 32 für einfache Systeme Gesagte, nur dass an Stelle von p_c, p_v die Hälften dieser Werthe zu setzen sind. Die Stützenreactionen bleiben wie in Aufgabe 29 für beliebige Systeme bestimmt.

Für die Grenzbeanspruchungen der Verticalen bei gleichmässig vertheilter bewegter Last kommen nach § 91 neben $\mathfrak{H}_m$ folgende Ausdrücke vor:

$$H_m = \mathfrak{H}_m + m(n-m)\frac{p\lambda\varrho}{4} \pm \frac{p\lambda}{2},$$

$$H_m = \mathfrak{H}_m + m(n-m)\frac{p\lambda\varrho}{4},$$

$$H_m = \mathfrak{H}_m \pm \frac{p\lambda}{2}.$$

Bei bewegten Radlastzügen entspricht nach § 92 dem mit ϱ behafteten Summanden für Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei m,

$$\left[(n-m)\sum_0^m Pa + \sum_m^n P(l-a)\right]\frac{\varrho}{2l},$$

und dem von der Verkehrslast herrührenden Summanden ohne ϱ bei der gleichen Laststellung

$$\frac{K}{2} = \left[\sum_{m-1}^{m} P(a - m\lambda + \lambda) + \sum_{m}^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a)\right]\frac{1}{2\lambda},$$

unter K die in Verticale m auf den Träger kommende Verkehrslast verstanden. Für den mit ϱ behafteten Summanden wäre hiernach dasselbe Lastäquivalent massgebend wie für die X-Gurtung eines Trägers einfachen Systems mit Verticalen der Spannweite l (vergl. die Formeln § 32, 4) und § 33, 1)) und für den Summanden ohne ϱ dasselbe Lastäquivalent wie für max M_x inmitten eines vollwandigen

Trägers der Spannweite 2λ (Aufgabe 11). *Bei Berechnung der Verticalen mit Lastäquivalenten hat man also in den für gleichmässig vertheilte bewegte Last gültigen Ausdrücken der Grenzbeanspruchungen in den Summanden $\frac{p\lambda}{2}$ dasjenige p zu verwenden, welches den max M_x eines direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 2λ entspricht, in sonstigen mit p behafteten* (von dem Gliede mit ϱ herrührenden) *Summanden aber das für die Gurtungen massgebende p.* Dies gilt auch für Verticalen bei den Auflagern (Aufgabe 46), für welche jedoch Summanden $\frac{p\lambda}{2}$ nicht vorkommen.

Beispiel 111. Doppeltes System mit gekreuzten Diagonalen bei beliebigen Gurtungsformen (Ellipsenträger). Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des Beispiels 109 auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzwerthe wie mit den Radlastzügen des vorigen Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe bleibt alles in Beispiel 109 Gesagte gültig. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind nach Aufgabe 48 mit constantem p zu berechnen und zwar wäre wie für die max M_x eines durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m nach der Tabelle in Beispiel 8 zu setzen $p = 2{,}63$ tn. Wählt man nach oben abgerundet 2,7, so bleiben die in Beispiel 109 erhaltenen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen gültig.

Die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen erhält man wie in Beispiel 37, jedoch wegen halb so grosser g, p_v, p_c der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort. Die Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen sind dann wegen

$$D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m \qquad (1)$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$D_2 = 21{,}16$	$D_2 = 1{,}65$	$D_2' = -24{,}16$	$D_2' = -1{,}88$
$D_3 = 16{,}78$	$D_3 = -1{,}69$	$D_3' = -18{,}16$	$D_3' = 1{,}82$
$D_4 = 13{,}49$	$D_4 = -4{,}40$	$D_4' = -14{,}02$	$D_4' = 4{,}57$
$D_5 = 10{,}38$	$D_5 = -7{,}52$	$D_5' = -10{,}51$	$D_5' = 7{,}62$.

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Verticalen treten nach § 91, 8) für Eigengewicht allein ein, während die oberen bei gleichmässig vertheilter bewegter Last sind

$$(2) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + m(n-m)\frac{p\lambda\varrho}{4} + \frac{p\lambda}{2}.$$

Da nun nach der Tabelle in Beispiel 8 für die max M_x eines direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite $2\lambda = 9$ m das Lastäquivalent $p = 3{,}62$ wäre, so haben wir entsprechend dem Satze am Schlusse der Aufgabe 48 in 2) zu setzen

$$\frac{p\lambda}{2} = 3{,}62\,\frac{4{,}5}{2} = 8{,}145 \qquad \frac{p\lambda}{4} = 2{,}7\,\frac{4{,}5}{2} = 3{,}037,$$

und erhalten damit in Tonnen:

$$H_1 = 33{,}14 \qquad H_2 = 15{,}56 \qquad H_3 = 13{,}75$$
$$H_4 = 13{,}09 \qquad H_5 = 12{,}87.$$

Diese Werthe sind ihrer Entstehung gemäss sämmtlich um

$$8{,}145 - 6{,}075 = 2{,}07 \text{ tn}$$

grösser als die in Beispiel 109 berechneten.

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Bemerkung. Hätten wir für die Gurtungskräfte ohne Abrundung nach oben $p = 2{,}63$ gesetzt, so würden sich deren obere Grenzwerthe in Tonnen ergeben haben:

$$U_1 = 89{,}39 \qquad O_1 = -114{,}42$$
$$U_2 = 104{,}30 \qquad O_2 = -107{,}99$$
$$U_3 = 127{,}85 \qquad O_3 = -129{,}26$$
$$U_4 = 141{,}22 \qquad O_4 = -141{,}85$$
$$U_5 = 147{,}46 \qquad O_5 = -147{,}46.$$

Aufgabe 49. Endstäbe von Gurtungen einfacher Balkenfachwerke.

Für die am Auflager 0 zusammentreffenden beliebig geneigten Gurtungsstäbe einfacher Balkenfachwerke die Beanspruchungen für beliebige Belastung sowie die Grenzbeanspruchungen für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge anzugeben.

Wir führen die in Fig. 208 ersichtlichen Bezeichnungen ein. Weiter seien $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{u}_1$ die nach oben positiv gerechneten Ordinaten der Knotenpunkte, welche die Stäbe der Beanspruchungen O_1, U_1 nach

rechts begrenzen und $n = l : \lambda$. Eine jene Knotenpunkte verbindende Verticale ist gewöhnlich vorhanden, aber für die Gültigkeit der folgenden Formeln nicht nothwendig. Fürs Gleichgewicht am Auflager 0 hat man mit

(1) $$A = V - K_0$$

bei jeder Belastung

$$A + O_1 \frac{\mathfrak{o}_1}{o_1} + U_1 \frac{\mathfrak{u}_1}{u_1} = 0,$$

$$O_1 \frac{\lambda}{o_1} + U_1 \frac{\lambda}{u_1} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert mit Rücksicht auf die zweite und $\mathfrak{o}_1 - \mathfrak{u}_1 = h_1$

(2) $$\frac{U_1}{u_1} = \frac{A}{h_1} = -\frac{O_1}{o_1}.$$

Für ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht von g per Längeneinheit Träger beispielsweise hat man nach 1) den Werth von A

$$\mathfrak{A} = \frac{g\,l}{2} - \frac{g\,\lambda}{2}$$

und damit nach 2) den Werth von U_1

(3) $$\mathfrak{U}_1 = (n-1)\frac{g\lambda}{2}\frac{u_1}{h_1} = -\frac{u_1}{o_1}\mathfrak{O}_1.$$

Bei beliebiger Belastung hat man von der Verkehrslast herrührend

$$A = \frac{1}{l}\sum_0^n P(l-a) - \frac{1}{\lambda}\sum_0^1 P(\lambda - a),$$

und nach 1), wenn $\mathfrak{U}_1$ den Beitrag beliebiger fester Last zu U_1 bezeichnet,

(4) $$U_1 = \mathfrak{U}_1 + \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{u_1}{l h_1} = -\frac{u_1}{o_1}O_1.$$

Hiernach tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu U_1, O_1 bei, und zwar umsomehr, je näher sie nach 1 kommen. Die unteren Grenzwerthe von U_1, O_1 treten für Eigengewicht allein ein, die oberen ergeben sich für bewegte Radlastzüge mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei 1, aus 4), für gleichmässig vertheilte bewegte Last

(5) $$U_1 = \mathfrak{U}_1 + (n-1)\frac{p\lambda}{2}\frac{u_1}{h_1} = -\frac{u_1}{o_1}O_1,$$

welcher Werth mit $P = p\,da$ aus 4) oder einfacher mit dem von der Verkehrslast herrührenden

$$A = \frac{p\,l}{2} - \frac{p\,\lambda}{2}$$

aus 2) folgt. Wird das Eigengewicht wie die Verkehrslast gleich-

mässig vertheilt angenommen, so sind mit 3) die oberen Grenzwerthe

(6) $$U_1 = \frac{q}{g}\mathfrak{U}_1, \qquad O_1 = \frac{q}{g}\mathfrak{O}_1.$$

Weiteres über A und damit nach 2) über U_1, O_1 ist aus Aufgabe 15 zu entnehmen.

Vorstehende Gleichungen kommen zur Anwendung, wenn $h_0 = 0$ ist und damit die in §§ 90—92 gegebenen allgemeinen Formeln für U_m, O_m mit $m = 1$ auf unbestimmte Ausdrücke führen.

Aufgabe 50. Einfaches Balkenfachwerk doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Maximalbedingungen für die Stabkräfte.

Die Bedingungen für Maxima der Stabkräfte beim Befahren eines einfachen Balkenfachwerks doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen anzugeben.

Die Stabkräfte für beliebige Stellung eines Lastsystems auf dem Träger sind durch § 92, 1)—6) ausgedrückt. Differentiirt man dieselben nach a und setzt die Differentialquotienten Null, so folgen die verlangten Maximalbedingungen

(1) für U_m, O_m $$\sum_0^{m-1} P + \frac{h_{m-1}}{h_m + h_{m-1}} \sum_{m-1}^{m} P = \frac{m h_m + (m-1) h_{m-1}}{h_m + h_{m-1}} \frac{1}{n} \sum_0^{l} P,$$

(2) für D_m, D'_m $$-\sum_0^{m-1} P + (\varepsilon - 1) \sum_{m-1}^{m} P = \frac{\varepsilon - m}{n} \sum_0^{l} P,$$

und für H_m a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

(3) $$\sum_0^{m-1} P + \frac{\varrho - 1}{\varrho} \sum_{m-1}^{m} P + \frac{1}{\varrho} \sum_{m}^{m+1} P = \frac{m}{n} \sum_0^{l} P,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

(4) $$\sum_0^{m-1} P + \frac{\varrho + 1}{\varrho} \sum_{m-1}^{m} P - \frac{1}{\varrho} \sum_{m}^{m+1} P = \frac{m}{n} \sum_0^{l} P.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gilt für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Be-

dingung 3), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Bedingung 4).

Vorstehende Gleichungen lassen sich für besondere Trägerformen noch spezialisiren. So entsprechen dem Parallelträger, wegen $h_m = h_{m-1}$, $s = \infty$, $\varrho = 0$,

$$(5)\quad \text{für } U_m,\ O_m \qquad \sum_0^{m-1} P + \frac{1}{2} \sum_{m-1}^{m} P = \frac{2m-1}{2n} \sum_0^{l} P,$$

$$(6)\quad \text{für } D_m,\ D'_m \qquad \sum_{m-1}^{m} P = \frac{1}{n} \sum_0^{l} P,$$

$$(7)\quad \text{für } H_m \qquad \sum_{m-1}^{m} P = \frac{1}{2} \sum_{m-1}^{m+1} P.$$

Die abgeleiteten Gleichungen könnten wie in den Beispielen 25 und 28 zur Correctur von Laststellungen verwendet werden, was jedoch für mehrfache Systeme der ohnehin nicht genauen Berechnungen wegen am wenigsten nöthig sein wird.

Beispiel 112. Parallelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Parallelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 9$. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast 2,63 tn. Vom Eigengewichte kommen $g_u = 0{,}6$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_o = 0{,}3$ tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen (Fig. 209).

Da nach § 93, 4) allgemein

$$(1)\qquad O_m = -U_m, \qquad D'_m = -D_m,$$

so genügt es, die Grenzwerthe und Werthe für Eigengewicht allein von U_m, D_m, H_m anzugeben.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 93, 5)

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_m = [m(n-m) + (m-1)(n-m+1)]\,\dfrac{g\lambda^2}{4h}, \\ \mathfrak{D}_m = (n-2m+1)\,\dfrac{g\lambda d}{4h}, \\ \mathfrak{H}_m = \dfrac{g_u - g_o}{2}\,\lambda. \end{cases}$$

Mit den gegebenen Werthen und $d = 7{,}810$ folgen hieraus

$$\mathfrak{U}_m = \frac{15}{16}[m(9-m) + (m-1)(10-m)],$$

$$\mathfrak{D}_m = 2{,}929\,(5-m), \qquad \mathfrak{H}_m = 0{,}75 \text{ tn}.$$

Die zwei ersten Gleichungen liefern in Tonnen:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{U}_1 = 7{,}50 & \mathfrak{D}_1 = 11{,}72 \\ \mathfrak{U}_2 = 20{,}63 & \mathfrak{D}_2 = 8{,}79 \\ \mathfrak{U}_3 = 30{,}00 & \mathfrak{D}_3 = 5{,}86 \\ \mathfrak{U}_4 = 35{,}63 & \mathfrak{D}_4 = 2{,}93 \\ \mathfrak{U}_5 = 37{,}50 & \mathfrak{D}_5 = 0. \end{array}$$

Für die Verticale 0 ist nach A. 46, 2) ausnahmsweise

(3) $$\mathfrak{H}_0 = \frac{g_u - g_o}{4}\lambda - \frac{gl}{4} = -10{,}5 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte treten für Eigengewicht allein, die oberen sind nach § 93, 11) $q:g$ mal so gross als die unteren, also wegen $q:g = 3{,}53:0{,}9 = 3{,}922$

$$U_1 = 29{,}42 \qquad U_2 = 80{,}91 \qquad U_3 = 117{,}66$$
$$U_4 = 139{,}74 \qquad U_5 = 147{,}07 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe von D_m ergeben sich wie in Beispiel 41, jedoch wegen halb so grosser g, p der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort, das heisst in Tonnen:

$$\begin{array}{ll} D_1 = 45{,}96 & D_1 = 11{,}72 \\ D_2 = 35{,}00 & D_2 = 8{,}25 \\ D_3 = 25{,}12 & D_3 = 3{,}72 \\ D_4 = 16{,}30 & D_4 = -1{,}88 \\ D_5 = 8{,}56 & D_5 = -8{,}56. \end{array}$$

Die Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind nach § 93, 10)

(4) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m,$$

also die oberen Grenzbeanspruchungen

$$H_m = 0{,}75 + 2{,}63 \,.\, 2{,}5 = 7{,}32 \text{ tn},$$

jedoch nach A. 46, 6) für Verticale 0 ausnahmsweise

(5) $$H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{n-1}{4}p\lambda = -10{,}5 - 2 \,.\, 2{,}63 \,.\, 5 = -36{,}8 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Sollen die Trägerenden nach Fig. 210 abgeändert werden, so

entstehen nach A. 47, 1)—3) folgende Grenzbeanspruchungen der Endstäbe in Tonnen:

$$O = -\frac{7{,}81}{5}\,2\,.\,29{,}42 = -91{,}91 \qquad U = 2\,.\,29{.}42 = 58{,}84$$

$$\mathfrak{O} = -\frac{7{,}81}{5}\,2\,.\;\;7{,}5\;\; = -23{,}43 \qquad \mathfrak{U} = 2\,.\;\;7{,}5\;\; = 15$$

$$H = \frac{6}{5}\,29{,}42 + \frac{5}{2}\,(3{,}23 - 0{,}3) = 42{,}63$$

$$\mathfrak{H} = \frac{6}{5}\;\;7{,}5\;\; + \frac{5}{2}\,(0{,}6\;\; - 0{,}3) = \;\;9{,}75.$$

Beispiel 113. Parallelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das im vorigen Beispiele Gesagte. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen sind deren dort berechnete Beanspruchungen durch Eigengewicht allein, für die oberen hat man nach § 93 mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(1)\quad \begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_m + \Big[(2n - 2m + 1)\sum\limits_{0}^{m-1} Pa \\ \qquad + (n - 2m + 1)\sum\limits_{m-1}^{m} P(a - z) \\ \qquad\qquad + (2m - 1)\sum\limits_{m}^{n} P(l - a)\Big]\dfrac{1}{2nh}, \\ \qquad \text{worin } z = -\dfrac{m-1}{n - 2m + 1}\,l, \end{cases}$$

und mit der grössten Verkehrsbelastung K des unteren Knotenpunkts m

$$(2)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{K}{2},$$

jedoch für die Verticale 0 nach A. 46, 5) ausnahmsweise mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1,

$$(3)\qquad H_0 = \mathfrak{H}_0 - \Big[(n-1)\sum_{0}^{1} Pa + \sum_{1}^{n} P(l - a)\Big]\frac{1}{2l}.$$

Die z ergeben sich für $m = 1$ bis $m = 5$

$$z = 0 \quad -7{,}5 \quad -22{,}5 \quad -67{,}5 \quad -\frac{180}{0},$$

und nun folgen mit oder ohne Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 die oberen Grenzbeanspruchungen des Untergurts, wenn die angesetzten Gleichungen der ersten Richtung des Zuges I (Fig. 23, 24), die in Klammern beigefügten Werthe der zweiten Richtung entsprechen:

$$U_1 = 7{,}5 + [8 \,.\, 62{,}2 + 1 \,.\, 19{,}47] \frac{1}{108} = 30{,}14 \text{ tn } (28{,}96),$$

$$U_2 = 20{,}63 + [15(5 \,.\, 4{,}5 + 6 \,.\, 0{,}3) + 6(6 \,.\, 17{,}5 + 6 \,.\, 16{,}2 + 4 \,.\, 15) + 3 \,.\, 1499] \frac{1}{108} = 80{,}21 \text{ tn } (80{,}86),$$

$$U_3 = 30 + [13(5 \,.\, 9{,}5 + 6 \,.\, 5{,}3 + 6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 2{,}7 + 4 \,.\, 1{,}5) + 4(6 \,.\, 37{,}5 + 6 \,.\, 36{,}2 + 4 \,.\, 35) + 5 \,.\, 1089] \frac{1}{108} = 117{,}09 \text{ tn } (118{,}19),$$

$$U_4 = 35{,}63 + [11(5.14{,}5 + 6.10{,}3 + 6.9 + 6.7{,}7 + 4.6{,}5 + 5.3{,}5) + 2(6.87{,}5 + 6.86{,}2 + 4.85) + 7.764] \frac{1}{108} = 139{,}06 \text{ tn } (139{,}42),$$

$$U_5 = 37{,}5 + [9(5 \,.\, 19{,}5 + 6 \,.\, 15{,}3 + 6 \,.\, 14 + 6 \,.\, 12{,}7 + 4 \,.\, 11{,}5 + 5.8{,}5 + 6.4{,}3 + 6.3 + 6.1{,}7 + 4.0{,}5) + 180(6 + 6 + 4) + 9.480] \frac{1}{108} = 145{,}58 \text{ tn } (147{,}63).$$

Die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 1 bis 5 erhält man (Fig. 211)

$$H_m = 0{,}75 + \frac{1}{2}\left(6 + 6\,\frac{3{,}7 + 2{,}4}{5} + 4\,\frac{3{,}8}{5} + 5\,\frac{0{,}8}{5}\right) = 9{,}33 \text{ tn},$$

und diejenige der Verticale 0

$$H_0 = -9{,}75 - (8 \,.\, 62{,}2 + 1947) \frac{1}{90} = -36{,}91 \text{ tn } (-35{,}50).$$

Die Grenzwerthe von D_m ergeben sich wie in Beispiel 42, jedoch wegen halb so grosser g, P der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort, nämlich in Tonnen:

$D_1 = 44{,}20$	$D_1 = 11{,}72$
$D_2 = 23{,}95$	$D_2 = 7{,}76$
$D_3 = 24{,}95$	$D_3 = 3{,}01$
$D_4 = 16{,}49$	$D_4 = -2{,}59$
$D_5 = 9{,}22$	$D_5 = -9{,}22$.

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt.

Sollen die Trägerenden nach Fig. 210 abgeändert werden und berücksichtigt man (bei H), dass der obere Grenzwerth von U_1 mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1 entsteht, so ergeben sich nach A. 47, 1)—3) die oberen Grenzbeanspruchungen der Endstäbe

$$O = -\frac{7{,}81}{5}\,2\,.\,30{,}14 = -94{,}16 \qquad U = 2\,.\,30{,}14 = 60{,}28$$

$$H = \frac{6}{5}\,30{,}14 + \frac{5}{2}\,(0{,}6 - 0{,}3) + \frac{1}{2}\left(6 + 2\,.\,6\,\frac{3{,}7}{5} + 4\,\frac{2{,}5}{5}\right) = 45{,}36\,\text{tn},$$

während die unteren wie am Ende des vorigen Beispiels bestimmt bleiben.

Beispiel 114. Parallelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des vorletzten Beispiels auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzwerthe wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das in Beispiel 112 Gesagte. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen sind deren dort berechnete Beanspruchungen durch Eigengewicht allein. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen hat man nach Aufgabe 48 mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für die max M_x eines durch den angenommenen Lastzug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m zu verwenden wäre, d. h. nach der Tabelle in Beispiel 8 mit $p = 2{,}63$ tn. Da dieser Werth auch in Beispiel 112 gewählt wurde, so bleiben die dort berechneten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen gültig.

Die Grenzwerthe von D_m ergeben sich wie in Beispiel 43, jedoch wegen halb so grosser g, p_c, p_v der einfachen Systeme nur halb so gross als dort, also in Tonnen:

$D_1 = 44{,}26$	$D_1 = 11{,}72$
$D_2 = 33{,}97$	$D_2 = 7{,}75$
$D_3 = 24{,}95$	$D_3 = 3{,}00$
$D_4 = 16{,}50$	$D_4 = -2{,}59$
$D_5 = 9{,}24$	$D_5 = -9{,}24$.

Mit Rücksicht auf den Schlusssatz der Aufgabe 48 erhält man die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 1 bis 5

$$H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2} = 0{,}75 + 3{,}38\,.\,2{,}5 = 9{,}20\,\text{tn},$$

und für Verticale 0

$$H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{n-1}{4} p\lambda = -9,75 - 2 . 2,63 . 5 = -36,05 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen schliesslich sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Sollen die Trägerenden nach Fig. 210 abgeändert werden, so treten die am Schlusse des vorletzten Beispiels berechneten Grenzbeanspruchungen der Endstäbe ein.

Beispiel 115. Parallelträger doppelten Systems mit ungleichlangen Feldern. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für Parallelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen seien gegeben: Spannweite $l = 45$ m, Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Länge der zwei äussersten Felder $\lambda_1 = \lambda_n = 2,5$ m, Länge der übrigen Felder 5 m; ferner per laufenden Meter Träger Eigengewicht $g = 0,9$ tn, Verkehrslast $p = 2,63$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_u = 0,6$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_o = 0,3$ tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen (Fig. 212).

Da nach § 94, 1) für jede Belastung

(1) $$O_m = -U_m, \quad D_m' = -D_m,$$

so genügt es, die Grenzwerthe und Werthe für Eigengewicht allein von U_m, D_m, H_m anzugeben. Im Folgenden bezeichnet λ_m die Länge des m-ten Feldes und e_m die Entfernung der Verticale m vom Auflager 0.

Eigengewicht allein. Für Eigengewicht allein hat man nach § 94, 2) die Stabkräfte

(2) $$\begin{cases} \mathfrak{U}_m = [(l - e_m)\, e_m + (l - e_{m-1})\, e_{m-1}] \dfrac{g}{4h}, \\ \mathfrak{D}_m = (l - e_m - e_{m-1}) \dfrac{g d_m}{4h}, \\ \mathfrak{H}_m = (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \dfrac{g_u - g_o}{4}. \end{cases}$$

Wir erhalten hieraus in Tonnen:

$$\mathfrak{U}_1 = (42,5 \,.\, 2,5 + 45 \,.\, 0\,)\, \frac{3}{80} = 3,99$$

$$\mathfrak{U}_2 = (37,5 \,.\, 7,5 + 42,5 \,.\, 2,5)\, \frac{3}{80} = 14,53$$

$$\mathfrak{U}_3 = (32{,}5 \,.\, 12{,}5 + 37{,}5 \,.\, \ \ 7{,}5)\,\frac{3}{80} = 25{,}78$$

$$\mathfrak{U}_4 = (27{,}5 \,.\, 17{,}5 + 32{,}5 \,.\, 12{,}5)\,\frac{3}{80} = 33{,}28$$

$$\mathfrak{U}_5 = (22{,}5 \,.\, 22{,}5 + 27{,}5 \,.\, 17{,}5)\,\frac{3}{80} = 37{,}03\,,$$

$$\mathfrak{D}_1 = 42{,}5 \,.\, 6{,}54\,\frac{3}{80} = 10{,}42$$

$$\mathfrak{D}_2 = 35 \quad .\, 7{,}81\,\frac{3}{80} = 10{,}25$$

$$\mathfrak{D}_3 = 25 \quad .\, 7{,}81\,\frac{3}{80} = \ \ 7{,}32$$

$$\mathfrak{D}_4 = 15 \quad .\, 7{,}81\,\frac{3}{80} = \ \ 4{,}39$$

$$\mathfrak{D}_5 = \ \ 5 \quad .\, 7{,}81\,\frac{3}{80} = \ \ 1{,}46\,,$$

ferner für die Verticalen 2 bis 5

$$\mathfrak{H}_m = 10\,\frac{0{,}6 - 0{,}3}{4} = 0{,}75,$$

und für die Verticale 1

$$\mathfrak{H}_1 = 7{,}5\,\frac{0{,}6 - 0{,}3}{4} = 0{,}56.$$

Für die Verticale 0 ist nach A. 46, 2) ausnahmsweise

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{H}_0 = \frac{g_u - g_o}{4}\,\lambda_1 - \frac{g\,l}{4} = -\,9{,}94\ \text{tn}\,.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte treten für Eigengewicht allein ein, die oberen sind nach § 94, 7) $q:g$ mal so gross, also wegen $q:g = 3{,}53 : 0{,}9 = 3{,}922$:

$$U_1 = 15{,}65 \qquad U_2 = 56{,}59 \qquad U_3 = 101{,}11$$

$$U_4 = 130{,}52 \qquad U_5 = 145{,}23\,.$$

Die Grenzwerthe von D_m ergeben sich wie in Beispiel 46, jedoch wegen halb so grosser g, p der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort, nämlich in Tonnen:

$$D_1 = 40{,}86 \qquad D_1 = \ \ 10{,}42$$

$$D_2 = 40{,}34 \qquad D_2 = \ \ 10{,}12$$

$$D_3 = 29{,}92 \qquad D_3 = \ \ \ \ 6{,}12$$

$$D_4 = 20{,}58 \qquad D_4 = \ \ \ \ 1{,}05$$

$$D_5 = 12{,}30 \qquad D_5 = -\ \ 5{,}09\,.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind nach § 94, 6)

$$\text{(4)} \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + (\lambda_m + \lambda_{m+1})\,\frac{p}{4}\,, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m\,,$$

also die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 2 bis 5

$$H_m = 0{,}75 + \frac{10}{4} 2{,}63 = 7{,}32 \text{ tn},$$

und die obere Grenzbeanspruchung der Verticale 1

$$H_1 = 0{,}56 + \frac{7{,}5}{4} 2{,}63 = 5{,}49 \text{ tn},$$

während für Verticale 0 nach A. 46, 6) ausnahmsweise

$$H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{l - \lambda_1}{4} p = -37{,}88 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Sollen die Trägerenden nach Fig. 213 abgeändert werden, so entstehen nach A. 47, 1)—3) folgende Grenzbeanspruchungen der Endstäbe in Tonnen:

$$O = -\frac{6{,}54}{2{,}5} 2 \,.\, 15{,}65 = -81{,}88 \qquad U = 2 \,.\, 15{,}65 = 31{,}30$$

$$\mathfrak{O} = -\frac{6{,}54}{2{,}5} 2 \,.\, \ 3{,}99 = -20{,}88 \qquad \mathfrak{U} = 2 \,.\, \ 3{,}99 = \ 7{,}98,$$

$$H = \frac{6}{2{,}5} 15{,}65 + \frac{3{,}75}{2} (3{,}23 - 0{,}3) = 43{,}05$$

$$\mathfrak{H} = \frac{6}{2{,}5} \ 3{,}99 + \frac{3{,}75}{2} (0{,}6 \ - 0{,}3) = 10{,}14.$$

Beispiel 116. Parallelträger doppelten Systems mit ungleichlangen Feldern. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das im vorigen Beispiele Gesagte. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen sind deren dort berechnete Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen hat man bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m (wegen lauter negativer z),

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} U_m = \mathfrak{U}_m + \Big[& (2l - e_m - e_{m-1}) \sum_0^{m-1} Pa \\ & + (l - e_m - e_{m-1}) \sum_{m-1}^{m} P(a - z) \\ & + (e_m + e_{m-1}) \sum_m^n P(l - a) \Big] \frac{1}{2lh}, \\ \text{worin} \quad & z = -\frac{l e_{m-1}}{l - e_m - e_{m-1}}, \end{aligned} \right.$$

und mit der grössten Verkehrslast K des unteren Knotenpunktes m

$$(2) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{K}{2},$$

jedoch nach A. 46, 5) ausnahmsweise für Verticale 0 mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1,

$$(3) \qquad H_0 = \mathfrak{H}_0 - \left[\frac{l-\lambda_1}{\lambda_1} \sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right] \frac{1}{2l}.$$

Die s ergeben sich für $m = 1$ bis $m = 5$

$$s = 0 \quad -3{,}21 \quad -13{,}5 \quad -37{,}5 \quad -157{,}5.$$

Setzen wir die Ausdrücke der oberen Grenzbeanspruchungen U_m für die erste Richtung des Zuges I (Fig. 23, 24) an und fügen die der zweiten Richtung entsprechenden Resultate in Klammern bei, so folgen mit oder ohne Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6:

$$U_1 = 3{,}99 + [42{,}5\,(6 \,.\, 2{,}5 + 6 \,.\, 1{,}2) + 2{,}5 \,.\, 2206]\,\frac{1}{540} = 15{,}95 \text{ tn } (15{,}65),$$

$$U_2 = 14{,}53 + [80 \,.\, 5 \,.\, 2 + 35\,(6 \,.\, 10{,}71 + 6 \,.\, 9{,}41 + 4 \,.\, 8{,}21) + 10 \,.\, 1717]\,\frac{1}{540} = 57{,}76 \text{ tn } (55{,}96),$$

$$U_3 = 25{,}78 + [70\,(5 \,.\, 7 + 6 \,.\, 2{,}8 + 6 \,.\, 1{,}5 + 6 \,.\, 0{,}2) + 25\,(6 \,.\, 26 + 6 \,.\, 24{,}7 + 4 \,.\, 23{,}5) + 20 \,.\, 1290]\,\frac{1}{540} = 100{,}02 \text{ tn } (101{,}43),$$

$$U_4 = 33{,}28 + [60\,(5 \,.\, 12 + 6 \,.\, 7{,}8 + 6 \,.\, 6{,}5 + 6 \,.\, 5{,}2 + 4 \,.\, 4 + 5 \,.\, 1) + 15\,(6 \,.\, 55 + 6 \,.\, 53{,}7 + 4 \,.\, 52{,}5) + 30 \,.\, 916]\,\frac{1}{540} = 130{,}12 \text{ tn } (130{,}06),$$

$$U_5 = 37{,}03 + [50\,(5 \,.\, 17 + 6 \,.\, 12{,}8 + 6 \,.\, 11{,}5 + 6 \,.\, 10{,}2 + 4 \,.\, 9 + 5 \,.\, 6 + 6 \,.\, 1{,}8 + 6 \,.\, 0{,}5) + 5\,(6 \,.\, 180 + 6 \,.\, 178{,}7 + 4 \,.\, 177{,}5) + 40 \,.\, 617]\,\frac{1}{540} = 143{,}66 \text{ tn } (144{,}29).$$

Weiter erhält man die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 2 bis 5 (Fig. 211)

$$H_m = 0{,}75 + \frac{1}{2}\left(6 + 6\,\frac{3{,}7 + 2{,}4}{5} + 4\,\frac{3{,}8}{5} + 5\,\frac{0{,}8}{5}\right) = 9{,}33 \text{ tn},$$

der Verticale 1 (Fig. 214)

$$H_m = 0{,}56 + \frac{1}{2}\left(6 + 6\,\frac{3{,}7 + 2{,}4}{5} + 4\,\frac{1{,}3}{2{,}5}\right) = 8{,}26 \text{ tn},$$

und der Verticale 0

$$H_0 = -\,9{,}94 - [17\,(6\,.\,2{,}5 + 6\,.\,1{,}2) + 2206]\,\frac{1}{90}$$
$$= -\,38{,}64 \text{ tn } (-\,37{,}92).$$

Die Grenzwerthe von D_m ergeben sich wie in Beispiel 47, jedoch wegen halb so grosser g, P der einfachen Systeme nur halb so gross als dort, also in Tonnen:

$$D_1 = 40{,}92 \qquad D_1 = 10{,}42$$
$$D_2 = 38{,}99 \qquad D_2 = 9{,}91$$
$$D_3 = 29{,}32 \qquad D_3 = 5{,}44$$
$$D_4 = 20{,}65 \qquad D_4 = 0{,}40$$
$$D_5 = 12{,}63 \qquad D_5 = -\,5{,}83.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt.

Sollen die Trägerenden nach Fig. 213 abgeändert werden und berücksichtigt man (bei H), dass der obere Grenzwerth von U_1 mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1 eintritt, so ergeben sich nach A. 47, 1)—3) die oberen Grenzbeanspruchungen der Endstäbe

$$O = -\,\frac{6{,}54}{2{,}5}\,2\,.\,15{,}95 = -\,83{,}45 \qquad U = 2\,.\,15{,}95 = 31{,}90$$

$$H = \frac{6}{2{,}5}\,15{,}95 + \frac{3{,}75}{2}\,(0{,}6 - 0{,}3) + \frac{1}{2}\left(6 + 6\,\frac{3{,}7}{5} + 6\,\frac{1{,}2}{2{,}5}\right) = 45{,}50 \text{ tn},$$

während die unteren wie am Ende des vorigen Beispiels bestimmt bleiben.

Beispiel 117. Parallelträger doppelten Systems mit ungleichlangen Feldern. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Brückenträger des vorliegenden Beispiels auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzwerthe wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das in Beispiel 115 Gesagte. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen sind deren dort berechnete Eigengewichtsbeanspruchungen. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für die max M_x eines durch den

angenommenen Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m zu verwenden wäre, d. i. nach der Tabelle in Beispiel 8 mit $p = 2{,}63$ tn. Da dieser Werth schon in Beispiel 115 gewählt wurde, so bleiben die dort berechneten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen gültig.

Die Grenzwerthe von D_m ergeben sich wie in Beispiel 48, jedoch wegen halb so grosser g, p_c, p_v der einfachen Systeme nur halb so gross als dort, nämlich in Tonnen:

$$\begin{array}{ll} D_1 = 40{,}84 & D_1 = \quad 10{,}42 \\ D_2 = 39{,}02 & D_2 = \quad 9{,}91 \\ D_3 = 29{,}32 & D_3 = \quad 5{,}44 \\ D_4 = 20{,}64 & D_4 = \quad 0{,}40 \\ D_5 = 12{,}66 & D_5 = -\ 5{,}82. \end{array}$$

Ganz entsprechend dem Verfahren bei gleichlangen Feldern erhält man die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen nach der für gleichmässig vertheilte bewegte Last gültigen Formel

$$H_m = \mathfrak{H}_m + (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \frac{p}{4}$$

mit demjenigen p, welches für die max M_x eines direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite $\lambda_m + \lambda_{m+1}$ gilt, also mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 8 für die Verticalen 2 bis 5

$$H_m = 0{,}75 + \frac{10}{4}\, 3{,}38 = 9{,}20 \text{ tn}$$

und für die Verticale 1

$$H_m = 0{,}56 + \frac{7{,}5}{4}\, 4{,}05 = 8{,}15 \text{ tn}.$$

Nur für die Verticale 0 gilt mit dem für die Gurtungen verwendeten p

$$H_0 = \mathfrak{H}_0 - \frac{l - \lambda_1}{4}\, p = -\ 37{,}88 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Sollen die Trägerenden nach Fig. 213 abgeändert werden, so treten die am Schlusse des vorletzten Beispiels berechneten Grenzbeanspruchungen der Endstäbe ein.

Beispiel 118. Parallelträger vierfachen Systems mit gekreuzten Diagonalen.

Für eine Brücke von $l = 45$ m Spannweite sollen Parallelträger

nach der Anordnung Fig. 215 zur Verwendung kommen. Gewünschte Trägerhöhe $h = 6$ m, Entfernung der Verticalen von einander 2,5 m. Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn. Vom Eigengewichte kommen 0,6 tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift und 0,3 tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen.

Das vierfache System Fig. 215 zerfällt in die zwei doppelten Systeme Fig. 216, 217. Die Stabkräfte der Letzteren ergeben sich wie in Beispiel 112 und 115, jedoch wegen halb so grosser g, p der doppelten Systeme nur halb so gross wie dort. Die betreffenden Grenzbeanspruchungen wurden in Fig. 216, 217 bei ihren Stäben eingeschrieben, abgesehen von den unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen, welche $\frac{g}{q} = \frac{0{,}9}{3{,}53}$ mal so gross als die oberen sind, und abgesehen von den Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin abfallenden Diagonalen, welche gleiche Zahlenwerthe mit entgegengesetzten Vorzeichen wie die sie durchkreuzenden haben. Vereinigen wir nun die Systeme Fig. 216, 217 zum Systeme Fig. 215 und addiren, wie angedeutet, die oberen Grenzbeanspruchungen zusammenfallender Untergurtstäbe (womit auch die oberen Grenzbeanspruchungen des Obergurts bekannt werden), so entstehen die in Fig. 215 eingeschriebenen Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder und oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen, welche für Eigengewicht allein eintreten, sind wieder $g : q$ mal so gross als die oberen und deshalb nicht eingetragen. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 112 und 115 79,42 und 20,25 tn.

Wünscht man die Trägerenden nach Fig. 218 abzuändern, so ergeben sich mit Rücksicht auf die in Beispiel 112 und 115 berechneten Beanspruchungen der entsprechenden doppelten Systeme die in Fig. 218 eingeschriebenen Aenderungen der Grenzbeanspruchungen gegenüber Fig. 215.

Sollte der Träger für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden, so würden die Beanspruchungen der doppelten Systeme halb so gross wie in Beispiel 113, 116 berechnet sein und zur Berechnung mit Lastäquivalenten solcher Züge halb so gross wie in Beispiel 114, 117. Das Verfahren im Uebrigen würde ganz wie oben (Uebung desselben mit

den Zahlen jener Beispiele zu empfehlen) und die Stützenreactionen wie in jenen Beispielen bleiben.

Beispiel 119. Dreiecksträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für Dreiecksträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen nach der Anordnung Fig. 219 (die auf der zweiten Trägerhälfte eingeschriebenen Zahlen bedeuten Stablängen) seien gegeben: Spannweite $l = 24$ m, Trägerhöhe in der Mitte $h = 4$ m, Felderzahl $n = 8$; ferner per laufenden Meter Träger Eigengewicht $g = 0{,}73$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}77$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_o = 0{,}53$ tn auf die Knotenpunkte des Obergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_u = 0{,}2$ tn auf diejenigen des Untergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen festzustellen.

Nach § 95 hat man von 0 bis zur mittleren Verticale

$$(1) \qquad \frac{m}{h_m} = \frac{m-1}{h_{m-1}} = \frac{1}{c} \quad \text{mit} \quad c = \frac{2h}{n} = 1.$$

Die mittlere Verticale ist nach den Formeln für beliebige Gurtungsformen zu berechnen und dabei wegen horizontalen Obergurtes nach § 90, 4)

$$(2) \qquad \varrho = \frac{h_{m-1} + h_{m+1}}{h_m} - 2 = -\frac{1}{2}.$$

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 95, 5) und § 38, 5) sowie nach § 90, 7) mit $\varrho = 0$

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_m = (2n - 2m + 1)\,\frac{g\lambda u}{4c} = -\frac{u}{\lambda}\,\mathfrak{O}_m, \\ \mathfrak{D}'_m = \frac{g\lambda}{4c}\,d'_m, \qquad \mathfrak{D}_m = -\frac{g\lambda}{4c}\,d_m, \\ \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2}\,\lambda. \end{cases}$$

Die Gleichungen für Gurtungen und Diagonalen nehmen mit den gegebenen Werthen folgende Formen an:

$$\mathfrak{U}_m = 1{,}729\,(17 - 2m) = -\frac{3{,}16}{3}\,\mathfrak{O}_m,$$

$$\mathfrak{D}'_m = 0{,}547\,d'_m, \qquad \mathfrak{D}_m = -0{,}547\,d_m,$$

woraus in Tonnen:

$\mathfrak{U}_1 = 25{,}94 \quad \mathfrak{O}_1 = -\ 24{,}63$

$\mathfrak{U}_2 = 22{,}48 \quad \mathfrak{O}_2 = -\ 21{,}35 \quad \mathfrak{D}_2' = 1{,}73 \quad \mathfrak{D}_2 = -\ 1{,}97$

$\mathfrak{U}_3 = 19{,}02 \quad \mathfrak{O}_3 = -\ 18{,}06 \quad \mathfrak{D}_3' = 1{,}97 \quad \mathfrak{D}_3 = -\ 2{,}32$

$\mathfrak{U}_4 = 15{,}56 \quad \mathfrak{O}_4 = -\ 14{,}78 \quad \mathfrak{D}_4' = 2{,}32 \quad \mathfrak{D}_4 = -\ 2{,}74.$

Für die Verticalen 1 bis 3 liefert 3)

$$\mathfrak{H}_m = -\ 0{,}50 \text{ tn},$$

während für die mittlere Verticale σ nach § 90, 7)

$$\mathfrak{H}_\sigma = \frac{g\,l}{8}\sigma\varrho + \frac{g_u - g_o}{2}\lambda = -\ 4{,}88 \text{ tn}.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzbeanspruchungen sämmtlicher Stäbe treten für Eigengewicht allein ein, die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen sind nach § 95, 9) und § 39, 8) $q:g$ mal so als die unteren, also wegen $q:g = 3{,}5:\ 0{,}73 = 4{,}794$:

$U_1 = 124{,}36 \quad O_1 = -\ 118{,}08$

$U_2 = 107{,}77 \quad O_2 = -\ 102{,}35 \quad D_2' = 8{,}29 \quad D_2 = -\ 9{,}44$

$U_3 = 91{,}18 \quad O_3 = -\ 86{,}58 \quad D_3' = 9{,}44 \quad D_3 = -\ 11{,}12$

$U_4 = 74{,}59 \quad O_4 = -\ 70{,}86 \quad D_4' = 11{,}12 \quad D_4 = -\ 13{,}14.$

Als obere Grenzbeanspruchungen der Verticalen hat man nach § 91, 12) für die Verticalen 1 bis 3 mit $\varrho = 0$

$$H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2} = -\ 4{,}56 \text{ tn},$$

und für die mittlere Verticale

$$H_\sigma = \mathfrak{H}_\sigma + \frac{p\,l}{8}\sigma\varrho - \frac{p\lambda}{2} = -\ 25{,}66 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 54 bestimmt.

Beispiel 120. Dreieckstträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das im vorigen Beispiele Gesagte. Die unteren Grenzwerthe sämmtlicher Stabkräfte sind die dort berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen hat man nach § 93, 1) 2) und B. 119, 1) mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m (wegen lauter negativer z),

$$(1)\quad \begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_m + \Big[\Big(\frac{n-m}{h_m} + \frac{n-m+1}{h_{m-1}}\Big)\sum_0^{m-1} Pa \\ \qquad + \frac{n-2m}{cm}\sum_{m-1}^{m} P(a-z) \\ \qquad + \frac{2}{c}\sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{u}{2l} = -\frac{u}{\lambda}O_m \\ \text{mit} \qquad z = -\frac{m}{n-2m}l, \end{cases}$$

jedoch ausnahmsweise nach A. 49, 4) mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1,

$$(2)\quad U_1 = \mathfrak{U}_1 + \Big[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\Big]\frac{u}{lh_1} = -\frac{u}{\lambda}O_1;$$

ferner nach § 92, 5) für die Verticalen 1 bis 3 wegen $\varrho = 0$ mit der grössten Verkehrsbelastung K des Knotenpunktes m

$$(3)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{K}{2},$$

und für die mittlere Verticale σ mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei der Trägermitte,

$$(4)\qquad H_\sigma = \mathfrak{H}_\sigma + \Big[\sum_0^\sigma Pa + \sum_\sigma^n P(l-a)\Big]\frac{\varrho}{4\lambda} - \frac{K}{2}.$$

Die z für $m = 2$ bis $m = 4$ ergeben sich

$$z = \quad -12 \quad -36 \quad -\frac{96}{0}.$$

Setzen wir die Gleichungen der U für die erste Richtung des Zuges I an (Fig. 23, 24) und fügen die der zweiten Richtung entsprechenden Resultate in Klammern bei, so erhalten wir mit oder ohne Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 für den Untergurt:

$$U_1 = 25{,}94 + [7\,.\,30{,}2 + 535]\,\frac{3{,}16}{24} = 126{,}61 \text{ tn } (118{,}31),$$

$$U_2 = 22{,}48 + \Big[\Big(\frac{6}{2} + \frac{7}{1}\Big)\,5\,.\,0{,}5 + 2\,(6\,.\,18 + 6\,.\,16{,}7 + 4\,.\,15{,}5) + 2\,.\,383\Big]\,\frac{3{,}16}{48} = 110{,}09 \text{ tn } (102{,}91),$$

$$U_3 = 19{,}02 + \Big[\Big(\frac{5}{3} + \frac{6}{2}\Big)\,5\,.\,3{,}5 + \frac{2}{3}\,(6\,.\,45 + 6\,.\,43{,}7 + 4\,.\,42{,}5) + 2\,.\,271\Big]\,\frac{3{,}16}{48} = 90{,}88 \text{ tn } (89{,}60),$$

$$U_4 = 15{,}56 + \Big[\Big(\frac{4}{4} + \frac{5}{3}\Big)\,(5\,.\,6{,}5 + 6\,.\,2{,}3 + 6\,.\,1) + 24\,(6 + 6 + 4) + 2\,.\,173\Big]\,\frac{3{,}16}{48} = 72{,}77 \text{ tn } (73{,}87),$$

und mit den ungünstigsten dieser Werthe nach dem zweiten Ausdrucke 1) für den Obergurt:

$$O_1 = -120{,}19 \qquad O_3 = -86{,}27$$
$$O_2 = -104{,}51 \qquad O_4 = -70{,}12\,.$$

Weiter folgen die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 1 bis 3

$$H_m = -0{,}50 - \frac{1}{2}\left(6 + 2\,.\,6\,\frac{1{,}7}{3} + 4\,\frac{0{,}5}{3}\right) = -7{,}23 \text{ tn},$$

und diejenige der Verticale 4 (Richtung des Zuges I gleichgültig)

$$H_4 = -4{,}88 - (226 + 173)\,\frac{1}{24}$$
$$-\frac{1}{2}\left(6 + 2\,.\,6\,\frac{1{,}7}{3} + 4\,\frac{0{,}5}{3}\right) = -28{,}23 \text{ tn}\,.$$

Die oberen Grenzwerthe D_m' ergeben sich wie die D_m in Beispiel 52, jedoch wegen halb so grosser g, P der einfachen Systeme nur halb so gross als dort. Die oberen Grenzwerthe D_m sind damit wegen

$$D_m = -\frac{d_m}{d_m'}\,D_m' \tag{5}$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$$D_2' = 12{,}37 \qquad D_3' = 12{,}12 \qquad D_4' = 12{,}92$$
$$D_2 = -14{,}13 \qquad D_3 = -14{,}24 \qquad D_4 = -15{,}23\,.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 55 bestimmt.

Beispiel 121. Dreiecksträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Dreiecksträger des vorletzten Beispiels auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzwerthe wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das im vorletzten Beispiele Gesagte. Die unteren Grenzbeanspruchungen aller Stäbe sind deren dort berechnete Eigengewichtsbeanspruchungen. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen hat man nach Aufgabe 48 mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für die max M_x eines direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 24 m zu verwenden wäre. Aus der Tabelle in Beispiel 8 entnimmt man $p = 2{,}77$ tn, und da dieser Werth bereits in Beispiel 119 gewählt wurde, so bleiben die dort berechneten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen gültig.

Die oberen Grenzwerthe von D'_m ergeben sich wie die der D_m in Beispiel 53, jedoch wegen halb so grosser g, p der einfachen Systeme nur halb so gross als dort. Die oberen Grenzwerthe von D_m sind damit wegen

$$D_m = -\frac{d_m}{d'_m} D'_m$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$$D_2' = 12{,}37 \qquad D_3' = 11{,}78 \qquad D_4' = 12{,}31$$
$$D_2 = -14{,}13 \qquad D_3 = -13{,}84 \qquad D_4 = -14{,}50\,.$$

Mit Rücksicht auf den Schlusssatz der Aufgabe 48 und die Tabelle in Beispiel 8 folgen die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen 1 bis 3

$$H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2} = -0{,}50 - 4{,}49\,.\,1{,}5 = -7{,}23 \text{ tn},$$

und diejenige der mittleren Verticale

$$H_\sigma = \mathfrak{H}_\sigma + \frac{pl}{8}\sigma\varrho - \frac{p\lambda}{2} = -4{,}88 - 2{,}77\,\frac{24\,.\,4}{8\,.\,2}$$
$$-4{,}49\,.\,1{,}5 = -28{,}23 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 56 bestimmt.

Beispiel 122. Parabelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Für einfache Balkenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen, horizontalem Untergurte und parabolischem Obergurte sind gegeben: Spannweite $l = 24$ m, Trägerhöhe $h = 3{,}2$ m, Felderzahl $n = 8$; ferner per laufenden Meter Träger Eigengewicht $g = 0{,}73$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}77$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_u = 0{,}53$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_o = 0{,}2$ tn auf diejenigen des Obergurts. Die Grenzwerthe der Stabkräfte und Stützenreactionen zu berechnen. (Fig. 220).

Die Formberechnung wurde schon in Beispiel 54 gezeigt. Wir haben demnach in Metern

für					
	$m =$	1	2	3	4:
	$h_m =$	1,4	2,4	3	3,2
	$o_m =$	3,31	3,16	3,06	3,01
	$d_m =$	3	3,31	3,84	4,24
	$d'_m =$	3,31	3,84	4,24	4,39,

während $u_m = \lambda = 3$ und der Pfeil des die Obergurtform bestimmenden Parabelbogens $f = h = 3{,}2$ ist.

Eigengewicht allein. Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte hat man nach § 96, 6) 8)

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_m = \dfrac{gl^2}{8f} = -\dfrac{\lambda}{o_m}\mathfrak{O}_m, \\ \mathfrak{D}_m = 0 = \mathfrak{D}'_m, \qquad \mathfrak{H}_m = \lambda g_u, \end{cases}$$

woraus mit den gegebenen Zahlenwerthen in Tonnen:

$$\mathfrak{U}_m = 16{,}42 \qquad \mathfrak{H}_m = 1{,}59$$

$$\mathfrak{O}_1 = -18{,}12 \quad \mathfrak{O}_2 = -17{,}30 \quad \mathfrak{O}_3 = -16{,}75 \quad \mathfrak{O}_4 = -16{,}48.$$

Grenzwerthe. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen treten für Eigengewicht allein ein, die oberen Grenzbeanspruchungen sind nach § 97, 12) 10)

$$(2)\qquad \begin{cases} U_m = \dfrac{q}{g}\mathfrak{U}_m \qquad O_m = \dfrac{q}{g}\mathfrak{O}_m \\ \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + p\lambda, \end{cases}$$

also mit $q : g = 3{,}5 : 0{,}73 = 4{,}794$ in Tonnen:

$$U_m = 78{,}72 \qquad H_m = 9{,}9$$

$$O_1 = -86{,}87 \quad O_2 = -82{,}94 \quad O_3 = -80{,}30 \quad O_4 = -79{,}01.$$

Als Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen hat man nach § 97, 2)

$$(3)\qquad D_m = \frac{n}{n+1}\frac{pl}{16f}d_m, \quad D_m = -\frac{n}{n+1}\frac{pl}{16f}d_m,$$

und als Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen

$$(4)\qquad D'_m = -\frac{n}{n+1}\frac{pl}{16f}d'_m, \quad D'_m = \frac{n}{n+1}\frac{pl}{16f}d'_m.$$

Diese Gleichungen liefern in Tonnen:

$$D_2 = \pm 3{,}82 \qquad D'_2 = \mp 4{,}43$$
$$D_3 = \pm 4{,}43 \qquad D'_3 = \mp 4{,}89$$
$$D_4 = \pm 4{,}89 \qquad D'_4 = \mp 5{,}07.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 54 bestimmt.

Beispiel 123. Parabelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die Träger des vorigen Beispiels sollen nun einer eingeleisigen

Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das im vorigen Beispiele Gesagte. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen sind die dort berechneten Eigengewichtsbeanspruchungen, die oberen ergeben sich nach den schon in Beispiel 110 verwendeten Formeln für beliebige Gurtungsformen. Dabei kommt bezüglich der U_m in Betracht, dass beim Parabelträger

$$z = -\frac{(m-1)\,h_m}{(n-m)\,h_{m-1}-(m-1)\,h_m}\,l = -\frac{m}{n-2m+1}\,l$$

auf der ersten Trägerhälfte stets negativ ist, im vorliegenden Falle für

	U_2	U_3	U_4:
$z =$	$-9{,}6$	-24	-96,

und bezüglich der H_m ist zu beachten, dass nach § 96, 4) für

	V_1	V_2	V_3	V_4:
$\varrho = \frac{1}{m(n-m)} =$	0,286	0,167	0,133	0,125.

Wir setzen nun die Ausdrücke der oberen Grenzbeanspruchungen für die erste Richtung des Zuges I an (Fig. 23, 24) und fügen die Resultate für die zweite Zugrichtung in Klammern bei. Es folgen mit oder ohne Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 für den Untergurt:

$$U_1 = 16{,}42 + [7\,.\,30{,}2 + 535]\,\frac{1}{8\,.\,1{,}4} = 83{,}06 \text{ tn } (79{,}04),$$

$$U_2 = 16{,}42 + \left[\left(\tfrac{6}{2{,}4}+\tfrac{7}{1{,}4}\right)5\,.\,0{,}5 + \left(\tfrac{6}{2{,}4}-\tfrac{1}{1{,}4}\right)(6\,.\,15{,}6+6\,.\,14{,}3+4\,.\,13{,}1) + \left(\tfrac{2}{2{,}4}+\tfrac{1}{1{,}4}\right)383\right]\frac{1}{16} = 80{,}52 \text{ tn } (75{,}34),$$

$$U_3 = 16{,}42 + \left[\left(\tfrac{5}{3}+\tfrac{6}{2{,}4}\right)5\,.\,3{,}5 + \left(\tfrac{5}{3}-\tfrac{2}{2{,}4}\right)(6\,.\,33+6\,.\,31{,}7+4\,.\,30{,}5) + \left(\tfrac{3}{3}+\tfrac{2}{2{,}4}\right)271\right]\frac{1}{16} = 78{,}62 \text{ tn } (77{,}46),$$

$$U_4 = 16{,}42 + \left[\left(\tfrac{4}{3{,}2}+\tfrac{5}{3}\right)(5\,.\,6{,}5+6\,.\,2{,}3+6\,.\,1) + \left(\tfrac{4}{3{,}2}-\tfrac{3}{3}\right)(6\,.\,108+6\,.\,106{,}7+4\,.\,105{,}5) + \left(\tfrac{4}{3{,}2}+\tfrac{3}{3}\right)173\right]\frac{1}{16} = 77{,}01 \text{ tn } (78{,}04),$$

und mit den ungünstigsten dieser Werthe nach dem zweiten Ausdrucke B. 110, 1) für den Obergurt:

$O_1 = -91{,}65 \quad O_2 = -84{,}81 \quad O_3 = -80{,}20 \quad O_4 = -78{,}29.$

Ferner erhalten wir mit

$$K = 6 + 2 \cdot 6 \frac{1{,}7}{3} + 4 \frac{0{,}5}{3} = 13{,}467 \text{ tn}$$

die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$H_1 = 1{,}59 + (7 \cdot 30{,}2 + 1 \cdot 535) \frac{0{,}286}{48} + 6{,}733 = 12{,}77 \text{ tn } (12{,}50)$$

$$H_2 = 1{,}59 + (6 \cdot 80{,}7 + 2 \cdot 383) \frac{0{,}167}{48} + 6{,}733 = 12{,}67 \text{ „ } (12{,}41)$$

$$H_3 = 1{,}59 + (5 \cdot 144 + 3 \cdot 271) \frac{0{,}133}{48} + 6{,}733 = 12{,}57 \text{ „ } (12{,}45)$$

$$H_4 = 1{,}59 + (4 \cdot 226 + 4 \cdot 173) \frac{0{,}125}{48} + 6{,}733 = 12{,}48 \text{ „ } (12{,}48).$$

Die Grenzwerthe von D_m ergeben sich wie in Beispiel 55, jedoch wegen halb so grosser g, P der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort. Die Grenzwerthe von D'_m sind damit wegen

$$D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$D_2 = 4{,}39$	$D_2 = -5{,}28$	$D_2' = -5{,}09$	$D_2' = 6{,}12$
$D_3 = 5{,}10$	$D_3 = -6{,}23$	$D_3' = -5{,}63$	$D_3' = 6{,}88$
$D_4 = 5{,}68$	$D_4 = -6{,}27$	$D_4' = -5{,}88$	$D_4' = 6{,}49.$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen schliesslich sind wie in Beispiel 55 bestimmt.

Beispiel 124. Parabelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die Träger des vorletzten Beispiels auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzwerthe wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen.

Bis zur Berechnung der Grenzwerthe gilt das in Beispiel 122 Gesagte. Die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind wie dort mit constantem p zu berechnen und zwar ist wie für die max M_x eines durch den angenommenen Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 24 m nach der Tabelle in Beispiel 8 zu setzen $p = 2{,}77$ tn. Da dieser Werth schon in Beispiel 122 gewählt wurde, so könnten die dort berechneten Grenzwerthe der Gurtungskräfte

beibehalten werden. Mit dem etwas nach oben abgerundeten $p = 2{,}8$ folgen die oberen Grenzwerthe in Tonnen: .

$$U_m = 79{,}41$$

$$O_1 = -87{,}63 \quad O_2 = -83{,}66 \quad O_3 = -81{,}00 \quad O_4 = -79{,}70.$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen ergeben sich wie in Beispiel 56, jedoch wegen halb so grosser g, p_c, p_v der einfachen Systeme nur halb so gross wie dort. Die Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen sind damit wegen

$$D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$$\begin{array}{llll} D_2 = 4{,}33 & D_2 = -5{,}28 & D_2' = -5{,}02 & D_2' = 6{,}12 \\ D_3 = 5{,}09 & D_3 = -6{,}23 & D_3' = -6{,}62 & D_3' = 6{,}88 \\ D_4 = 5{,}68 & D_4 = -6{,}27 & D_4' = -5{,}88 & D_4' = 6{,}49. \end{array}$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Verticalen treten für Eigengewicht allein ein, die oberen sind für gleichmässig vertheilte bewegte Last

$$H_m = \mathfrak{H}_m + p\lambda.$$

Da hierin jedoch ein Theil $\frac{p\lambda}{2}$ von dem Gliede mit ϱ herrührt, so hat man im Sinne der Aufgabe 48 mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 8

$$H_m = 1{,}59 + 2{,}8 \,.\, 1{,}5 + 4{,}49 \,.\, 1{,}5 = 12{,}53 \text{ tn}.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 56 bestimmt.

Beispiel 125. Paulischer Linsenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sollen einfache Balkenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen, zu einer Horizontale symmetrischen Gurtungen und constanten Maximalbeanspruchungen beider Gurtungen unter folgenden Voraussetzungen berechnet werden: Spannweite $l = 45$ m, grösste Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn. Vom Eigengewichte kommen je 0,3 tn auf die Knotenpunkte des Obergurts und

Untergurts, während die Fahrbahnlast mit ebenfalls 0,3 tn Eigengewicht per laufenden Meter Träger inmitten der Verticalen angreift.

Formberechnung. Nach § 98 hat man zur Berechnung der Verticalenlängen

$$(1) \qquad h_{m-1} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{\dfrac{c}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\dfrac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2}} - \dfrac{m(n-m)}{h_m}}$$

und hierin bei gerader Felderzahl

$$(2) \qquad c = \sqrt{1 + \left(\frac{n\,l}{2h}\right)^2}.$$

Gleichung 1) liefert mit $h_5 = h = 6$ und

$$c = \sqrt{1 + \left(\frac{10 \, . \, 45}{2 \, . \, 6}\right)^2} = 37{,}513$$

für $m = 5$
$$h_4 = \frac{24}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_5 - h_4}{2}\right)^2}} - \dfrac{25}{6}},$$

für $m = 4$
$$h_3 = \frac{21}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_4 - h_3}{2}\right)^2}} - \dfrac{24}{h_4}},$$

für $m = 3$
$$h_2 = \frac{16}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_3 - h_2}{2}\right)^2}} - \dfrac{21}{h_3}},$$

für $m = 2$
$$h_1 = \frac{9}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}} - \dfrac{16}{h_2}}.$$

Dem Parabelträger der Höhe h und gerader Felderzahl n würde nach § 17, 20) 24) entsprechen

$$h_m = m(n-m)\frac{4h}{n^2},$$

also mit $h = 6$, $n = 10$,

$$\frac{h_5 - h_4}{2} = 0{,}12, \quad \frac{h_4 - h_3}{2} = 0{,}36, \quad \frac{h_3 - h_2}{2} = 0{,}60, \quad \frac{h_2 - h_1}{2} = 0{,}84.$$

Mit diesen Werthen unter den Wurzelzeichen ergeben obige Gleichungen für den Paulischen Träger angenähert

$$h_4 = 5{,}760, \qquad h_3 = 5{,}069, \qquad h_2 = 3{,}883, \qquad h_1 = 2{,}209.$$

Demgemäss setzen wir in den Ausdrücken der h zu genauerer Berechnung

$$\frac{h_5 - h_4}{2} = 0{,}120, \quad \frac{h_4 - h_3}{2} = 0{,}343, \quad \frac{h_3 - h_2}{2} = 0{,}593, \quad \frac{h_2 - h_1}{2} = 0{,}887$$

und erhalten damit (Fig. 221)

für						
	$m =$	1	2	3	4	5:
	$h_m =$	2,217	3,884	5,066	5,760	6
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m + h_{m-1}}{2}\right)^2} =$			5,436	6,346	7,039	7,404
$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$			2,33	4,29	8,30	25.

Beanspruchungen. Für die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen hat man nach § 98, 8)

$$(3) \qquad U = c\frac{q\lambda}{4} = -O, \qquad \mathfrak{U} = c\frac{g\lambda}{4} = -\mathfrak{O},$$

also mit obigen c, q, λ,

$$U = 148{,}96 \text{ tn} = -O, \qquad \mathfrak{U} = 37{,}98 \text{ tn} = -\mathfrak{O}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind nach § 98 für die Verticalenstücke von Fahrbahn bis Obergurt (Eigengewicht der Fahrbahn in g_u einzurechnen, also $g_u = 0{,}6$, $g_o = 0{,}3$ tn)

$$(4) \qquad \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2}\lambda, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2},$$

$$\mathfrak{H}_m = 0{,}675, \qquad H_m = 6{,}59 \text{ tn},$$

und für die Verticalenstücke von Fahrbahn bis Untergurt (Eigengewicht der Fahrbahn in g_o einzurechnen, also $g_o = 0{,}6$, $g_u = 0{,}3$ tn)

$$(5) \qquad \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2}\lambda, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2},$$

$$\mathfrak{H}_m = -0{,}675, \qquad H_m = -6{,}59 \text{ tn}.$$

Für die nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen hat man nach § 90, 7) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein

$$(6) \qquad \mathfrak{D}_m = \left(n - 2m + 1 - m\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{4} = -\frac{d_m}{d'_m}\mathfrak{D}'_m,$$

sowie nach § 91, 4) und § 88, 4) die Grenzbeanspruchungen

$$(7)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(\varepsilon - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\,\varepsilon + m - n}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{4}, \\ D_m = \dfrac{q+g}{g}\,\mathfrak{D}_m - (D_m). \end{cases}$$

Im Ausdrucke für die zweite Grenzbeanspruchung ist die erste durch eine Klammer ausgezeichnet. Wir erhalten in Tonnen:

$$\mathfrak{D}_2 = \left(7 - \frac{2\,.\,8}{2{,}33}\right)\frac{5{,}44}{2{,}22}\,\frac{4{,}05}{4} = 0{,}33$$

$$\mathfrak{D}_3 = \left(5 - \frac{3\,.\,7}{4{,}29}\right)\frac{6{,}35}{3{,}88}\,\frac{4{,}05}{4} = 0{,}17$$

$$\mathfrak{D}_4 = \left(3 - \frac{4\,.\,6}{8{,}30}\right)\frac{7{,}04}{5{,}07}\,\frac{4{,}05}{4} = 0{,}15$$

$$\mathfrak{D}_5 = \left(1 - \frac{5\,.\,5}{25}\right)\frac{7{,}40}{5{,}76}\,\frac{4{,}05}{4} = 0,$$

$$D_2 = 0{,}33 - \frac{10{,}33\,.\,1\,.\,5{,}44}{12{,}97\,.\,2{,}22}\,2{,}959 = -\,5{,}45$$

$$D_3 = 0{,}17 - \frac{11{,}29\,.\,4\,.\,6{,}35}{31{,}61\,.\,3{,}88}\,2{,}959 = -\,6{,}74$$

$$D_4 = 0{,}15 - \frac{14{,}30\,.\,9\,.\,7{,}04}{68{,}70\,.\,5{,}07}\,2{,}959 = -\,7{,}49$$

$$D_5 = 0 \quad - \frac{30\,.\,16\,.\,7{,}40}{220\,.\,5{,}76}\,2{,}959 = -\,8{,}29,$$

$$D_2 = 4{,}922\,.\,0{,}33 + 5{,}45 = 7{,}08$$

$$D_3 = 4{,}922\,.\,0{,}17 + 6{,}74 = 7{,}60$$

$$D_4 = 4{,}922\,.\,0{,}15 + 7{,}49 = 8{,}24$$

$$D_5 = 4{,}922\,.\,0 \quad + 8{,}29 = 8{,}29.$$

Da allgemein $D'_m = -\,D_m$, so sind dies auch die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin abfallenden Diagonalen. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Bemerkungen. Angenommen es wäre $n = 9$ verlangt gewesen dann würde nach § 98, 3) sein

$$c = (n^2 - 1)\frac{\lambda}{2h} = \frac{100}{3}$$

und dem Parabelträger nach § 17, 20) 24) entsprechen

$$h_m = m\,(n - m)\,\frac{4h}{n^2 - 1}.$$

Ganz wie oben vorgehend ergeben sich für den Paulischen Träger mit $h_4 = h = 6$ angenähert $h_3 = 5{,}419$, $h_2 = 4{,}245$, $h_1 = 2{,}452$ und genauer $h_3 = 5{,}418$, $h_2 = 4{,}244$, $h_1 = 2{,}452$ m.

Die oben berechneten Grenzbeanspruchungen der Gurtungen gelten genau genommen nicht für die Endfelder. Da die Theorie in jedem Felde zwei sich kreuzende Diagonalen annahm, so hat man sich in den Endfeldern die Diagonalen mit den Gurtungsstäben zusammenfallend zu denken. Die für beliebige Gurtungsformen gültigen Ausdrücke von U_m, O_m, D_m, D'_m führen mit $m = 1$ und $h_0 = 0$ auf unbestimmte Ausdrücke. Es sind dann die Gurtungskräfte U_1, O_1 (einschliesslich der Diagonalenbeanspruchungen) aus den Formeln der Aufgabe 49 zu berechnen, während die oben verwendeten Formeln für h_m auf den allgemeinen Gleichungen beruhen. Da der Paulische Träger dem Parabelträger nahe kommt (besonders der Paulische Linsenträger) und beim Parabelträger für die den Grenzwerthen von U_1, O_1 entsprechenden Belastungen bei gleichmässig vertheilter bewegter Last keine, bei bewegten Radlastzügen nur kleine Diagonalenbeanspruchungen entstehen, so lässt sich allerdings annehmen, dass die obigen Formeln näherungsweise auch für U_1, O_1 gelten. Im vorliegenden Falle liefern die Gleichungen der Aufgabe 49 mit $u_1 = o_1 = 4{,}635$

$$(8) \qquad U_1 = (n-1)\frac{u_1}{h_1}\frac{q\lambda}{2} = 149{,}44 \text{ tn} = -O_1,$$

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{g}{q}U_1 = 38{,}11 \text{ tn} = -\mathfrak{O}_1,$$

gegen oben erhaltene 148,96 und 37,98 tn. Bei Berechnung mit Radlastzügen, und für Segmentträger auch bei Berechnung mit gleichmässig vertheilter Verkehrslast entstehen jedoch grössere Abweichungen. Für die früher berechneten Paulischen Träger einfachen Systems treten solche Abweichungen deshalb nicht ein, weil mit der constant beanspruchten Gurtung keine Diagonalen zusammenfielen.

Beispiel 126. Paulischer Linsenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die im vorigen Beispiele verlangten Träger sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden (Fig. 221).

Formberechnung. Wir setzen für Belastung durch Zug I (Fig. 23, 24) von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$(1) \quad R_m = m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a),$$

$$(2)\quad \begin{cases} Q_m = (m-1)(n-m+1)\frac{gl^2}{2n} + (n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa \\ \qquad + (m-1)\sum_{m-1}^{n} P(l-a). \end{cases}$$

Es würde genügend genau sein, diese Grössen sofort für eine der beiden Richtungen des Zuges I zu berechnen, doch sollen, wie bisher in allen Fällen, beide Richtungen in Betracht gezogen werden. Man erhält mit oder ohne Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 6 für die erste Zugrichtung:

$$R_2 = 16 \,.\, 91{,}125 + 8 \,.\, 144 + 2 \,.\, 1586 = 5782$$
$$R_3 = 21 \,.\, 91{,}125 + 7 \,.\, 285 + 3 \,.\, 1208 = 7533$$
$$R_4 = 24 \,.\, 91{,}125 + 6 \,.\, 490 + 4 \,.\, \ 884 = 8663$$
$$R_5 = 25 \,.\, 91{,}125 + 5 \,.\, 714 + 5 \,.\, \ 617 = 8933,$$

$$Q_2 = 9 \,.\, 91{,}125 + 9 \,.\, 5 \,.\, 3{,}5 + 1\,[4\,(38{,}5 + 26{,}9 + 15{,}9 + 4{,}9) + 6\,(37{,}3 + 36 + 34{,}7 + 30{,}7 + 29{,}4 + 28{,}1 + 19{,}7 + 18{,}4 + 17{,}1 + 8{,}7 + 7{,}4 + 6{,}1) + 5\,(23{,}9 + 12{,}9 + 1{,}9)] = 3157,$$

$$Q_3 = 16 \,.\, 91{,}125 + 8\,[5 \,.\, 8 + 6\,(3{,}8 + 2{,}5 + 1{,}2)] + 2\,[4\,(34 + 22{,}4 + 11{,}4 + 0{,}4) + 6\,(32{,}8 + 31{,}5 + 30{,}2 + 26{,}2 + 24{,}9 + 23{,}6 + 15{,}2 + 13{,}9 + 12{,}6 + 4{,}2 + 2{,}9 + 1{,}6) + 5\,(19{,}4 + 8{,}4)] = 5589,$$

$$Q_4 = 21 \,.\, 91{,}125 + 7\,[5\,(12{,}5 + 1{,}5) + 6\,(8{,}3 + 7 + 5{,}7) + 4 \,.\, 4{,}5] + 3\,[4\,(29{,}5 + 17{,}9 + 6{,}9) + 6\,(28{,}3 + 27 + 25{,}7 + 21{,}7 + 20{,}4 + 19{,}1 + 10{,}7 + 9{,}4 + 8{,}1) + 5\,(14{,}9 + 3{,}9)] = 7130,$$

$$Q_5 = 24 \,.\, 91{,}125 + 6\,[5\,(17 + 6) + 6\,(12{,}8 + 11{,}5 + 10{,}2 + 1{,}8 + 0{,}5) + 4 \,.\, 9] + 4\,[4\,(25 + 13{,}4 + 2{,}4) + 6\,(23{,}8 + 22{,}5 + 21{,}2 + 17{,}2 + 15{,}9 + 14{,}6 + 6{,}2 + 4{,}9 + 3{,}6) + 5 \,.\, 10{,}4] = 8396,$$

und für die zweite Zugrichtung:

$$R_2 = 16 \,.\, 91{,}125 + 8 \,.\, 89{,}4 + 2 \,.\, 1745 = 5663$$
$$R_3 = 21 \,.\, 91{,}125 + 7 \,.\, 222 + 3 \,.\, 1352 = 7524$$
$$R_4 = 24 \,.\, 91{,}125 + 6 \,.\, 383 + 4 \,.\, 1016 = 8549$$
$$R_5 = 25 \,.\, 91{,}125 + 5 \,.\, 617 + 5 \,.\, \ 714 = 8933,$$

$$Q_2 = 9 \,.\, 91{,}125 + 9 \,.\, 6\,(3{,}7 + 2{,}4 + 1{,}1) + 1\,[6\,(37{,}3 + 36 + 34{,}7 + 26{,}3 + 25 + 23{,}7 + 15{,}3 + 14 + 12{,}7 + 4{,}3 + 3 + 1{,}7) + 4\,(33{,}5 + 22{,}5 + 11{,}5 + 0{,}5) + 5\,(30{,}5 + 19{,}5 + 8{,}5)] = 3177,$$

$$Q_3 = 16 \,.\, 91{,}125 + 8\,[6\,(8{,}2 + 6{,}9 + 5{,}6) + 4 \,.\, 4{,}4 + 5 \,.\, 1{,}4] + 2\,[6\,(32{,}8 + 31{,}5 + 30{,}2 + 21{,}8 + 20{,}5 + 19{,}2 + 10{,}8 + 9{,}5 + 8{,}2) + 4\,(29 + 18 + 7) + 5\,(26 + 15 + 4)] = 5744,$$

$$Q_4 = 21 \,.\, 91{,}125 + 7\,[6\,(12{,}7 + 11{,}4 + 10{,}1 + 1{,}7 + 0{,}4) + 4 \,.\, 8{,}9 + 5 \,.\, 5{,}9] + 3\,[6\,(28{,}3 + 27 + 25{,}7 + 17{,}3 + 16 + 14{,}7 + 6{,}3 + 5 + 3{,}7) + 4\,(24{,}5 + 13{,}5 + 2{,}5) + 5\,(21{,}5 + 10{,}5)] = 7452,$$

$$Q_5 = 24 \,.\, 91{,}125 + 6\,[6\,(17{,}2 + 15{,}9 + 14{,}6 + 6{,}2 + 4{,}9 + 3{,}6) + 4\,(13{,}4 + 2{,}4) + 5 \,.\, 10{,}4] + 4\,[6\,(23{,}8 + 22{,}5 + 21{,}2 + 12{,}8 + 11{,}5 + 10{,}2 + 1{,}8 + 0{,}5) + 4\,(20 + 9) + 5\,(17 + 6)] = 8549.$$

Für jede bestimmte Trägerform entstehen die grössten Beanspruchungen U_m, O_m bei derjenigen Richtung des Zuges I, für welche

$$\frac{R_m}{h_m} + \frac{Q_m}{h_{m-1}}$$

den grössten Werth hat. Im vorliegenden Falle sind die h_m nicht genau bekannt, sie kommen jedoch denen des Parabelträgers von $h = 6$, $n = 10$, nämlich

$$h_1 = 2{,}16 \qquad h_2 = 3{,}84 \qquad h_3 = 5{,}04 \qquad h_4 = 5{,}76 \qquad h_5 = 6$$

so nahe, dass die für den Parabelträger massgebenden Zugrichtungen auch für den Paulischen Träger gelten können. Beim Parabelträger entsprechen

	der ersten Zugrichtung	der zweiten Zugrichtung
für $m = 1$	$\frac{5782}{3{,}84} + \frac{3157}{2{,}16} = 2967$	$\frac{5663}{3{,}84} + \frac{3177}{2{,}16} = 2946$
„ $m = 2$	$\frac{7533}{5{,}04} + \frac{5589}{3{,}84} = 2950$	$\frac{7524}{5{,}04} + \frac{5744}{3{,}84} = 2989$
„ $m = 3$	$\frac{8663}{5{,}76} + \frac{7130}{5{,}04} = 2919$	$\frac{8549}{5{,}76} + \frac{7452}{5{,}04} = 2963$
„ $m = 4$	$\frac{8933}{6} + \frac{8396}{5{,}76} = 2946$	$\frac{8933}{6} + \frac{8549}{5{,}76} = 2973.$

Demnach hat man für die Formberechnung:

$$R_2 = 5782 \qquad R_3 = 7524 \qquad R_4 = 8549 \qquad R_5 = 8933$$
$$Q_2 = 3157 \qquad Q_3 = 5744 \qquad Q_4 = 7452 \qquad Q_5 = 8549.$$

Zur Bestimmung der Verticalenlängen gibt § 99

$$(3) \qquad h_{m-1} = \frac{Q_m}{\dfrac{c}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\dfrac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2}} - \dfrac{R_m}{h_m}},$$

worin bei gerader Felderzahl $n = 2\sigma$

$$(4) \qquad c = \frac{2}{n^2}\left(R_\sigma + \frac{n^2}{n^2 - 4} Q_\sigma\right) \sqrt{1 + \left(\frac{n\,l}{2\,h}\right)^2}.$$

In unserm Falle folgen mit $h_5 = h = 6$ und

$$c = \left(\frac{8933}{50} + \frac{8549}{48}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{10\,.\,45}{2\,.\,6}\right)^2} = 13383$$

für $m = 5$
$$h_4 = \frac{8549}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_5 - h_4}{2}\right)^2}} - \dfrac{8933}{6}},$$

für $m = 4$
$$h_3 = \frac{7452}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_4 - h_3}{2}\right)^2}} - \dfrac{8549}{h_4}},$$

für $m = 3$
$$h_2 = \frac{5744}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_3 - h_2}{2}\right)^2}} - \dfrac{7524}{h_3}},$$

für $m = 2$
$$h_1 = \frac{3157}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + \left(\dfrac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}} - \dfrac{5782}{h_2}}.$$

Dem Parabelträger von $h = 6$, $n = 10$ würden, wie schon im vorigen Beispiele angeführt, entsprechen

$$\frac{h_5 - h_4}{2} = 0{,}12, \quad \frac{h_4 - h_3}{2} = 0{,}36, \quad \frac{h_3 - h_2}{2} = 0{,}60, \quad \frac{h_2 - h_1}{2} = 0{,}84.$$

Mit diesen Werthen ergeben obige Gleichungen für den Paulischen Träger angenähert

$$h_4 = 5{,}761, \qquad h_3 = 5{,}033, \qquad h_2 = 3{,}953, \qquad h_1 = 2{,}161.$$

Demgemäss setzen wir in den Ausdrücken der h zu genauerer Berechnung

$$\frac{h_5 - h_4}{2} = 0{,}120, \quad \frac{h_4 - h_3}{2} = 0{,}364, \quad \frac{h_3 - h_2}{2} = 0{,}540, \quad \frac{h_2 - h_1}{2} = 0{,}896$$

und erhalten damit

für					
$m =$	1	2	3	4	5:
$h_m =$	2,179	3,939	5,034	5,761	6
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m + h_{m-1}}{2}\right)^2} =$		5,441	6,354	7,027	7,405
$u_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2} =$	4,630	4,585	4,533	4,515	4,502
$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		2,24	4,60	7,92	25,10.

Beanspruchungen. Nach § 99, 10) hat man die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen

$$(5) \quad \begin{cases} U_m = \frac{c}{2l} = -O_m, \\ \mathfrak{U}_m = \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right] \frac{g\lambda}{4} u_m = -\mathfrak{O}_m. \end{cases}$$

Diese Gleichungen ergeben in Tonnen:

$$U_m = 148{,}70 = -O_m,$$

$$\mathfrak{U}_2 = 37{,}96, \quad \mathfrak{U}_3 = 37{,}76, \quad \mathfrak{U}_4 = 38{,}07, \quad \mathfrak{U}_5 = 37{,}95,$$

während für $\mathfrak{U}_1 = -\mathfrak{O}_1$ ein unbestimmter Ausdruck entsteht. Indessen liefert A. 49, 5)

$$(6) \qquad \mathfrak{U}_1 = (n-1)\frac{u_1}{h_1}\frac{g\lambda}{2} = 38{,}71 \text{ tn.}$$

Bezeichnet K die grösste in Verticale m angreifende Verkehrsbelastung, so hat man nach § 99 die Grenzbeanspruchungen der Verticalenstücke von Fahrbahn bis Obergurt

$$(7) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{K}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m$$

und diejenigen der Verticalenstücke von Fahrbahn bis Untergurt

$$(8) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{K}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m.$$

Die $\mathfrak{H}_m$ sind wie im vorigen Beispiele bestimmt und da (Fig. 207)

$$K = 6 + 2 \,.\, 6\,\frac{3{,}2}{4{,}5} + 4\,\frac{2}{4{,}5} = 16{,}31 \text{ tn},$$

so gelten von Fahrbahn bis Obergurt

$$H_m = 8{,}83 \qquad \mathfrak{H}_m = 0{,}675 \text{ tn}$$

und von Fahrbahn bis Untergurt

$$H_m = -8{,}83 \qquad \mathfrak{H}_m = -0{,}675 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen ergeben sich nach § 92, 7) 8) mit Zug II (Fig. 22) von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(9) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m}{2\varepsilon l} \sum_m^n P(l-a),$$

und mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(10) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m + n}{2\varepsilon l} \sum_0^{m-1} Pa.$$

Die Eigengewichtsbeanspruchungen ergeben sich bei gleichem Vorgehen wie im letzten Beispiele:

$$\mathfrak{D}_2 = -0{,}36, \qquad \mathfrak{D}_3 = 0{,}71, \qquad \mathfrak{D}_4 = -0{,}04, \qquad \mathfrak{D}_5 = 0,$$

und wir erhalten damit in Tonnen:

$$D_2 = -0{,}36 + \frac{5{,}44 \,.\, 0{,}24 \,.\, 1836}{2{,}18 \,.\, 2{,}24 \,.\, 90} = 5{,}09$$

$$D_3 = 0{,}71 + \frac{6{,}35 \,.\, 1{,}60 \,.\, 1442}{3{,}94 \,.\, 4{,}60 \,.\, 90} = 9{,}69$$

$$D_4 = -0{,}04 + \frac{7{,}03 \,.\, 3{,}92 \,.\, 1087}{5{,}03 \,.\, 7{,}92 \,.\, 90} = 8{,}53$$

$$D_5 = 0 + \frac{7{,}41 \,.\, 20{,}1 \,.\, 776}{5{,}76 \,.\, 25{,}1 \,.\, 90} = 8{,}88,$$

$$D_2 = -0{,}36 - \frac{5{,}44 \,.\, 10{,}24 \,.\, 60{,}4}{2{,}18 \,.\, 2{,}24 \,.\, 90} = -8{,}02$$

$$D_3 = 0{,}71 - \frac{6{,}35 \,.\, 11{,}60 \,.\, 170}{3{,}94 \,.\, 4{,}60 \,.\, 90} = -6{,}97$$

$$D_4 = -0{,}04 - \frac{7{,}03 \,.\, 13{,}92 \,.\, 316}{5{,}03 \,.\, 7{,}92 \,.\, 90} = -8{,}89$$

$$D_5 = 0 - \frac{7{,}41 \,.\, 30{,}1 \,.\, 580}{5{,}76 \,.\, 25{,}1 \,.\, 90} = -9{,}08.$$

Wegen $D_m' = -D_m$ sind damit auch die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin abfallenden Diagonalen bekannt. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt.

Bemerkung. Aus den am Schlusse des vorigen Beispiels erwähnten Gründen ergeben sich die oberen Grenzwerthe von U_1, O_1

genauer als oben bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, nach

$$(11) \quad U_1 = \mathfrak{U}_1 + \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{u_1}{lh_1} = -O_1.$$

Wir erhalten für die erste Richtung des Zuges I

$$U_1 = 38{,}71 + (9 \,.\, 54{,}2 + 1961)\frac{4{,}63}{45 \,.\, 2{,}18} = 154{,}28 \text{ tn} = -O_1,$$

während sich für die zweite Zugrichtung 150,35 ergeben hätte.

Beispiel 127. Paulischer Linsenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die im vorletzten Beispiele verlangten Träger auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen (Fig. 221).

Nach Aufgabe 48 sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für die max M_x eines durch den angenommenen Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m gilt. Die Tabelle in Beispiel 8 gibt hierfür $p = 2{,}63$ tn und da dieser Werth bereits im vorletzten Beispiele verwendet wurde (wobei sich die oberen Gurtungsbeanspruchungen $\pm$ 148,96 tn gegen $\pm$ 148,70 im letzten Beispiele ergaben), so bleiben die Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Gurtungen genau wie dort bestimmt. Nur die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen und beide Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind auf andere Art zu berechnen.

Als obere Grenzbeanspruchungen der Verticalen hat man mit Rücksicht auf den Schlusssatz der Aufgabe 48 und die Tabelle in Beispiel 8 von Fahrbahn bis Obergurt

$$(1) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2} = 0{,}675 + 3{,}62 \,.\, 2{,}25 = 8{,}82 \text{ tn},$$

und von Fahrbahn bis Untergurt

$$(2) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2} = -0{,}675 - 3{,}62 \,.\, 2{,}25 = -8{,}82 \text{ tn}.$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen sind nach A. 32, 1) 2) mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(3)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{\lambda}{4n}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon}(n-m)^2 p_v, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{\lambda}{4n}\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{\varepsilon - m + n}{\varepsilon}(m-1)^2 p_c, \end{cases}$$

worin p_v, p_c diejenigen Lastäquivalente bedeuten, welche für einen durch den angenommenen Zug II direct befahrenen vollwandigen Träger der Spannweite 45 m dem pos max V_x bei $x = v$ bezw. dem neg max V_x bei $x = c$ entsprechen. Wir entnehmen dieselben der Tabelle des Beispiels 8 und erhalten damit in Tonnen:

$$D_2 = 0{,}33 + \frac{4{,}5 \,.\, 5{,}44 \,.\, 0{,}33}{40 \,.\, 2{,}22 \,.\, 2{,}33}\, 64 \,.\, 2{,}83 = 7{,}40$$

$$D_3 = 0{,}17 + \frac{4{,}5 \,.\, 6{,}35 \,.\, 1{,}29}{40 \,.\, 3{,}88 \,.\, 4{,}29}\, 49 \,.\, 2{,}90 = 7{,}92$$

$$D_4 = 0{,}15 + \frac{4{,}5 \,.\, 7{,}04 \,.\, 4{,}30}{40 \,.\, 5{,}07 \,.\, 8{,}30}\, 36 \,.\, 2{,}98 = 8{,}84$$

$$D_5 = 0 \quad + \frac{4{,}5 \,.\, 7{,}40 \,.\, 20}{40 \,.\, 5{,}76 \,.\, 25}\, 25 \,.\, 3{,}06 = 8{,}85,$$

$$D_2 = 0{,}33 - \frac{4{,}5 \,.\, 5{,}44 \,.\, 10{,}33}{40 \,.\, 2{,}22 \,.\, 2{,}33}\, 1 \,.\, 5{,}94 = -6{,}93$$

$$D_3 = 0{,}17 - \frac{4{,}5 \,.\, 6{,}35 \,.\, 11{,}29}{40 \,.\, 3{,}88 \,.\, 4{,}29}\, 4 \,.\, 4{,}21 = -7{,}86$$

$$D_4 = 0{,}15 - \frac{4{,}5 \,.\, 7{,}04 \,.\, 14{,}30}{40 \,.\, 5{,}07 \,.\, 8{,}30}\, 9 \,.\, 3{,}46 = -8{,}24$$

$$D_5 = 0 \quad - \frac{4{,}5 \,.\, 7{,}40 \,.\, 30}{40 \,.\, 5{,}76 \,.\, 25}\, 16 \,.\, 3{,}27 = -9{,}08,$$

womit die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin abfallenden Diagonalen wegen $D'_m = -D_m$ ebenfalls bekannt sind. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Die Resultate für die Diagonalen weichen nur deshalb von denjenigen des vorigen Beispiels ab, weil infolge der dem Zuge I nur näherungsweise entsprechenden Annahme eines constanten p für die Gurtungskräfte hier eine etwas andre Form wie im vorigen Beispiele erhalten wurde (vgl. die Bemerkungen zu Beispiel 64).

Beispiel 128. Paulischer Segmentträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sollen einfache Balkenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen, horizontalem Untergurte und constanter Maximalbeanspruchung des Obergurts unter folgenden Voraussetzungen berechnet

werden: Spannweite $l = 45$ m, grösste Trägerhöhe $h = 6$ m, Felderzahl $n = 10$, Eigengewicht per laufenden Meter Träger $g = 0{,}9$ tn, Verkehrslast $p = 2{,}63$ tn. Vom Eigengewichte kommen $g_u = 0{,}6$ tn auf die Knotenpunkte des Untergurts, in welchen die Fahrbahnlast angreift, und $g_o = 0{,}3$ tn auf diejenigen des Obergurts (Fig. 222).

Formberechnung. Nach § 100 hat man zur Berechnung der Verticalenlängen

(1)
$$h_{m-1} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{\frac{c}{\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}} - \frac{m(n-m)}{h_m}}$$

und hierin bei gerader Felderzahl

(2)
$$c = 2\sqrt{1 + \left(\frac{n\,l}{4\,h}\right)^2}.$$

In unserm Falle folgen mit $h_5 = h = 6$ und

$$c = 2\sqrt{1 + \left(\frac{10 \,.\, 45}{4 \,.\, 6}\right)^2} = 37{,}553$$

für $m = 5$
$$h_4 = \frac{24}{\frac{c}{\sqrt{20{,}25 + (h_5 - h_4)^2}} - \frac{25}{6}},$$

für $m = 4$
$$h_3 = \frac{21}{\frac{c}{\sqrt{20{,}25 + (h_4 - h_3)^2}} - \frac{24}{h_4}},$$

für $m = 3$
$$h_2 = \frac{16}{\frac{c}{\sqrt{20{,}25 + (h_3 - h_2)^2}} - \frac{21}{h_3}},$$

für $m = 2$
$$h_1 = \frac{9}{\frac{c}{\sqrt{20{,}25 + (h_2 - h_1)^2}} - \frac{16}{h_2}}.$$

Für den Parabelträger der Trägerhöhe $h = 6$ und von gerader Felderzahl $n = 10$ hätte man aus

$$h_m = m(n-m)\frac{4h}{n^2}$$

$$h_5 - h_4 = 0{,}24 \qquad h_4 - h_3 = 0{,}72$$
$$h_3 - h_2 = 1{,}20 \qquad h_2 - h_1 = 1{,}68.$$

Damit ergeben obige Gleichungen für den Paulischen Träger angenähert

$$h_4 = 5{,}760 \qquad h_3 = 5{,}155 \qquad h_2 = 4{,}010 \qquad h_1 = 2{,}351.$$

Setzen wir hiernach in den Ausdrücken der h zu genauerer Berechnung

$$h_5 - h_4 = 0{,}240 \qquad h_4 - h_3 = 0{,}605$$
$$h_3 - h_2 = 1{,}145 \qquad h_2 - h_1 = 1{,}659,$$

so folgen

für					
$m =$	1	2	3	4	5:
$h_m =$	2,340	4,017	5,117	5,760	6
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$		5,072	6,032	6,814	7,309
$d'_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_m} =$		6,032	6,814	7,309	7,5
$s_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$	5,072	4,799	4,632	4,546	4,506
$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		2,40	4,65	8,96	25
$\varrho = 2 - \frac{h_{m-1} + h_{m+1}}{h_m} =$	0,283	0,144	0,089	0,070	0,080.

Beanspruchungen. Nach § 100 hat man für die Grenzbeanspruchungen der Polygonalgurtung

$$(3) \qquad S = -c\frac{q\lambda}{4}, \qquad \mathfrak{S} = \frac{g}{q}S,$$

und für diejenigen der Horizontalgurtung

$$(4) \qquad T_m = c\frac{q\lambda^2}{4s_m}, \qquad \mathfrak{T}_m = \frac{g}{q}T_m.$$

Diese Gleichungen liefern in Tonnen:

$$S = -149{,}13 \qquad \mathfrak{S} = -38{,}02$$

$$T_1 = 132{,}31 \quad T_2 = 139{,}84 \quad T_3 = 144{,}88 \quad T_4 = 147{,}62 \quad T_5 = 148{,}93$$
$$\mathfrak{T}_1 = 33{,}74 \quad \mathfrak{T}_2 = 35{,}66 \quad \mathfrak{T}_3 = 36{,}94 \quad \mathfrak{T}_4 = 37{,}64 \quad \mathfrak{T}_5 = 37{,}98.$$

Die Beanspruchungen der Diagonalen und Verticalen durch Eigengewicht allein sind durch B. 109, 1) ausgedrückt, wonach mit den gegebenen n, g, g_u, g_o und $\lambda = 4{,}5$

$$\mathfrak{D}_m = \left(11 - 2m - m\frac{10-m}{\varepsilon}\right)\frac{4{,}05\,d_m}{4h_{m-1}} = -\frac{d_m}{d'_m}\mathfrak{D}_m.$$

$$\mathfrak{H}_m = m(10-m)\frac{4{,}05\,\varrho}{4} + 0{,}675.$$

Wir erhalten in Tonnen:

$$\mathfrak{D}_2 = 0{,}73 \quad \mathfrak{D}_3 = 0{,}74 \quad \mathfrak{D}_4 = 0{,}43 \quad \mathfrak{D}_5 = 0.$$
$$\mathfrak{H}_1 = 3{,}25 \quad \mathfrak{H}_2 = 3{,}01 \quad \mathfrak{H}_3 = 2{,}57 \quad \mathfrak{H}_4 = 2{,}38 \quad \mathfrak{H}_5 = 2{,}70.$$

Für die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden

Diagonalen gelten die Gleichungen B. 125, 7), welche in Tonnen ergeben:

$$D_2 = 0{,}73 - \frac{10{,}40 \,.\, 5{,}07}{13{,}6 \,.\, 2{,}34}\; 1 \,.\, 2{,}959 = -\,4{,}18$$

$$D_3 = 0{,}74 - \frac{11{,}65 \,.\, 6{,}03}{34{,}85 \,.\, 4{,}02}\; 4 \,.\, 2{,}959 = -\,5{,}20$$

$$D_4 = 0{,}43 - \frac{14{,}96 \,.\, 6{,}81}{74{,}64 \,.\, 5{,}12}\; 9 \,.\, 2{,}959 = -\,6{,}68$$

$$D_5 = 0 \quad - \frac{30 \,.\, 7{,}31}{220 \,.\, 5{,}76}\; 16 \,.\, 2{,}959 = -\,8{,}19,$$

$$D_2 = 4{,}922 \,.\, 0{,}73 + 4{,}18 = 7{,}82$$
$$D_3 = 4{,}922 \,.\, 0{,}74 + 5{,}20 = 8{,}89$$
$$D_4 = 4{,}922 \,.\, 0{,}43 + 6{,}68 = 8{,}83$$
$$D_5 = 4{,}922 \,.\, 0 \quad + 8{,}19 = 8{,}19.$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen sind damit wegen

(5)
$$D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m$$

ebenfalls bestimmt, nämlich in Tonnen:

$$D_2' = 4{,}97 \quad D_3' = 5{,}88 \quad D_4' = 7{,}17 \quad D_5' = 8{,}40$$
$$D_2' = -\,9{,}30 \quad D_3' = -\,10{,}05 \quad D_4' = -\,9{,}47 \quad D_5' = -\,8{,}40.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind deren schon berechnete Eigengewichtsbeanspruchungen, für die oberen gilt B. 109, 5) oder nach § 88, 13)

(6)
$$H_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{g}\,g_o = 3{,}922\,\mathfrak{H}_m + 3{,}945,$$

woraus in Tonnen:

$$H_1 = 16{,}69 \qquad H_2 = 15{,}75 \qquad H_3 = 14{,}02$$
$$H_4 = 13{,}28 \qquad H_5 = 14{,}53.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 41 bestimmt.

Bemerkungen. Aus den am Schlusse des Beispiels 125 erwähnten Gründen ergeben sich die oberen Grenzwerthe von U_1, O_1 genauer als oben aus

(7)
$$T_1 = (n-1)\frac{q\lambda^2}{2h_1} = -\frac{\lambda}{s_1} S_1,$$

während die unteren durch 3) 4) ausgedrückt bleiben. Wir erhalten in Tonnen:

$$T_1 = 137{,}47 \qquad S_1 = -\,154{,}94$$
$$\mathfrak{T}_1 = 35{,}05 \qquad \mathfrak{S}_1 = -\,39{,}51.$$

Dass der Paulische Segmentträger unter sonst gleichen Verhältnissen mehr vom Parabelträger abweicht wie der Paulische Linsenträger ergibt z. B. folgende Zusammenstellung. Wir fanden bei gleichmässig vertheilter bewegter Last und $h = 6$, $n = 10$ für den Parabelträger

$$h_m = 2{,}16 \qquad 3{,}84 \qquad 5{,}04 \qquad 5{,}76 \qquad 6$$

für den Paulischen Linsenträger

$$h_m = 2{,}217 \qquad 3{,}884 \qquad 5{,}066 \qquad 5{,}760 \qquad 6$$

für den Paulischen Segmentträger

$$h_m = 2{,}340 \qquad 4{,}017 \qquad 5{,}117 \qquad 5{,}760 \qquad 6.$$

Wie bei Paulischen Trägern einfachen Systems ist die Trägerhöhe gegen die Enden hin grösser als bei Parabelträgern.

Beispiel 129. Paulischer Segmentträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung für bewegte Radlastzüge.

Die im vorigen Beispiele verlangten Träger sollen nun einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke angehören und für bewegte Radlastzüge, zusammengesetzt aus Locomotiven der Radanordnung Fig. 18, berechnet werden (Fig. 222).

Formberechnung. Nach § 100 hat man zur Berechnung der Verticalenlängen

$$(1) \qquad h_{m-1} = \frac{Q_m}{\dfrac{c}{\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}} - \dfrac{R_m}{h_m}}$$

und hierin bei gerader Felderzahl $n = 2\sigma$

$$(2) \qquad c = \frac{4}{n^2}\left(R_\sigma + \frac{n^2}{n^2 - 4}\,Q_\sigma\right)\sqrt{1 + \left(\frac{n\,l}{4\,h}\right)^2}.$$

Ganz wie in Beispiel 126 ergeben sich die Werthe

$$R_2 = 5782 \qquad R_3 = 7524 \qquad R_4 = 8549 \qquad R_5 = 8933$$
$$Q_2 = 3157 \qquad Q_3 = 5744 \qquad Q_4 = 7452 \qquad Q_5 = 8549.$$

Weiter folgen mit $h_5 = h = 6$ und

$$c = \left(\frac{8933}{25} + \frac{8549}{24}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{10\,.\,45}{4\,.\,6}\right)^2} = 13{,}398$$

für $m = 5$
$$h_4 = \frac{8549}{\dfrac{c}{\sqrt{20{,}25 + (h_5 - h_4)^2}} - \dfrac{8933}{6}},$$

für $m = 4$ $$h_3 = \frac{7452}{\frac{c}{\sqrt{20,25 + (h_4 - h_3)^2}} - \frac{8549}{h_4}},$$

für $m = 3$ $$h_2 = \frac{5744}{\frac{c}{\sqrt{20,25 + (h_3 - h_2)^2}} - \frac{7524}{h_3}},$$

für $m = 2$ $$h_1 = \frac{3157}{\frac{c}{\sqrt{20,25 + (h_2 - h_1)^2}} - \frac{5782}{h_2}}.$$

Wie schon im vorigen Beispiele angeführt, entsprechen dem Parabelträger von $h = 6$, $n = 10$,

$$h_5 - h_4 = 0,24 \qquad h_4 - h_3 = 0,72$$
$$h_3 - h_2 = 1,20 \qquad h_2 - h_1 = 1,68.$$

Mit diesen Werthen unterm Wurzelzeichen liefern obige Gleichungen für den Paulischen Träger angenähert

$$h_4 = 5,760 \qquad h_3 = 5,119 \qquad h_2 = 4,083 \qquad h_1 = 2,299.$$

Demgemäss setzen wir in den Ausdrücken der h zu genauerer Berechnung

$$h_5 - h_4 = 0,240 \qquad h_4 - h_3 = 0,641$$
$$h_3 - h_2 = 1,036 \qquad h_2 - h_1 = 1,784,$$

und erhalten damit

für					
$m =$	1	2	3	4	5:
$h_m =$	2,366	4,034	5,092	5,760	6
$d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}} =$		5,084	6,043	6,795	7,309
$d'_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_m} =$		6,043	6,795	7,309	7,5
$s_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} =$	5,084	4,919	4,623	4,549	4,506
$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} =$		2,42	4,81	8,62	25
$\varrho = 2 - \frac{h_{m-1} + h_{m+1}}{h_m} =$	0,295	0,151	0,077	0,074	0,080.

Beanspruchungen. Nach § 100 hat man die Grenzbeanspruchungen der Polygonalgurtung

(3) $$S_m = -\frac{c}{2l}, \qquad \mathfrak{S}_m = -\left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\frac{g\lambda}{4}s_m,$$

und diejenigen der Horizontalgurtung

(4) $$T_m = \frac{c}{2ns_m}, \qquad \mathfrak{T}_m = -\frac{\lambda}{s_m}\mathfrak{S}_m.$$

Diese Gleichungen liefern in Tonnen:

$$S_m = -148{,}87$$

$$T_1 = 131{,}77$$

$$\mathfrak{S}_2 = -38{,}70 \quad \mathfrak{T}_2 = 35{,}40 \quad T_2 = 136{,}19$$
$$\mathfrak{S}_3 = -37{,}87 \quad \mathfrak{T}_3 = 36{,}86 \quad T_3 = 144{,}91$$
$$\mathfrak{S}_4 = -38{,}19 \quad \mathfrak{T}_4 = 37{,}78 \quad T_4 = 147{,}26$$
$$\mathfrak{S}_5 = -38{,}02 \quad \mathfrak{T}_5 = 37{,}97 \quad T_5 = 148{,}67,$$

während für $\mathfrak{S}_1$ ein unbestimmter Ausdruck entsteht. Indessen folgen aus A. 49, 5) und 4)

(5) $$\mathfrak{S}_1 = -(n-1)\frac{s_1}{h_1}\frac{g\lambda}{2} = -39{,}16, \qquad \mathfrak{T}_1 = 34{,}66 \text{ tn}.$$

Die Eigengewichtsbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen ergeben sich aus den im vorigen Beispiele verwendeten Gleichungen mit den oben berechneten h, d, ε, ϱ,

$$\mathfrak{D}_2 = 0{,}85 \quad \mathfrak{D}_3 = 0{,}96 \quad \mathfrak{D}_4 = 0{,}29 \quad \mathfrak{D}_5 = 0$$
$$\mathfrak{H}_1 = 3{,}37 \quad \mathfrak{H}_2 = 3{,}12 \quad \mathfrak{H}_3 = 2{,}31 \quad \mathfrak{H}_4 = 2{,}47 \quad \mathfrak{H}_5 = 2{,}70.$$

Für die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen gelten die Gleichungen B. 126, 9) 10), welche mit oder ohne Rücksicht auf die Tabelle des Beispiels 6 in Tonnen liefern:

$$D_2 = 0{,}85 + \frac{5{,}08 \,.\, 0{,}42 \,.\, 1836}{2{,}36 \,.\, 2{,}42 \,.\, 90} = 8{,}46$$
$$D_3 = 0{,}96 + \frac{6{,}04 \,.\, 1{,}81 \,.\, 1442}{4{,}03 \,.\, 4{,}81 \,.\, 90} = 9{,}99$$
$$D_4 = 0{,}29 + \frac{6{,}79 \,.\, 4{,}62 \,.\, 1087}{5{,}09 \,.\, 8{,}62 \,.\, 90} = 8{,}92$$
$$D_5 = 0 \quad + \frac{7{,}31 \,.\, 20 \,.\, 776}{5{,}76 \,.\, 25 \,.\, 90} = 8{,}75,$$
$$D_2 = 0{,}35 - \frac{5{,}08 \,.\, 10{,}42 \,.\, 60{,}4}{2{,}36 \,.\, 2{,}42 \,.\, 90} = -5{,}36$$
$$D_3 = 0{,}96 - \frac{6{,}04 \,.\, 11{,}81 \,.\, 170}{4{,}03 \,.\, 4{,}81 \,.\, 90} = -5{,}99$$
$$D_4 = 0{,}29 - \frac{6{,}79 \,.\, 14{,}62 \,.\, 316}{5{,}09 \,.\, 8{,}62 \,.\, 90} = -7{,}65$$
$$D_5 = 0 \quad - \frac{7{,}31 \,.\, 30 \,.\, 530}{5{,}76 \,.\, 25 \,.\, 90} = -8{,}97.$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen sind damit wegen

(6) $$D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$$D_2' = -10{,}06 \quad D_3' = -11{,}23 \quad D_4' = -9{,}57 \quad D_5' = -8{,}98$$
$$D_2' = \quad 6{,}37 \quad D_3' = \quad 6{,}73 \quad D_4' = \quad 8{,}26 \quad D_5' = \quad 9{,}20.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Verticalen treten für Eigengewicht allein ein, die oberen ergeben sich aus B. 110, 3) mit dem dort berechneten $K = 16{,}311$ für die erste Richtung des Zuges I:

$$H_1 = 3{,}37 + (9\,.\,54{,}2 + 1\,.\,1996)\,\frac{0{,}295}{90} + 8{,}155 = 19{,}67 \text{ tn } (19{,}27)$$

$$H_2 = 3{,}12 + (8\,.\,144 + 2\,.\,1586)\,\frac{0{,}151}{90} + 8{,}155 = 18{,}53 \;\text{„}\; (18{,}33)$$

$$H_3 = 2{,}31 + (7\,.\,285 + 3\,.\,1208)\,\frac{0{,}077}{90} + 8{,}155 = 15{,}27 \;\text{„}\; (15{,}26)$$

$$H_4 = 2{,}47 + (6\,.\,490 + 4\,.\,\ 884)\,\frac{0{,}074}{90} + 8{,}155 = 15{,}95 \;\text{„}\; (15{,}86)$$

$$H_5 = 2{,}70 + (5\,.\,714 + 5\,.\,\ 617)\,\frac{0{,}080}{90} + 8{,}155 = 16{,}77 \;\text{„}\; (16{,}77).$$

Die in Klammer beigesetzten Werthe entsprechen der zweiten Zugrichtung. Wie fast immer hätte die Berücksichtigung der ersten Zugrichtung allein genügt. Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 42 bestimmt.

Bemerkung. Aus den am Schlusse des Beispiels 125 erwähnten Gründen ergeben sich die oberen Grenzwerthe von U_1, O_1 genauer als oben bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, nach

$$(7) \quad T_1 = \mathfrak{T}_1 + \left[(n-1)\sum_0^1 Pa + \sum_1^n P(l-a)\right]\frac{1}{n h_1} = -\frac{\lambda}{s_1}\,S_1.$$

Wir erhalten für die erste Richtung des Zuges I

$$T_1 = 34{,}66 + (9\,.\,54{,}2 + 1961)\,\frac{1}{23{,}66} = 138{,}16, \quad S_1 = -156{,}09 \text{ tn},$$

während die zweite Zugrichtung $T_1 = 134{,}57$ und $S_1 = 152{,}03$ tn ergeben hätte. Es treten also oben Abweichungen von 4,62 Procent gegen die genaueren Werthe ein.

Beispiel 130. Paulischer Segmentträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung mit Lastäquivalenten.

Die im vorletzten Beispiele verlangten Träger auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten so zu berechnen, dass annähernd dieselben Grenzbeanspruchungen wie mit den Radlastzügen des letzten Beispiels entstehen (Fig. 222).

Nach Aufgabe 48 sind die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen mit demjenigen constanten p zu berechnen, welches für die max M_x eines durch den angenommenen Zug I direct befahrenen vollwandigen Trägers der Spannweite 45 m gilt. Die Tabelle in Beispiel 8 gibt hierfür $p = 2{,}63$ tn, und da dieser Werth bereits in Beispiel 128 verwendet wurde (wobei sich die obere Grenzbeanspruchung der Polygonalgurtung — 149,13 gegen — 148,87 im vorigen Beispiele ergab), so bleiben die Trägerform, Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und Grenzwerthe der Gurtungskräfte genau wie dort bestimmt. Nur die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen und beide Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind auf andere Art zu berechnen.

Für die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen bei gleichmässig vertheilter bewegter Last hat man nach § 91, 8)

$$H_m = \mathfrak{H}_m + m(n-m)\frac{p\lambda\varrho}{4} + \frac{p\lambda}{2}.$$

Diese Gleichung liefert bei Berechnung mit Lastäquivalenten mit Rücksicht auf den Schlusssatz der Aufgabe 48 und die Tabelle des Beispiels 8 in Tonnen:

$$H_1 = 3{,}25 + 9 \,.\, 0{,}283 \,.\, 2{,}63 \,.\, 1{,}125 + 3{,}62 \,.\, 2{,}25 = 18{,}93$$
$$H_2 = 3{,}01 + 16 \,.\, 0{,}144 \,.\, 2{,}63 \,.\, 1{,}125 + 3{,}62 \,.\, 2{,}25 = 18{,}56$$
$$H_3 = 2{,}57 + 21 \,.\, 0{,}089 \,.\, 2{,}63 \,.\, 1{,}125 + 3{,}62 \,.\, 2{,}25 = 16{,}24$$
$$H_4 = 2{,}38 + 24 \,.\, 0{,}070 \,.\, 2{,}63 \,.\, 1{,}125 + 3{,}62 \,.\, 2{,}25 = 15{,}50$$
$$H_5 = 2{,}70 + 25 \,.\, 0{,}080 \,.\, 2{,}63 \,.\, 1{,}125 + 3{,}62 \,.\, 2{,}25 = 16{,}76.$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach Auflager 0 hin ansteigenden Diagonalen ergeben sich nach den in Beispiel 127 verwendeten Gleichungen wie dort mit Rücksicht auf die Tabelle in Beispiel 8:

$$D_2 = 0{,}85 + \frac{4{,}5 \,.\, 5{,}07 \,.\, 0{,}40}{40 \,.\, 2{,}34 \,.\, 2{,}40}\, 64 \,.\, 2{,}83 = 8{,}21$$

$$D_3 = 0{,}96 + \frac{4{,}5 \,.\, 6{,}03 \,.\, 1{,}65}{40 \,.\, 4{,}02 \,.\, 4{,}65}\, 49 \,.\, 2{,}90 = 9{,}48$$

$$D_4 = 0{,}29 + \frac{4{,}5 \,.\, 6{,}81 \,.\, 4{,}96}{40 \,.\, 5{,}12 \,.\, 8{,}96}\, 36 \,.\, 2{,}98 = 9{,}18$$

$$D_5 = 0 \quad + \frac{4{,}5 \,.\, 7{,}31 \,.\, 20}{40 \,.\, 5{,}76 \,.\, 25}\, 25 \,.\, 3{,}06 = 8{,}74,$$

$$D_2 = 0{,}85 - \frac{4{,}5 \,.\, 5{,}07 \,.\, 10{,}40}{40 \,.\, 2{,}34 \,.\, 2{,}40}\, 1 \,.\, 5{,}94 = -\,5{,}40$$

$$D_3 = 0{,}96 - \frac{4{,}5 \,.\, 6{,}03 \,.\, 11{,}65}{40 \,.\, 4{,}02 \,.\, 4{,}65}\, 4 \,.\, 4{,}21 = -\,6{,}17$$

$$D_4 = 0{,}29 - \frac{4{,}5 \,.\, 6{,}81 \,.\, 14{,}96}{40 \,.\, 5{,}12 \,.\, 8{,}96}\, 9 \,.\, 3{,}46 = -7{,}50$$

$$D_5 = 0 \quad - \frac{4{,}5 \,.\, 7{,}31 \,.\, 30}{40 \,.\, 5{,}76 \,.\, 25}\, 16 \,.\, 3{,}27 = -8{,}96\,.$$

Die Grenzbeanspruchungen der nach 0 hin abfallenden Diagonalen sind damit wegen

$$D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m$$

ebenfalls bestimmt. Wir erhalten in Tonnen:

$$D_2' = -9{,}76 \quad D_3' = -10{,}71 \quad D_4' = -9{,}85 \quad D_5' = -8{,}97$$

$$D_2' = 6{,}42 \quad D_3' = 6{,}97 \quad D_4' = 8{,}05 \quad D_5' = 9{,}19\,.$$

Die Grenzwerthe der Stützenreactionen sind wie in Beispiel 43 bestimmt.

Die obigen Resultate weichen für die Diagonalen lediglich und für die Verticalen theilweise deshalb von den im vorigen Beispiele berechneten ab, weil infolge der dem Zuge I nur näherungsweise entsprechenden Annahme eines constanten p für die Gurtungskräfte hier eine etwas andre Form als im vorigen Beispiele erhalten wurde (vgl. die Bemerkungen zu Beispiel 64).

Fehlerverzeichniss zur Theorie der statisch bestimmten Träger.

S. 31 Z. 17 von oben ist Querschnitts**er**mittelung für Querschnitts**ver**mittelung zu setzen.

„ 41 „ 14 von unten ist **allgemeinen** durch **genauen** zu ersetzen.

„ 66 „ 5 von unten soll **abnehmenden Verticalenlängen** an Stelle von **zunehmenden Verticalen** stehen.

„ 76 „ 12 von oben hat $\pm$ an Stelle von $\mp$ zu treten.

„ 99 In den Formeln 3) ist g durch p zu ersetzen.

„ 103 „ 7 von oben ist v an Stelle von x zu setzen.

„ 119 „ 1 von oben soll Z-Gurtung an Stelle von X-Gurtung stehen.

„ 126 In Formel 7) hat $\pm$ an Stelle von $\mp$ zu treten.

„ 130 In Formel 5) ist D_m für V_m zu setzen.

„ 134 „ 14 von oben ist hinter $m - v$ das Wort **nicht** einzufügen.

„ 183 „ 14 von unten ist 1)—3) durch 7)—9) zu ersetzen.

„ 224 Im Klammerausdruck der Formel 4) soll $+$ an Stelle von $=$ stehen

„ 240 In der Ueberschrift des § 68 ist **mit** durch **bei** zu ersetzen.

„ 248 In Formel 11) hat ξ an Stelle von ζ zu treten.

„ 318 Im Bruche von Formel 4) ist $+$ für $-$ zu setzen.

„ 322 Formel 4) soll mit $\frac{1}{\lambda}$ anstatt mit $\frac{}{\lambda}$ abschliessen.

„ 353 „ 3 von oben soll Nr. 29 für Nr. 28 stehen.

S. 366 Z. 11 von oben sind die Worte **und Heft V** zu streichen.
Taf. IV. In Fig. 59 hat die unterste Horizontallinie wegzubleiben.
Fünf weitere Fehler sind bereits S. 366 der Theorie angegeben.

Fehlerverzeichniss zu dieser Aufgabensammlung.

S. 28 Z. 8 von oben ist $\frac{m^2}{l}$ an Stelle von $\frac{m^2}{2}$ zu setzen.

„ 77 „ 3 von unten sollen K_1, K_3 wie folgt ausgedrückt sein

$$K_1 = 6\,\frac{0{,}1 + 1.4 + 2{,}7}{4} + 6\,\frac{1{,}3}{4} = 8{,}25\,,$$

$$K_3 = 6\,\frac{2{,}5}{4} + 6\,\frac{1{,}3}{4} + 4\,\frac{2{,}5}{4} = 8{,}2 \text{ tn}\,,$$

womit die letzte Zeile lautet:

$$X = -6 - (3\,.\,8{,}25 + 4\,.\,15{,}6 + 3\,.\,8{,}2)\,\frac{1}{4} = -33{,}94 \text{ tn}\,.$$

„ 78 Der erste Absatz soll wie folgt schliessen: so würde sich noch etwas grösser $X = -35{,}98$ ergeben haben, dagegen bei Verschiebung um ein Rad nach 0 hin nur $X = -29{,}61$ tn.

„ 5 von oben ist **wesentlich grösser** durch **etwa eben so gross** zu ersetzen, und in

„ 14 von oben 2,61 durch 3,00.

„ 79 Formel 5) soll lauten: $\mathfrak{B}_0 = \frac{g_u v}{2} - \frac{g\,l}{2}$.

„ 91 „ 2 von unten soll 17,5 an Stelle von 17,8 stehen.

„ 110 In der ersten Formel 8) hat l an Stelle von λ zu treten.

„ 113 „ 12 von oben ist 10,90 durch 10,20 zu ersetzen.

„ 114 „ 8 von unten ist z für u zu setzen.

„ 115 „ 6 von unten ist $v = 8$ durch $v = 4$ zu ersetzen.

„ 116 „ 10 von unten soll 6 . 8 an Stelle von 6 . 3 treten.

„ 135 „ 2 von unten soll $M_s =$ an Stelle von $M_s -$ stehen.

„ 188 In der ersten Formel 9) ist l für λ zu setzen.

„ 189 Im ersten Ausdrucke für V_4 sind 6 durch 6 . 8 und 0,98 durch 2,67 zu ersetzen.

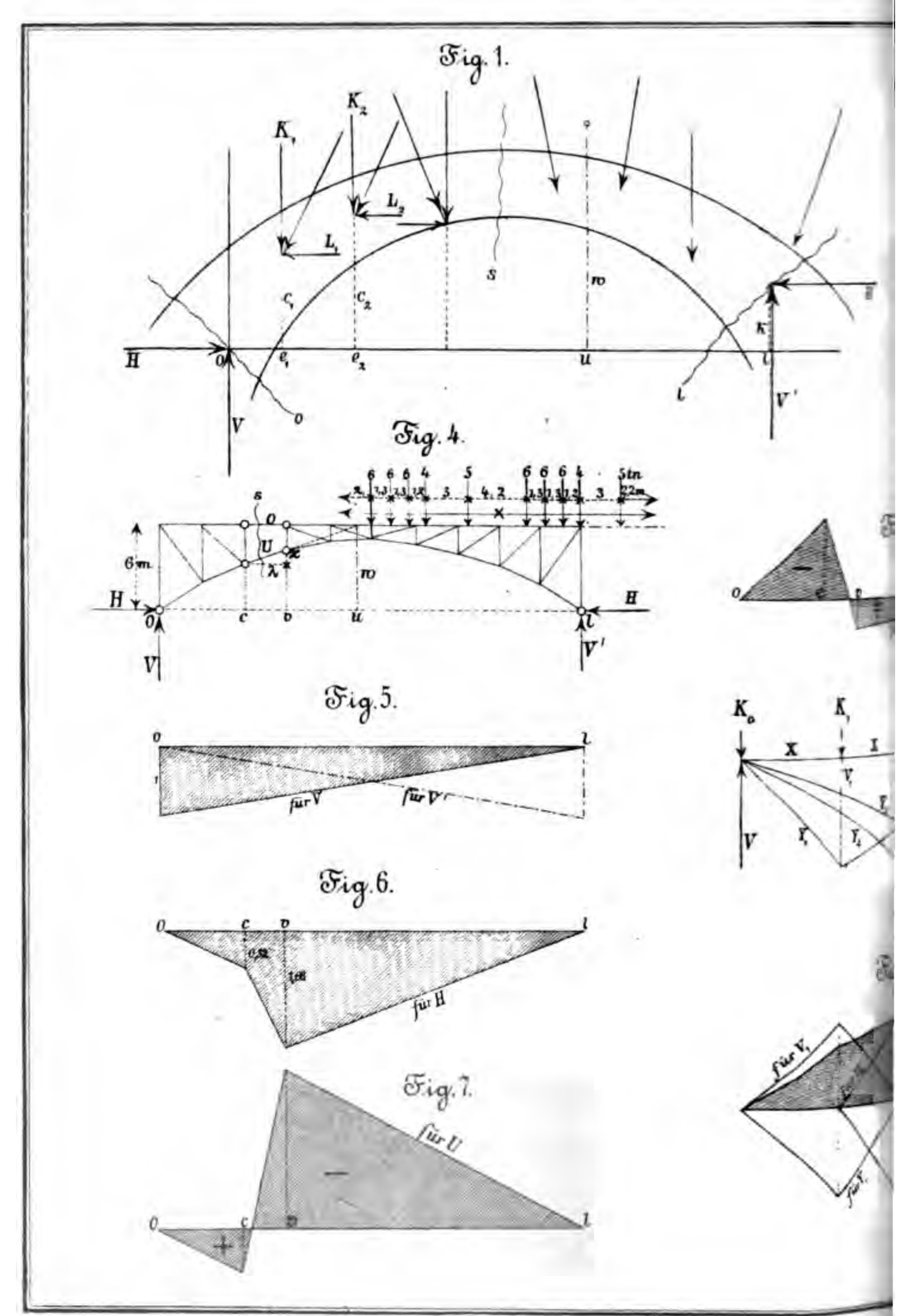
„ 248 „ 4 von oben soll 4,5 für 2,66 stehen.

„ 249 In der Tabelle sind für V_4 zu setzen 4,50 an Stelle von 2,66 und 5,18 an Stelle von 3,34 sowie 6,00 an Stelle von 2,85.

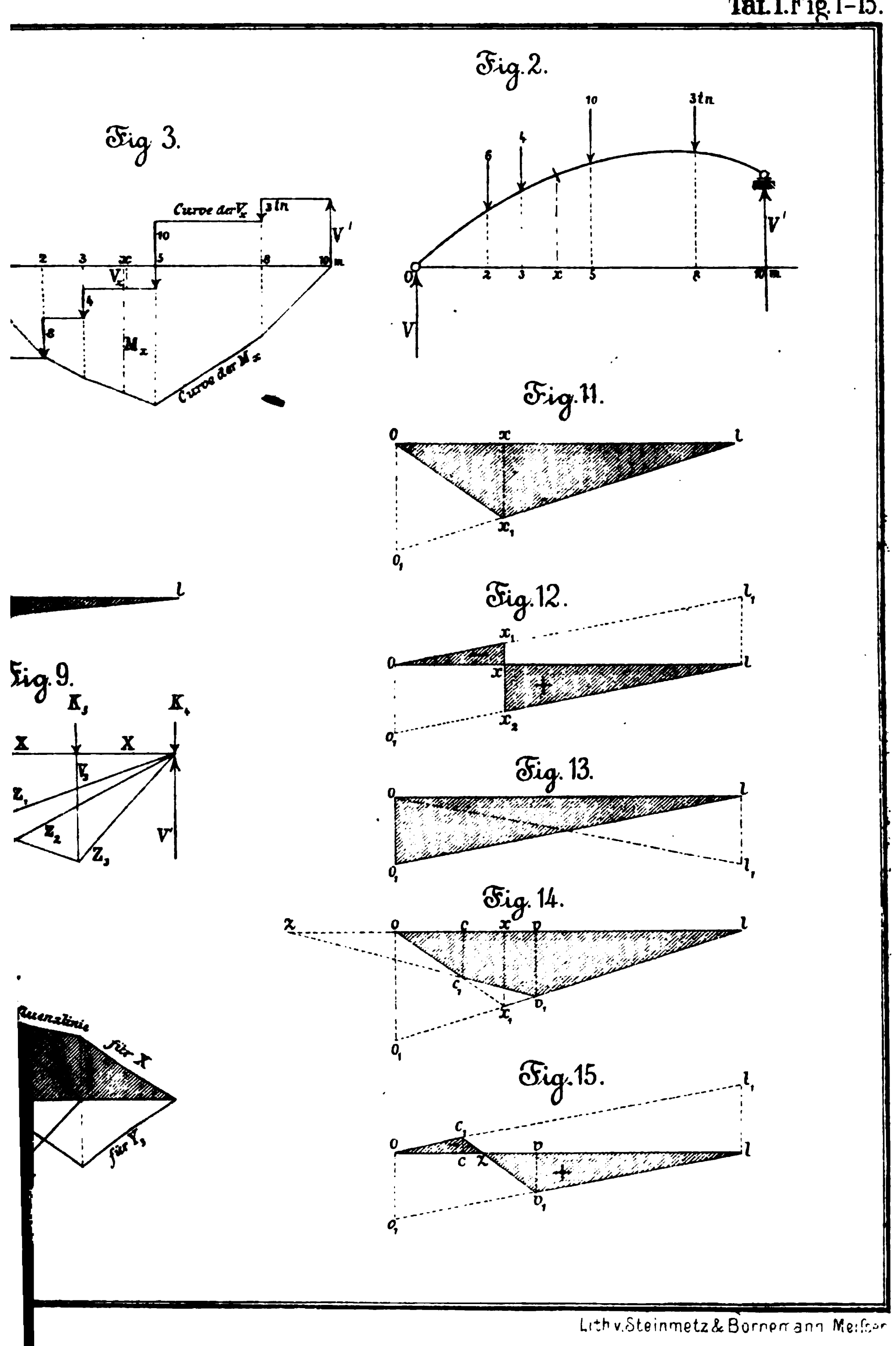
Taf. X. In Fig. 109 ist bei der ersten Verticale 19,10 durch 19,01 zu ersetzen.

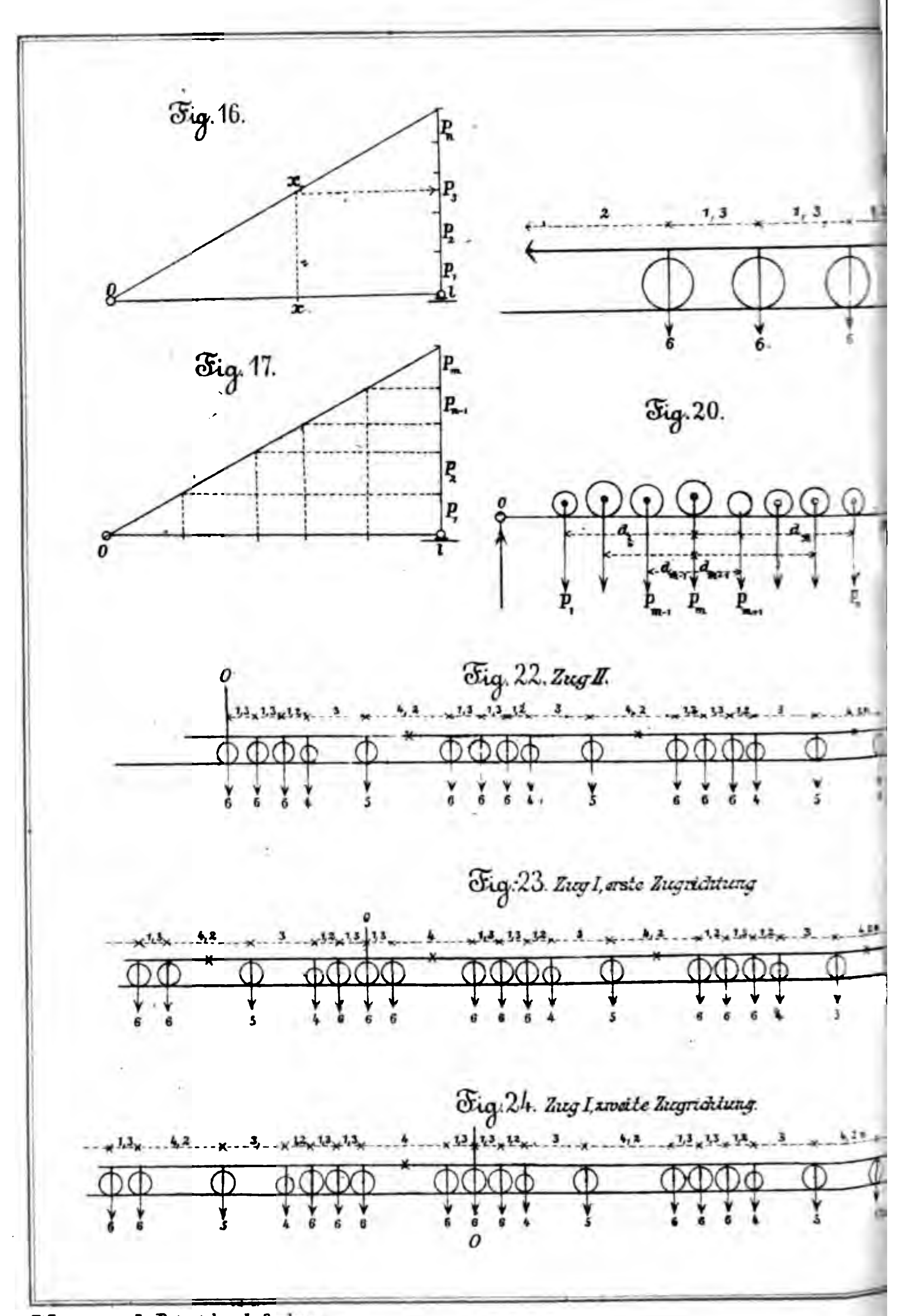
Taf. XI. In Fig. 122 hat bei der ersten Verticale 72,75 an Stelle von 71,35 zu treten.

Taf. XV. In Fig. 165 und 169 ist bei der dritten Diagonale 13,19 für 13,14 zu setzen.



Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.


Fig. 2.
Fig 3.
Curve der V_x
Curve der M_x
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 9.
für X
für V_3


Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 20.
Fig. 22. Zug II.
Fig. 23. Zug I, erste Zugrichtung
Fig. 24. Zug I, zweite Zugrichtung.

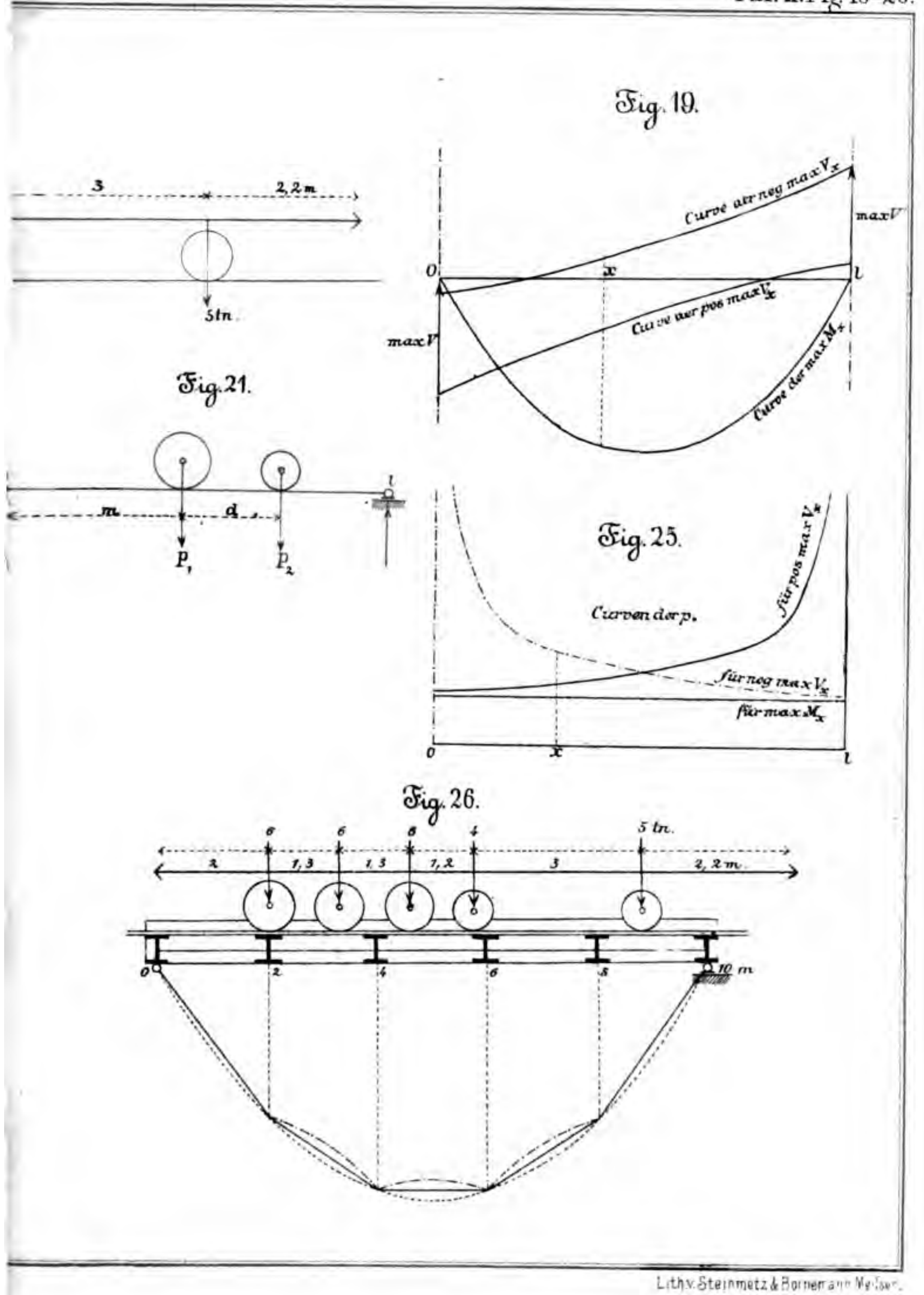
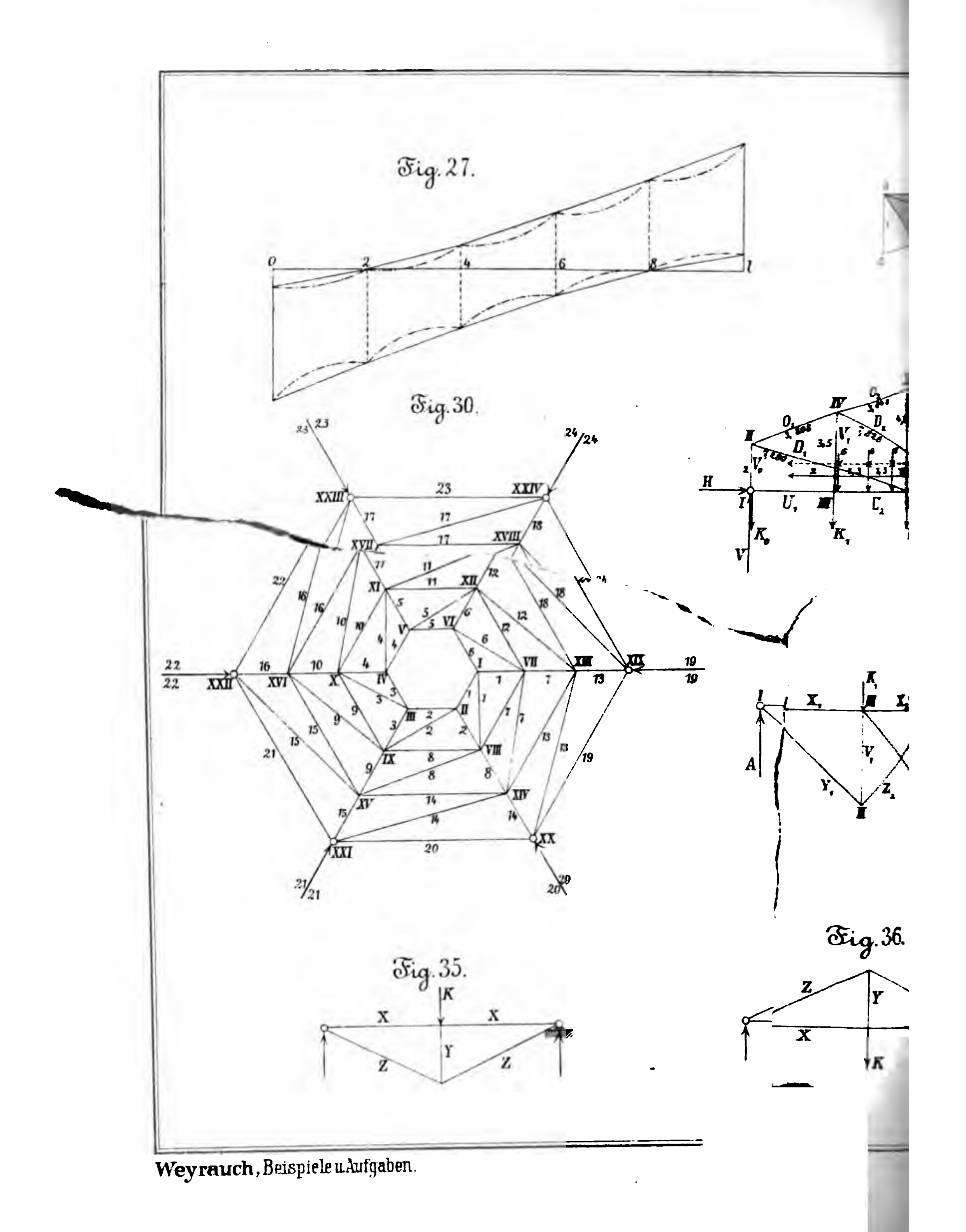
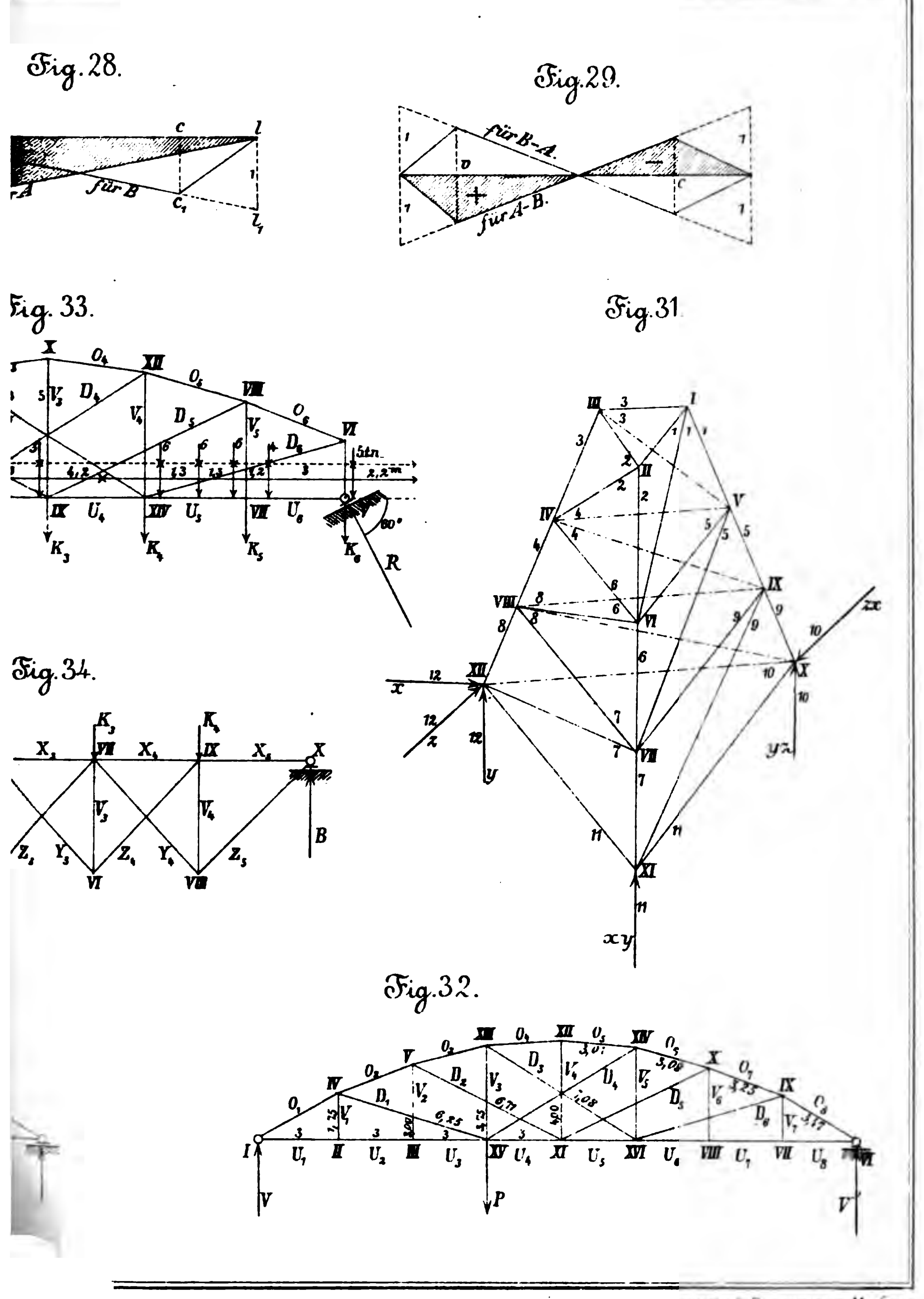


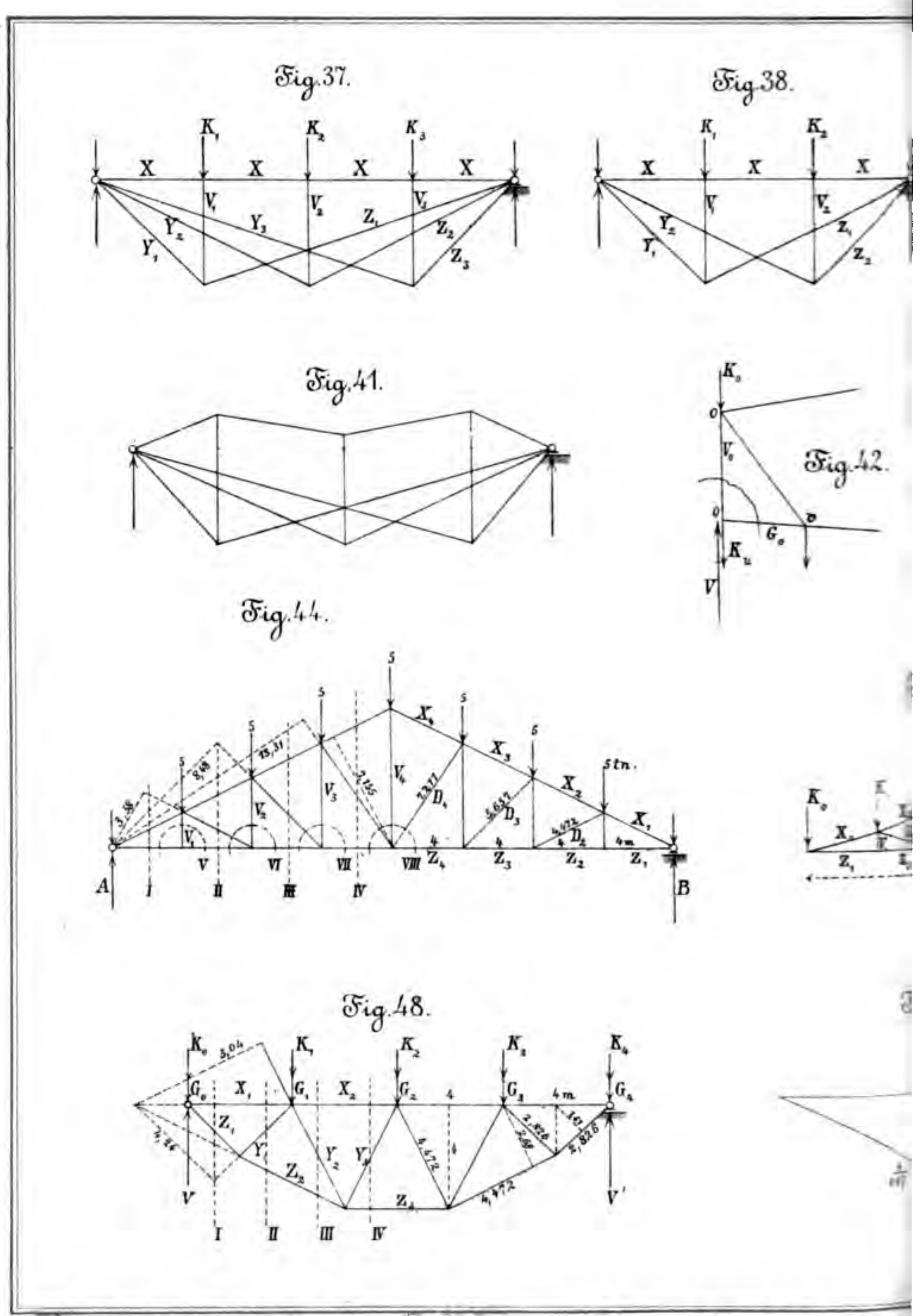
Fig. 19.
Curve der neg max V_x
max V'
0
x
l
Curve der pos max V_x
max V
Curve der max M_x
3
2,2 m
5 tn
Fig. 21.
l
m
d
P_1
P_2
Fig. 25.
für pos max V_x
Curven der p.
für neg max V_x
für max M_x
0
x
l
Fig. 26.
6
6
8
4
5 tn.
2
1,3
1,3
1,2
3
2,2 m
0
2
4
6
8
10 m

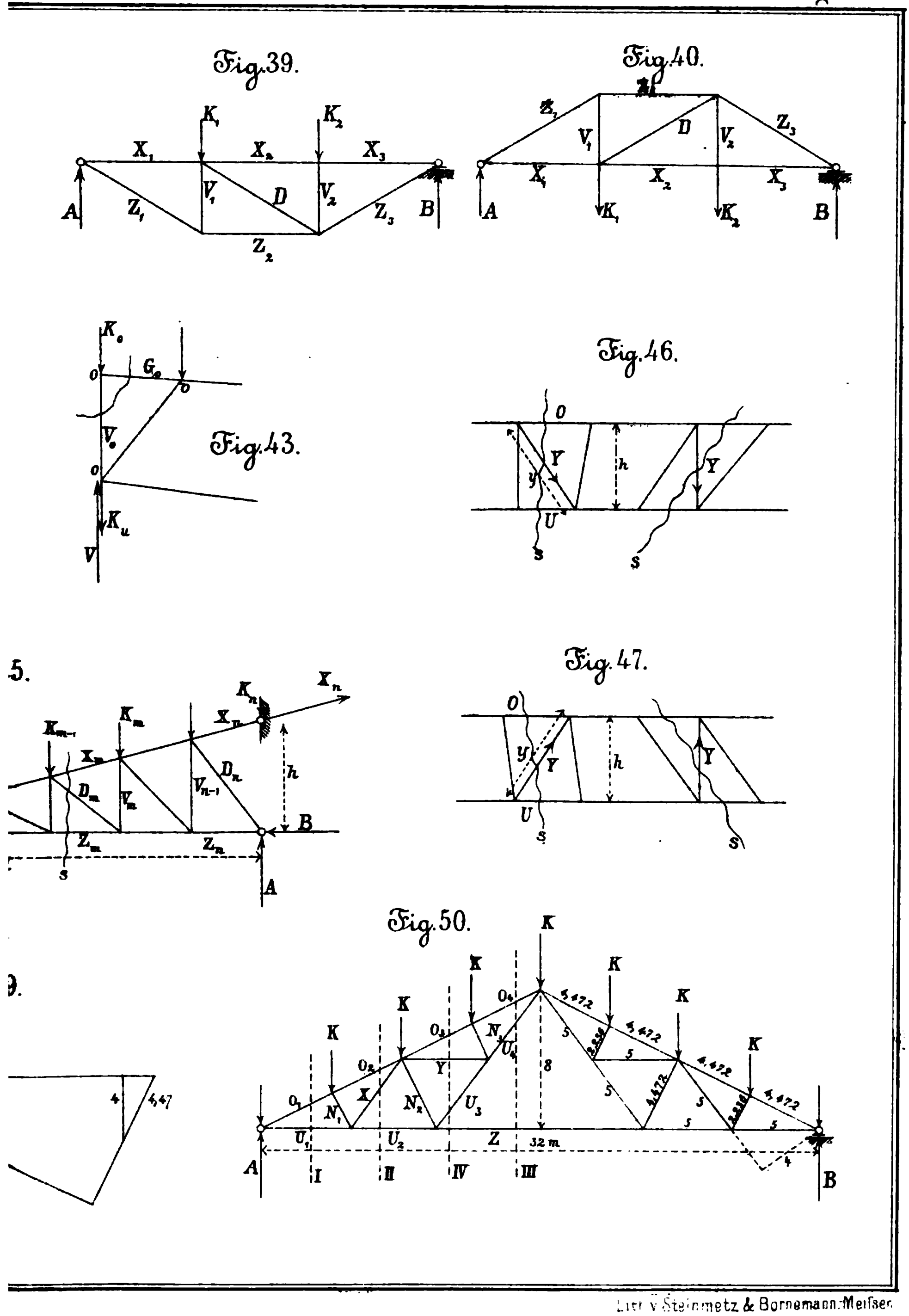


Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.

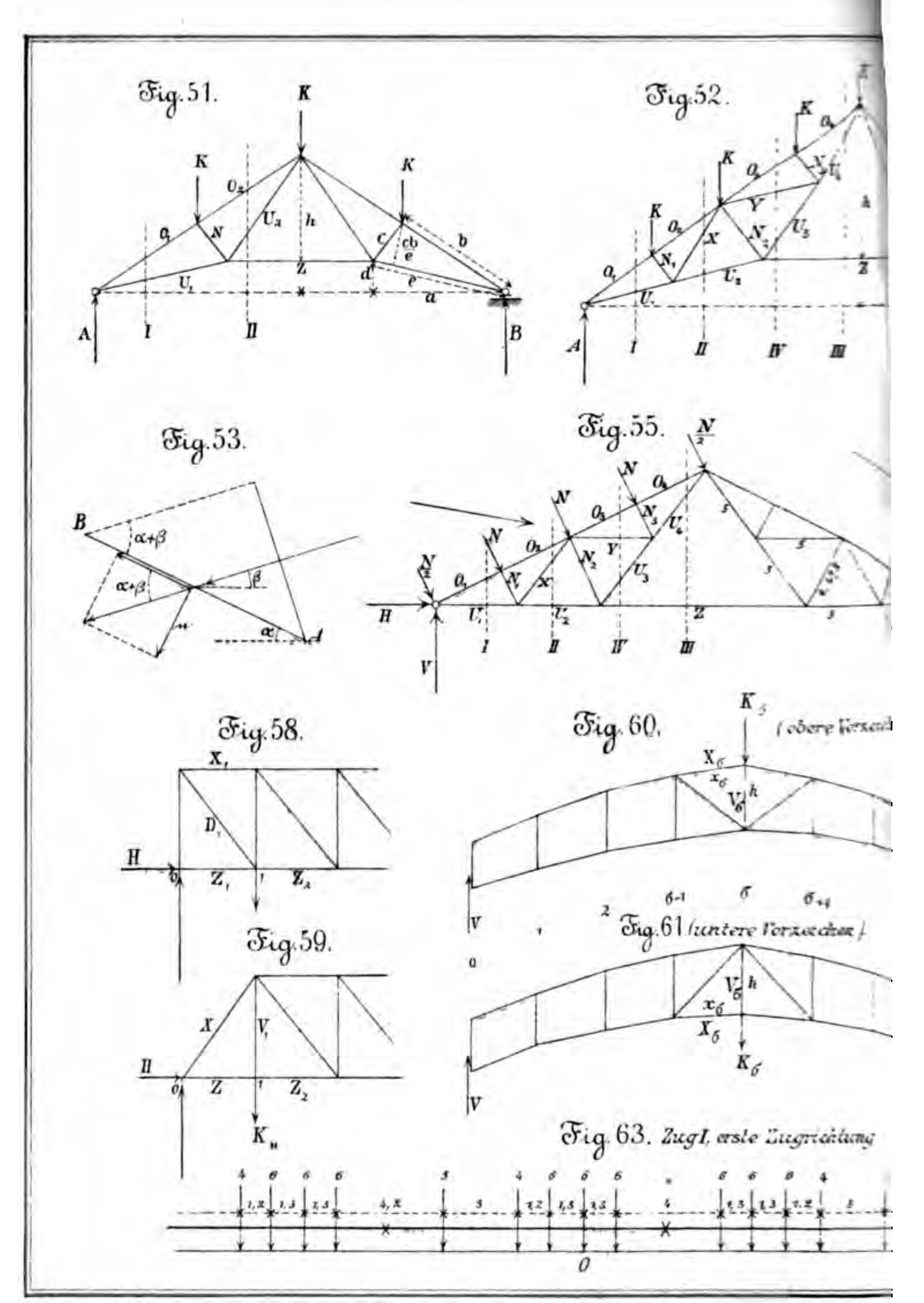


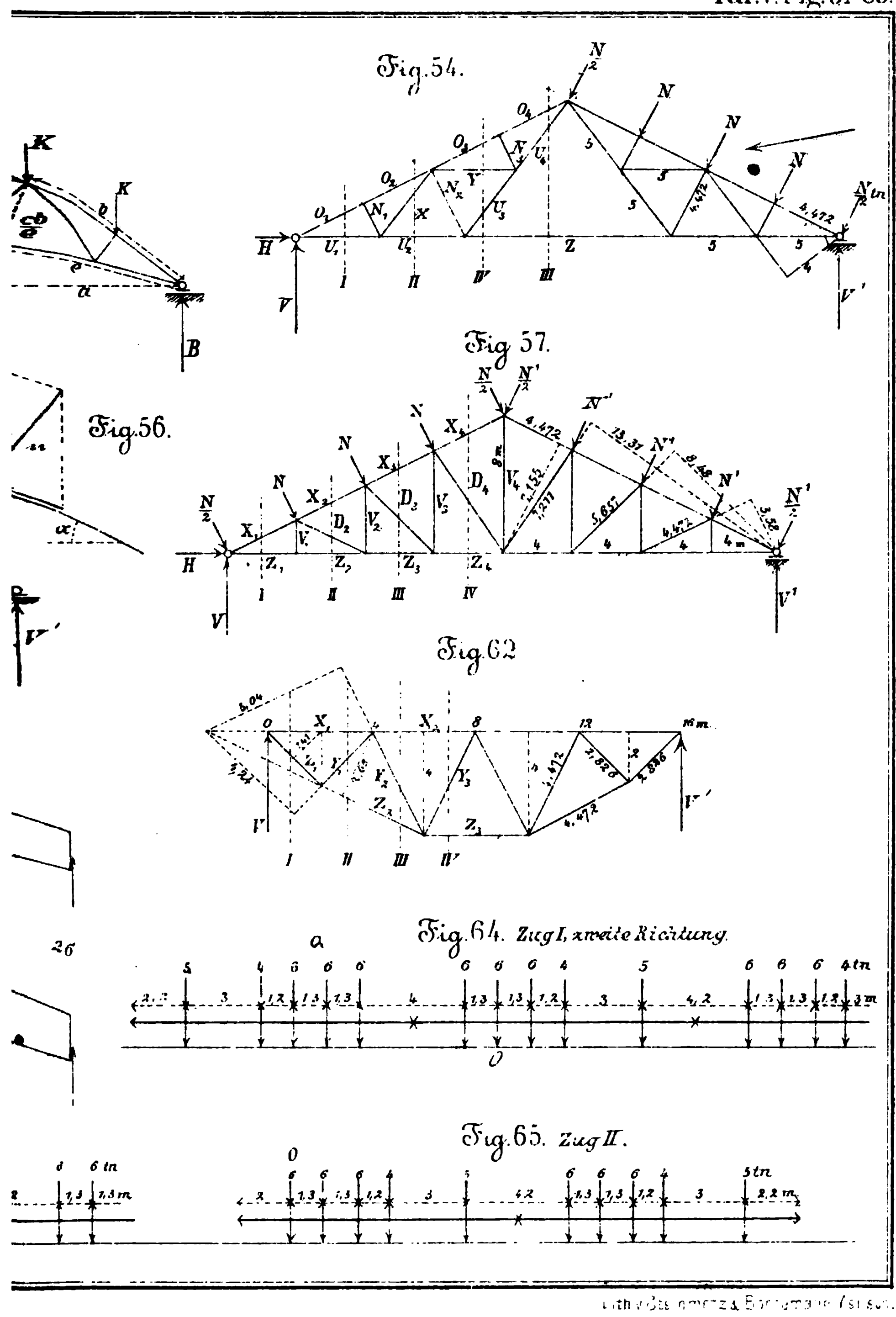
Lith. v. Steinmetz & Bornemann Meissen

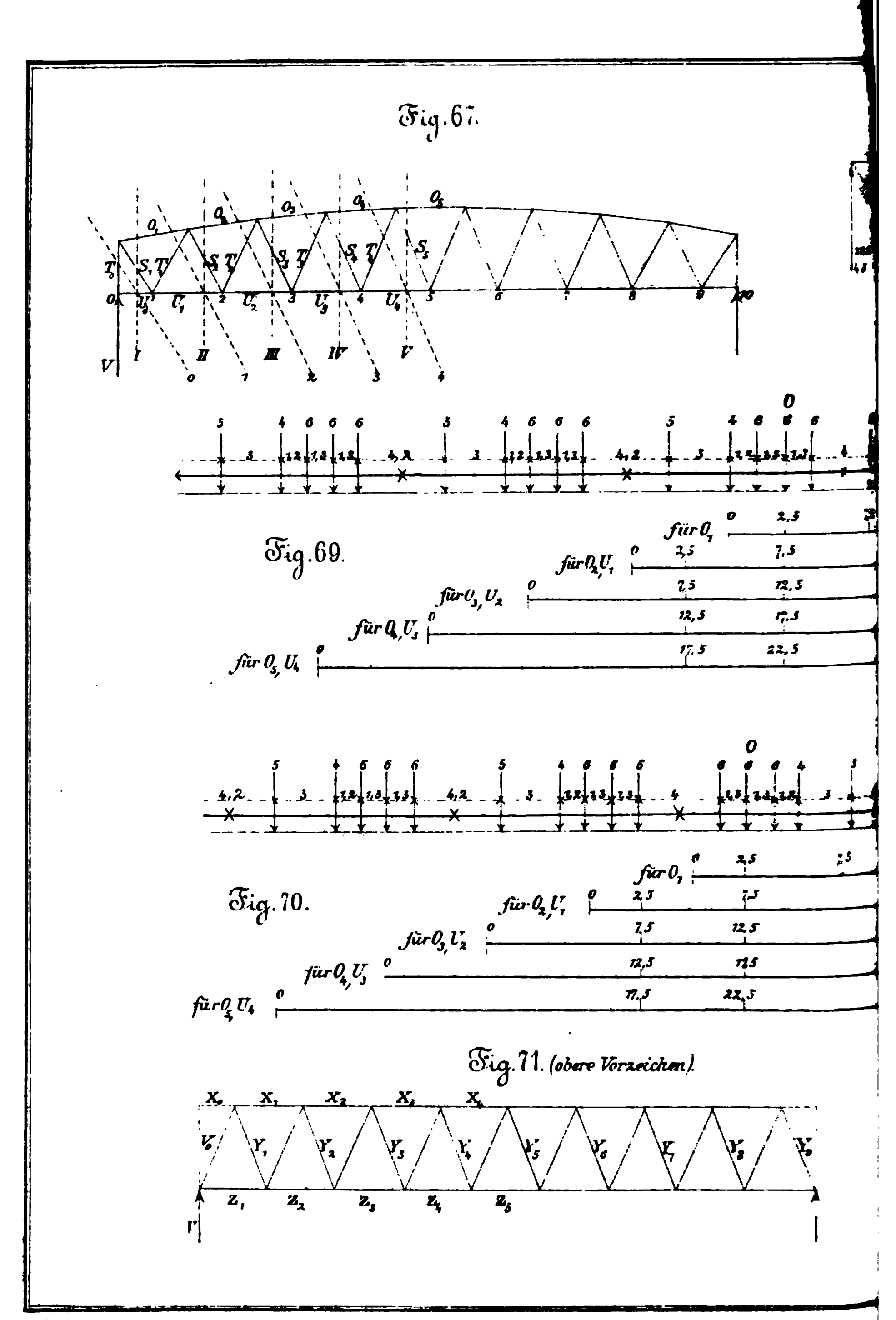

Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 44.
Fig. 48.

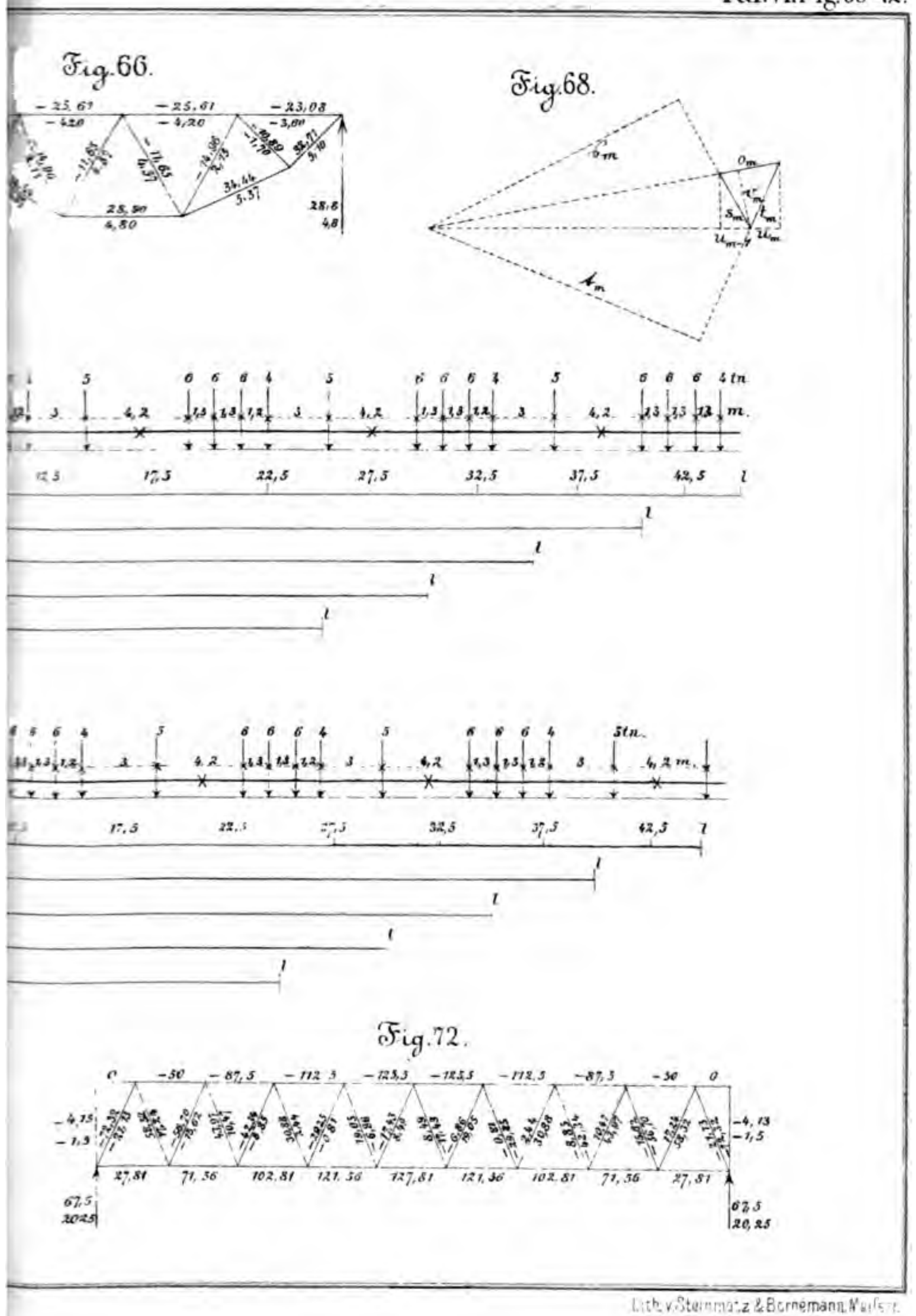


Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meißen.

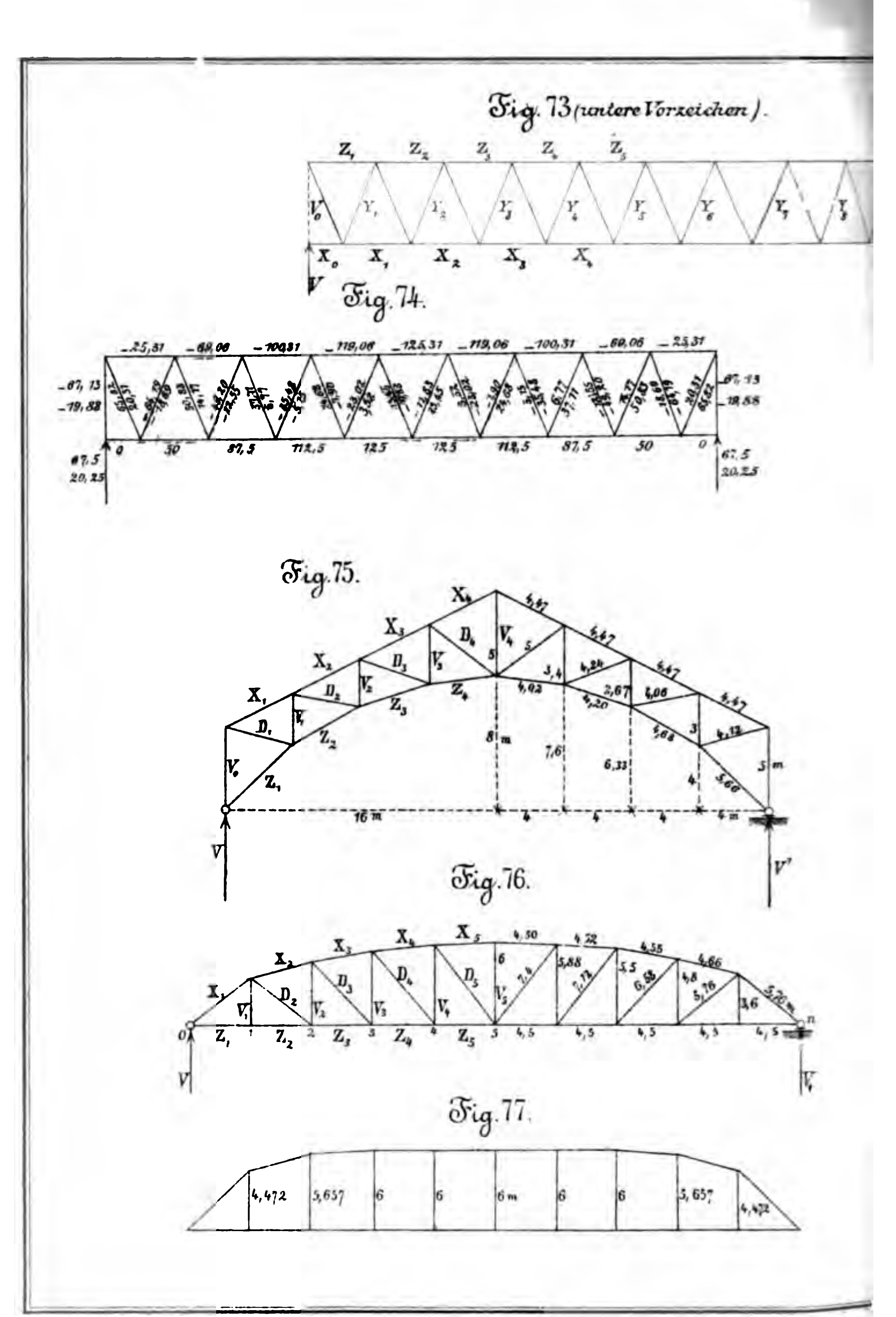

Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 55.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61 (untere Vorzeichen)
Fig. 63. Zug I. erste Zugrichtung


Fig. 54.
Fig. 57.
Fig. 56.
Fig. 62
Fig. 64. Zug I, zweite Richtung.
Fig. 65. Zug II.

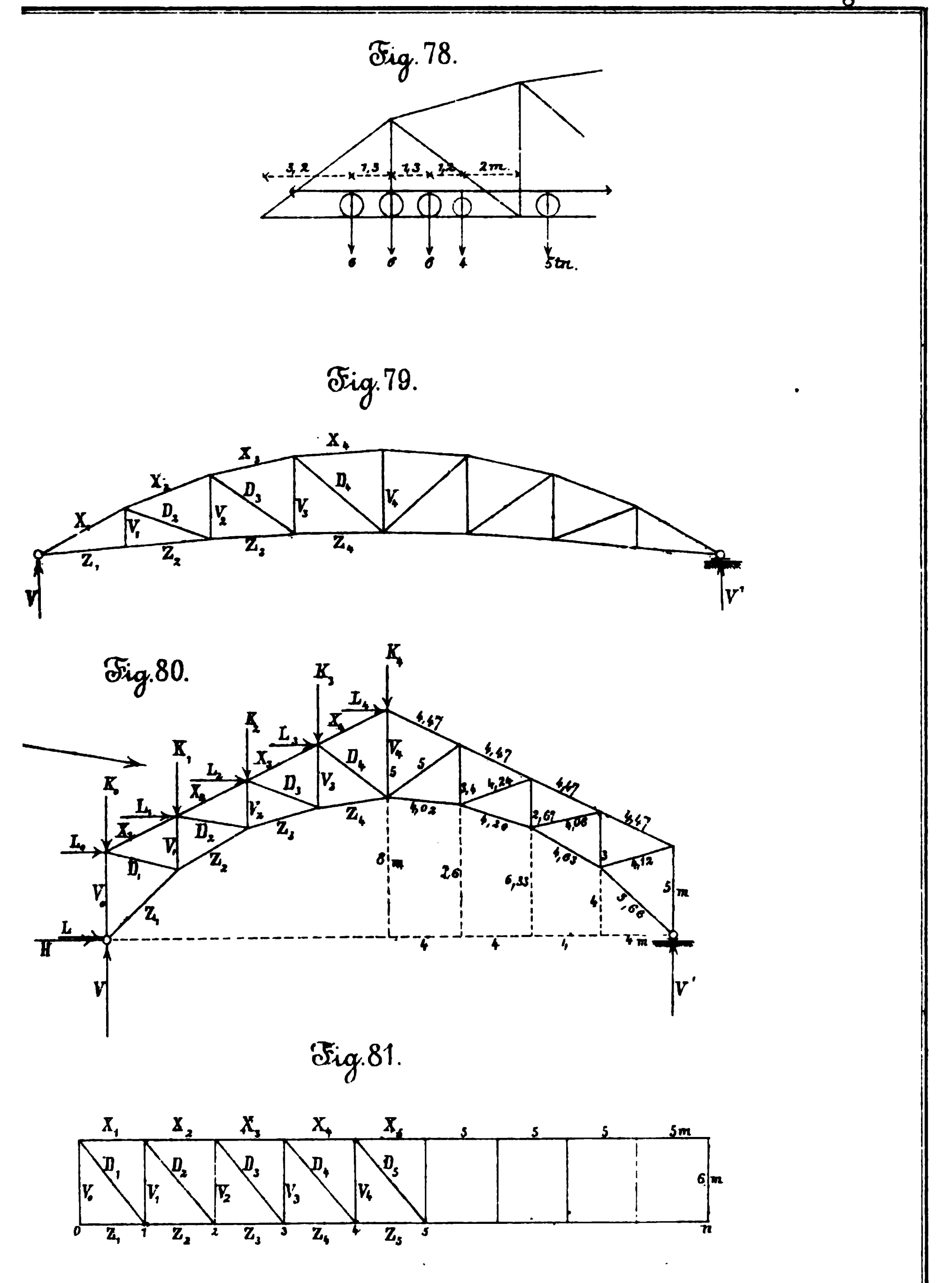

Fig. 67.
Fig. 69.
für O_1
für O_2, U_1
für O_3, U_2
für O_4, U_3
für O_5, U_4
Fig. 70.
für O_1
für O_2, U_1
für O_3, U_2
für O_4, U_3
für O_5, U_4
Fig. 71. (obere Vorzeichen).



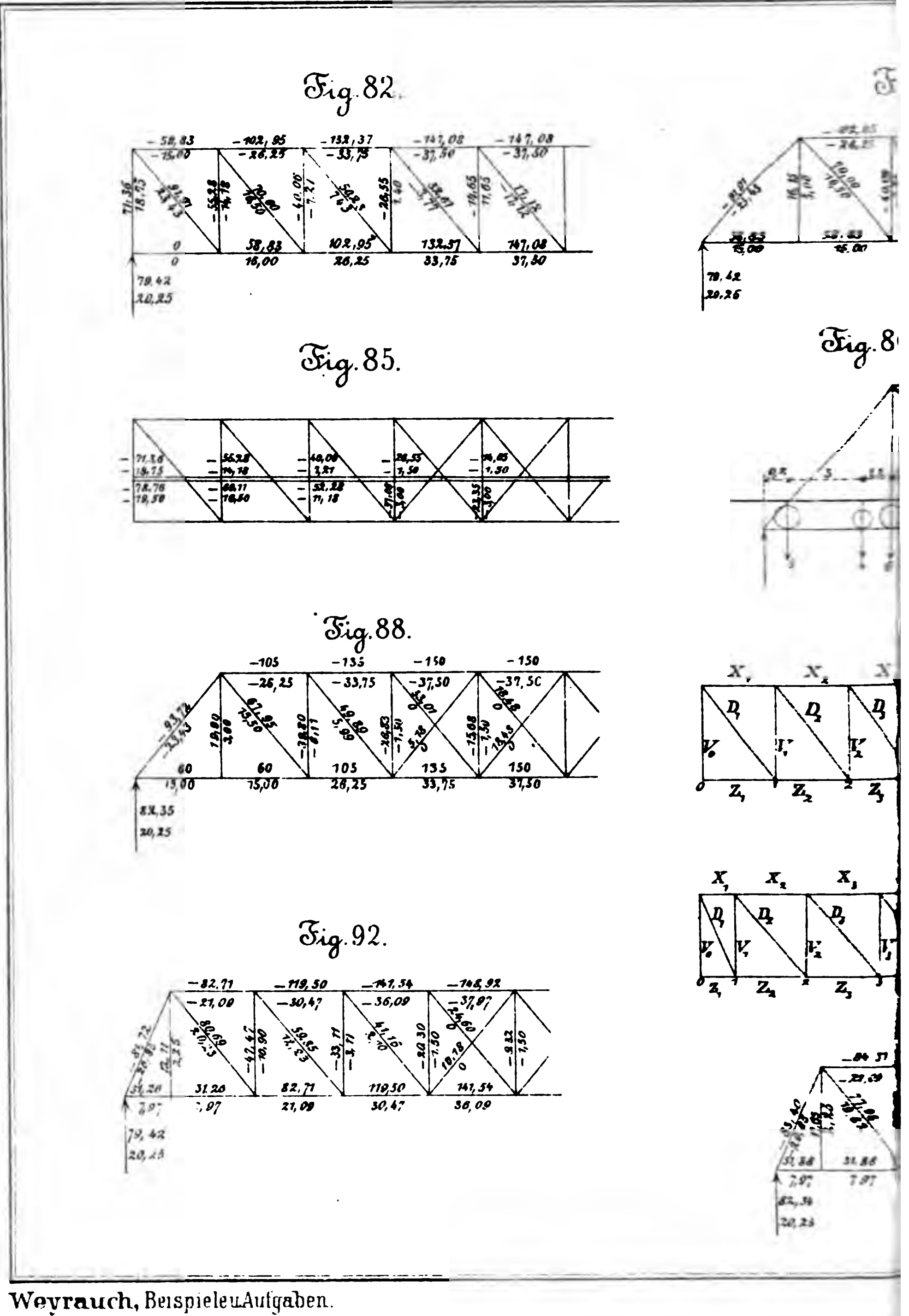
Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Marfeld.



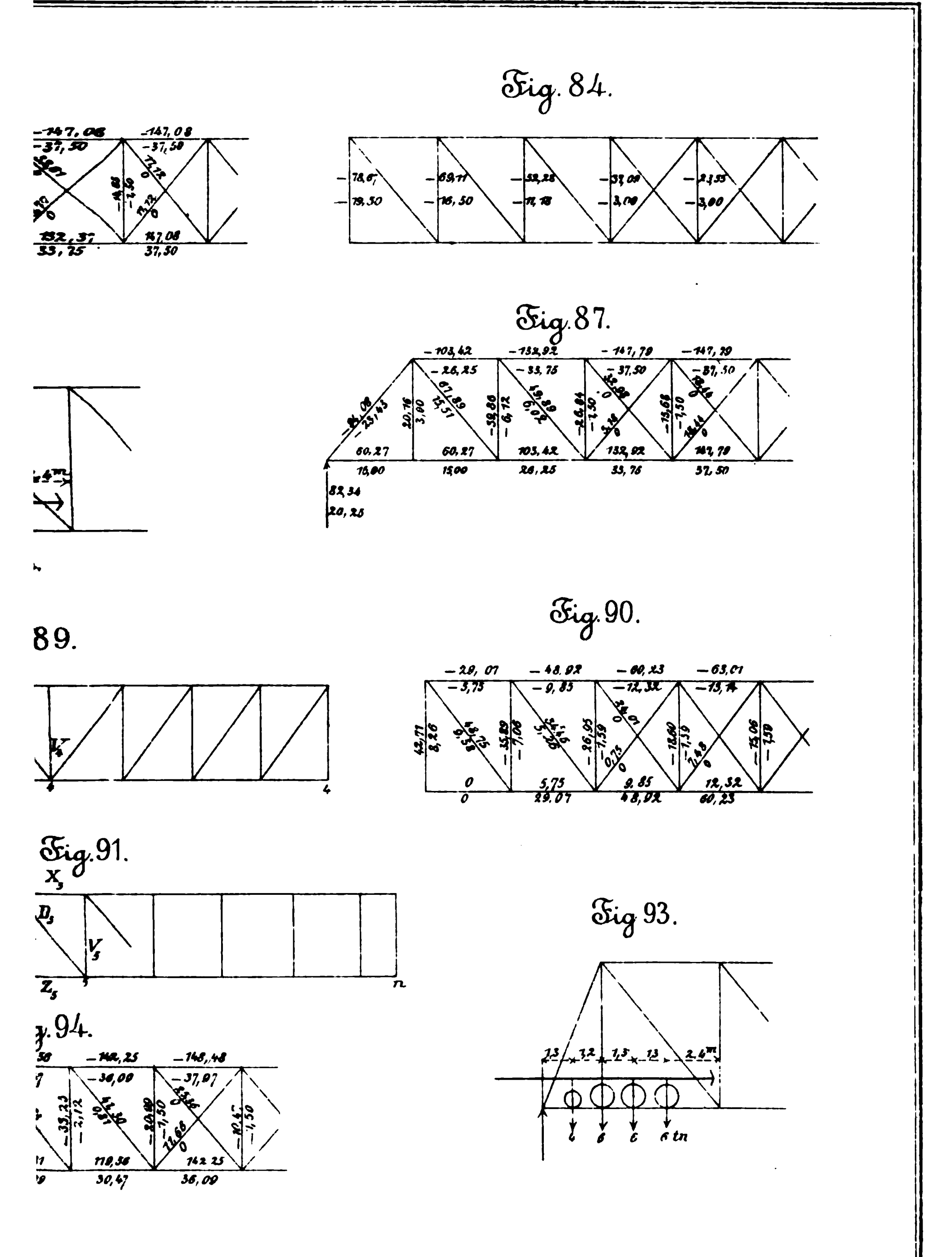
Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.



Lith. v. Steinmetz & Bornemann in Meissen



Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.



Lith v Steinmetz & Bornemann Magdeb.

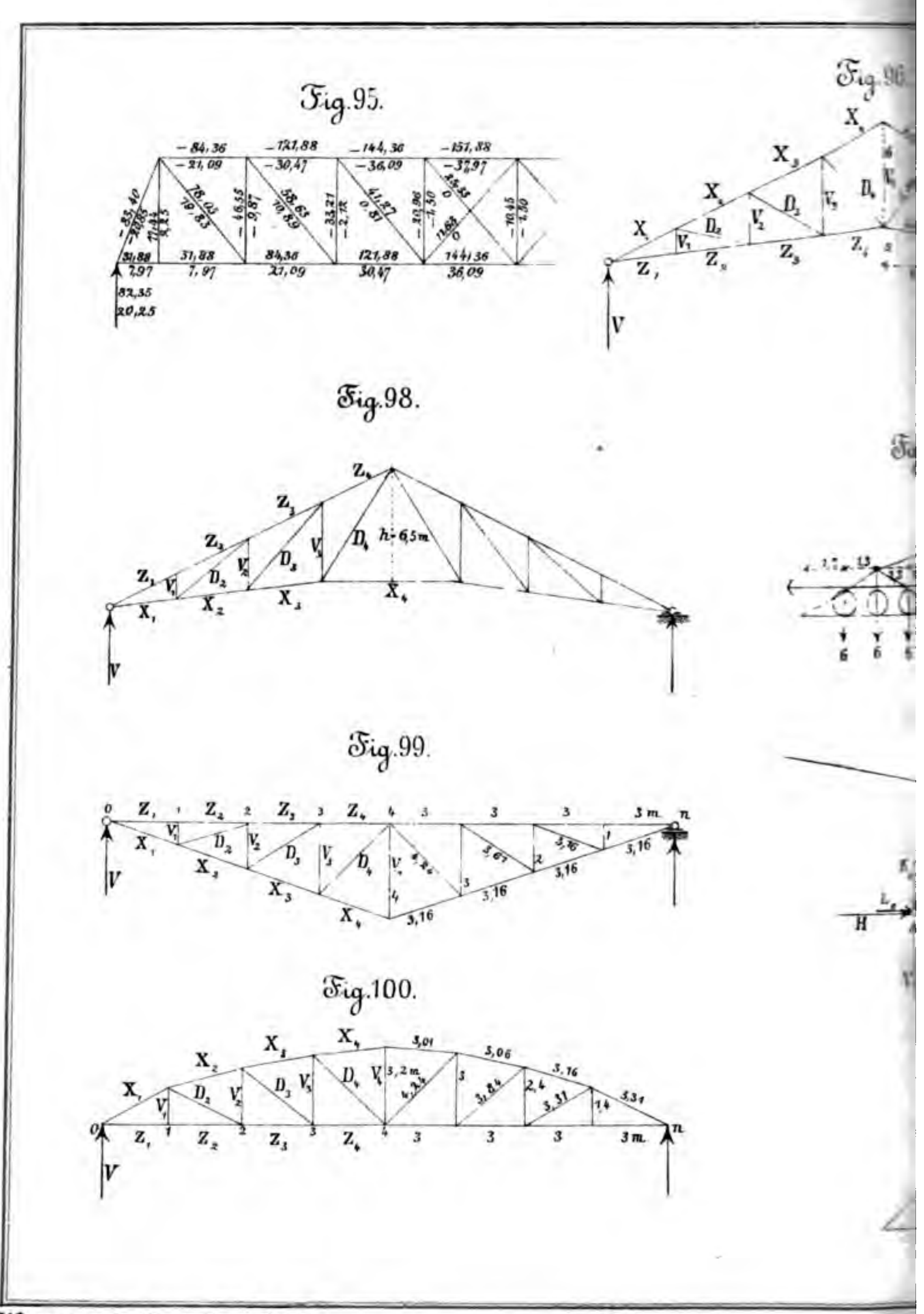
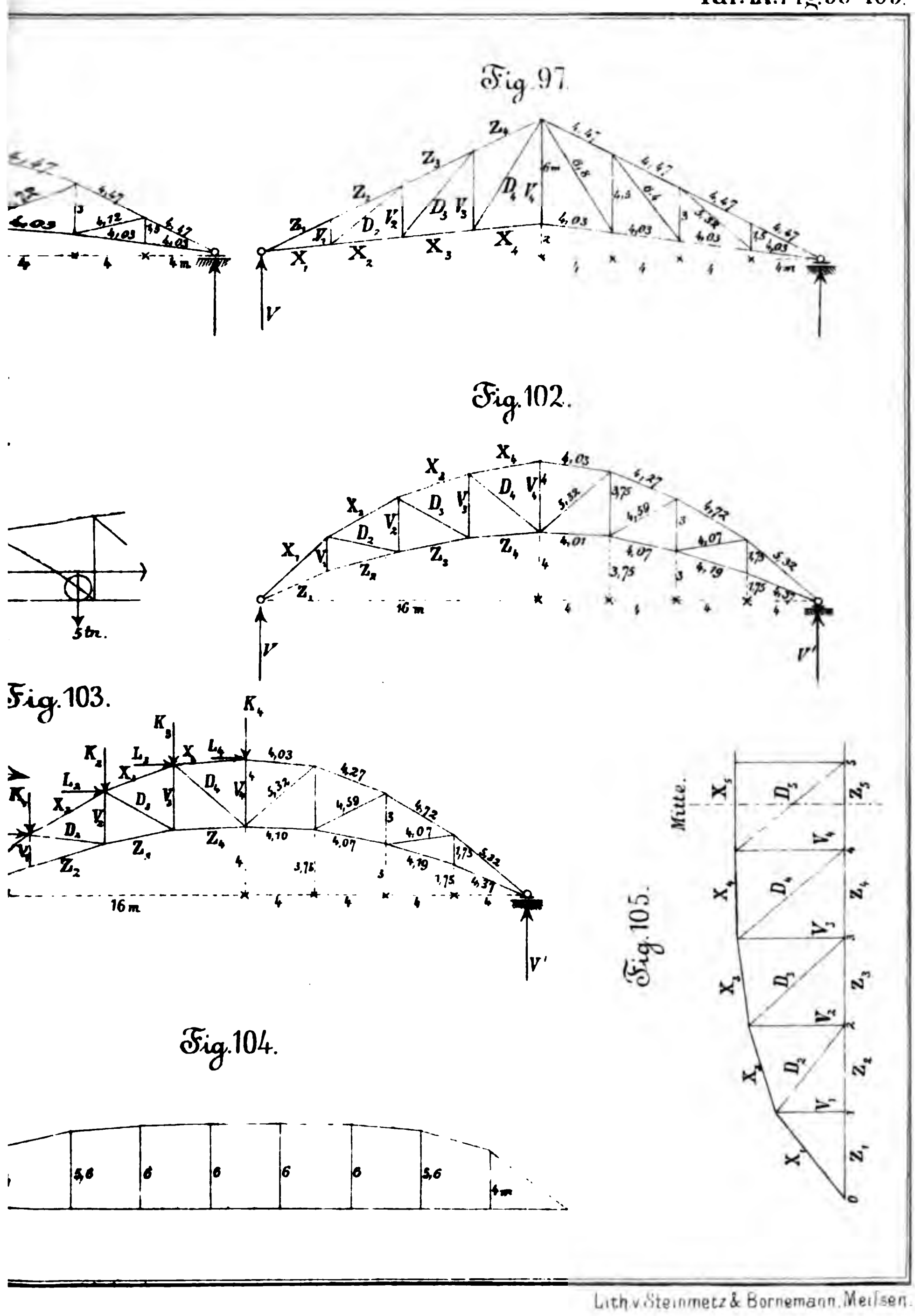
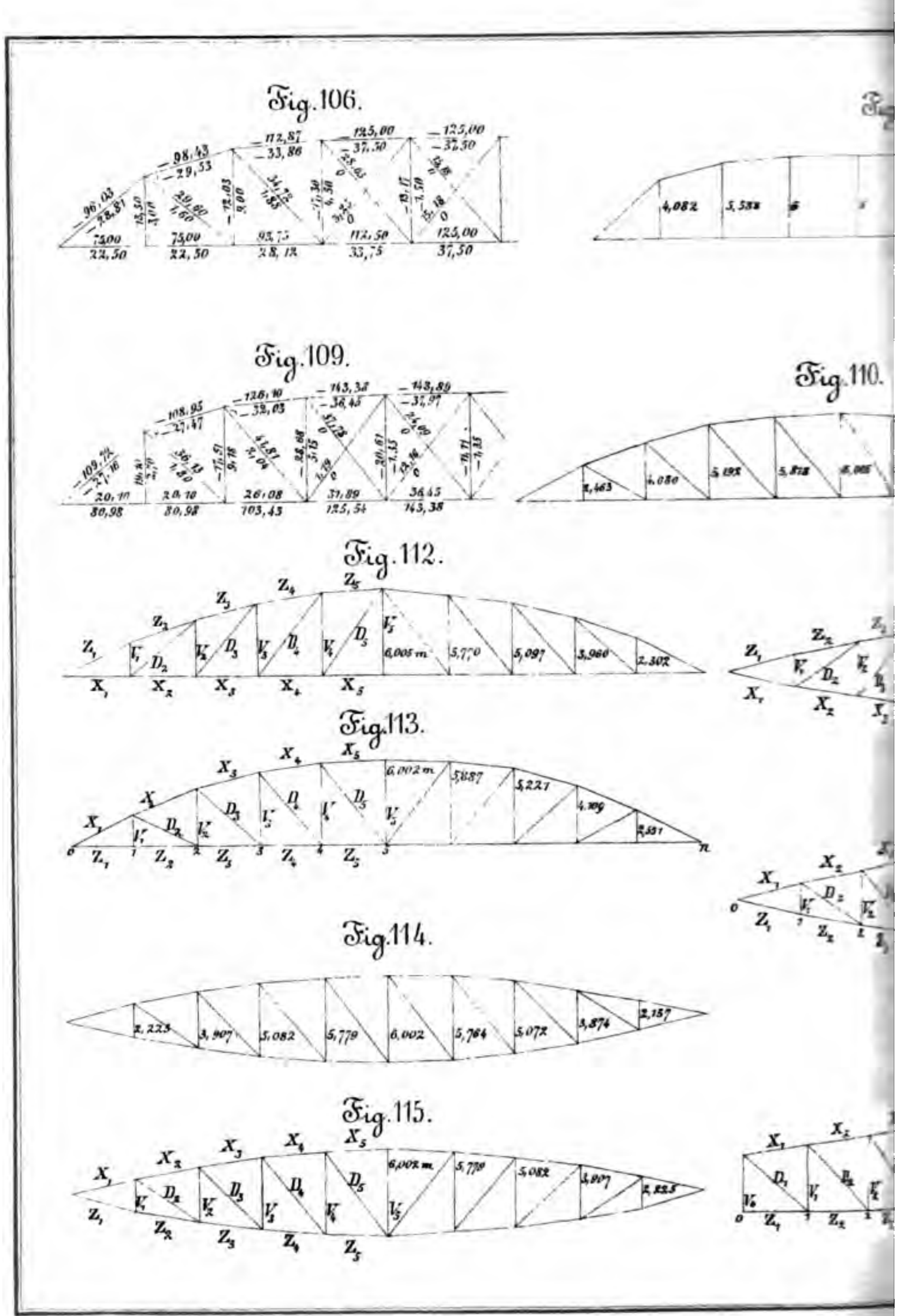


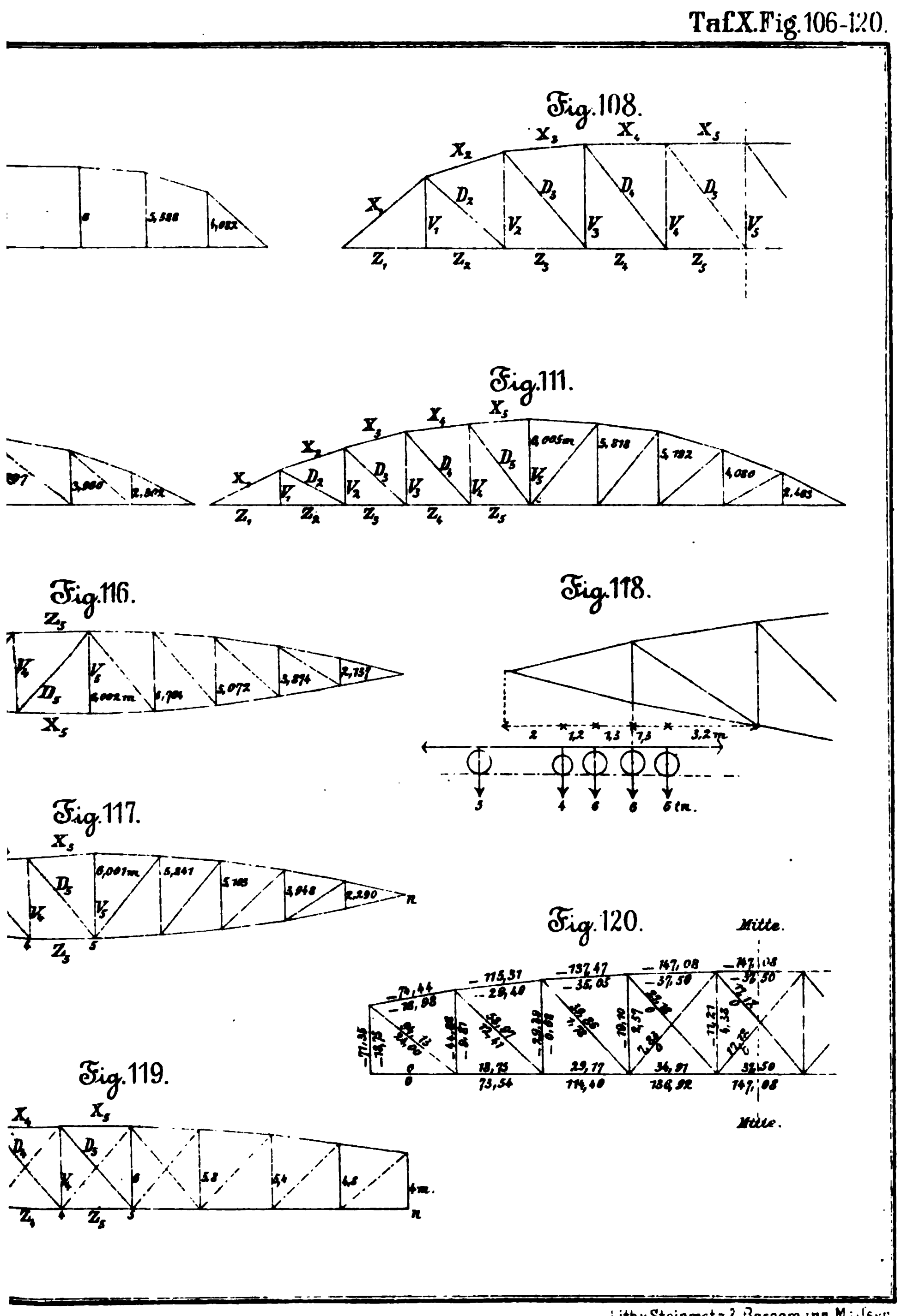
Fig. 95.
Fig. 96
Fig. 98.
h = 6,5 m
Fig. 99.
Fig. 100.



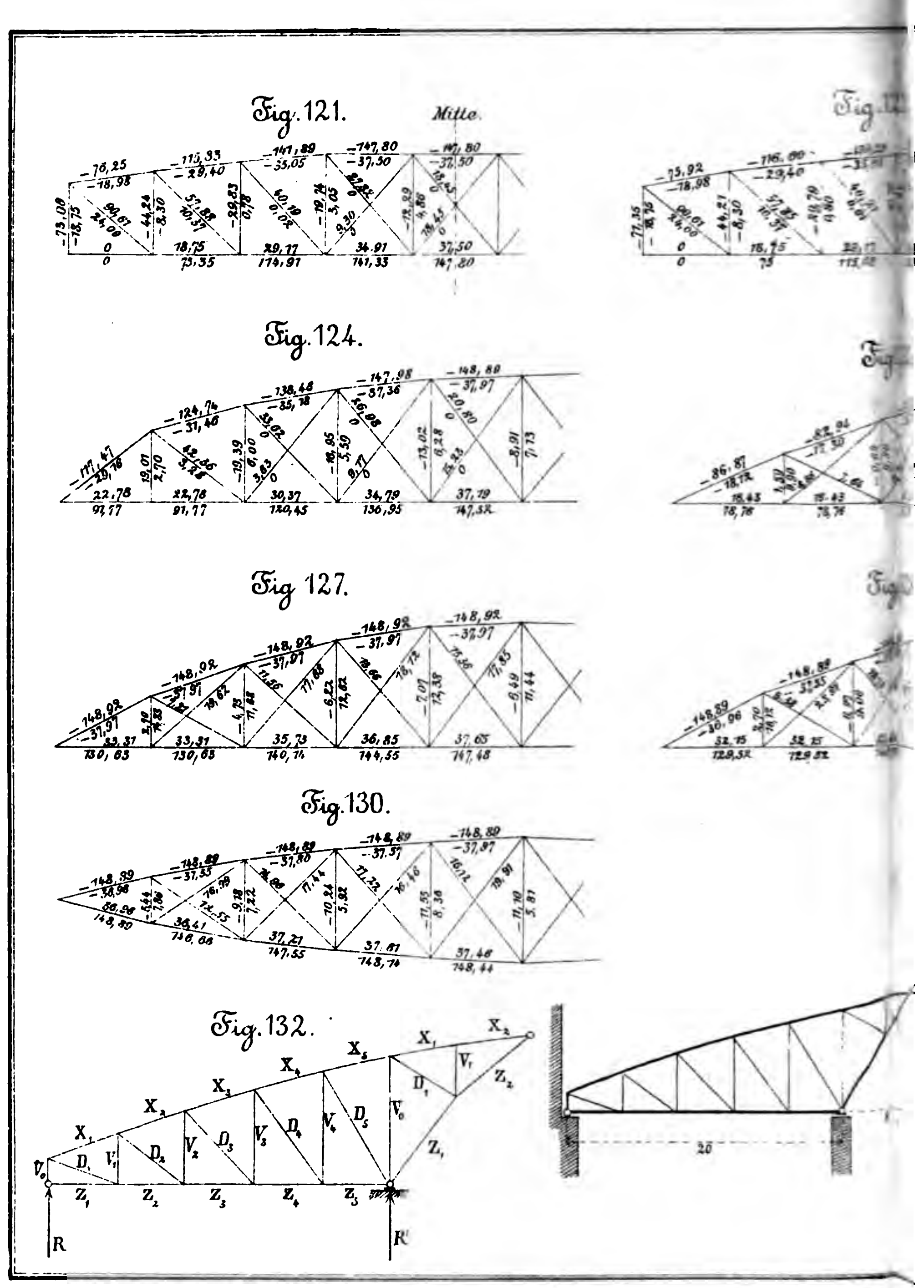
Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen.

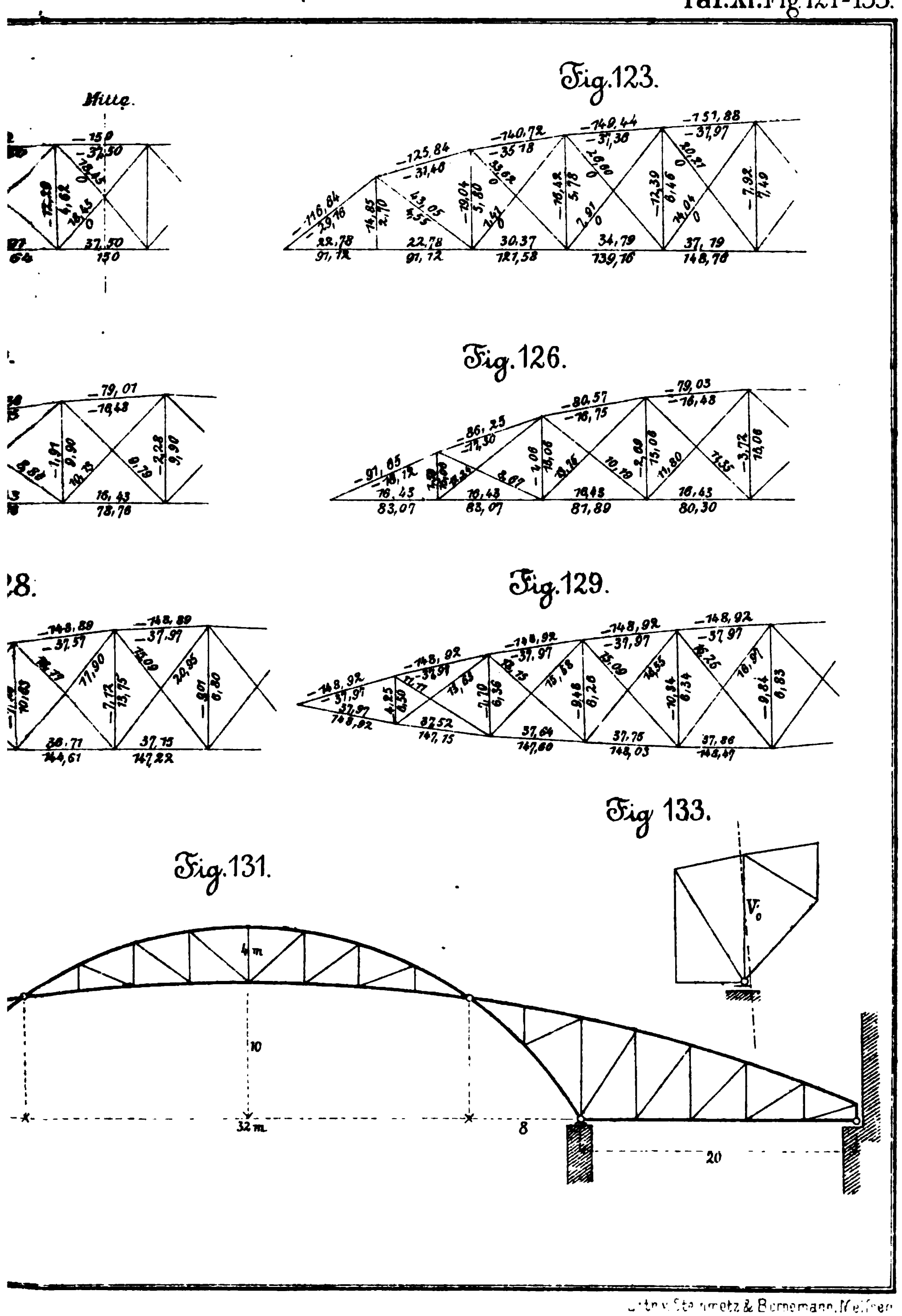


Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.

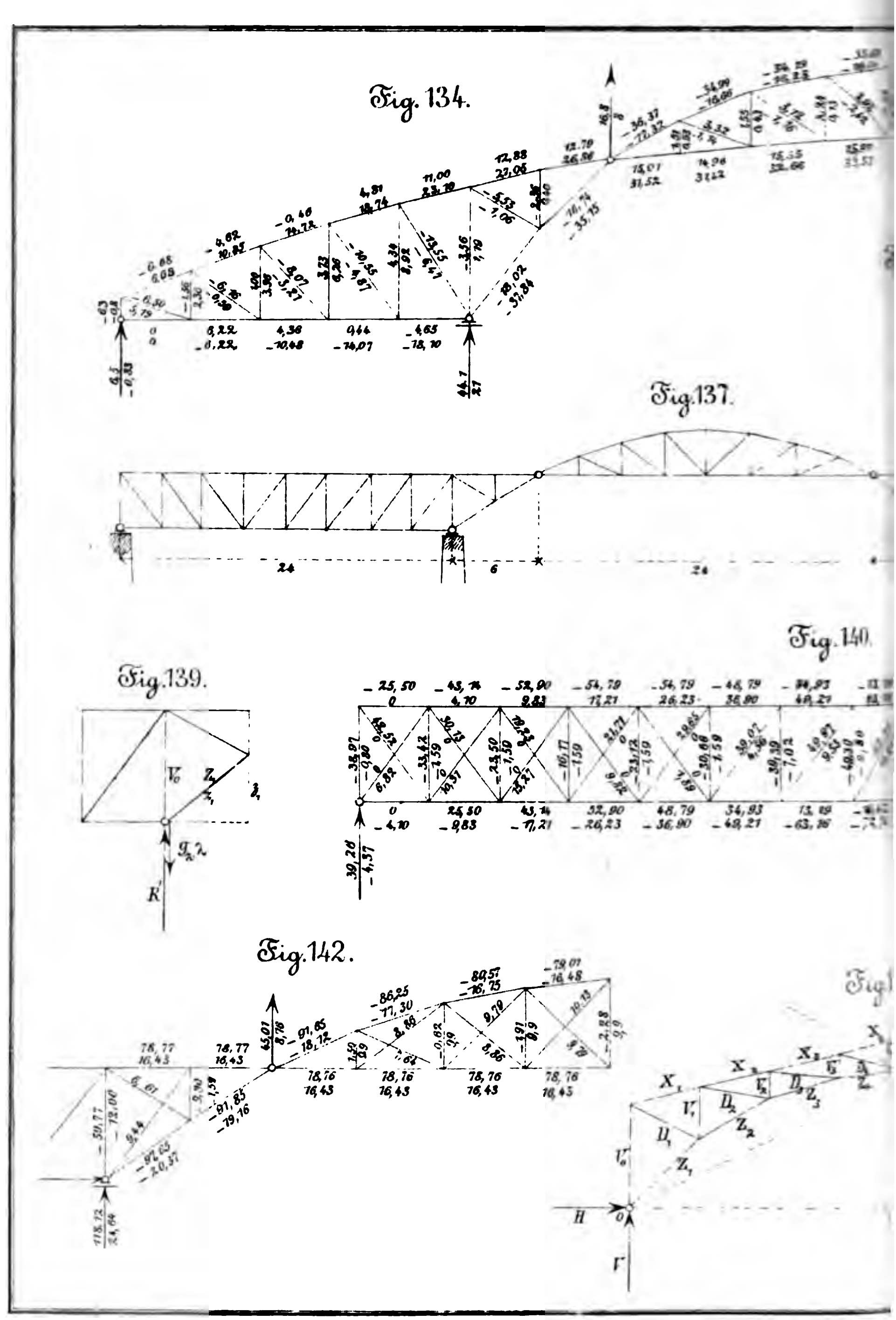


Lith v Steinmetz & Bornemann Meissen.

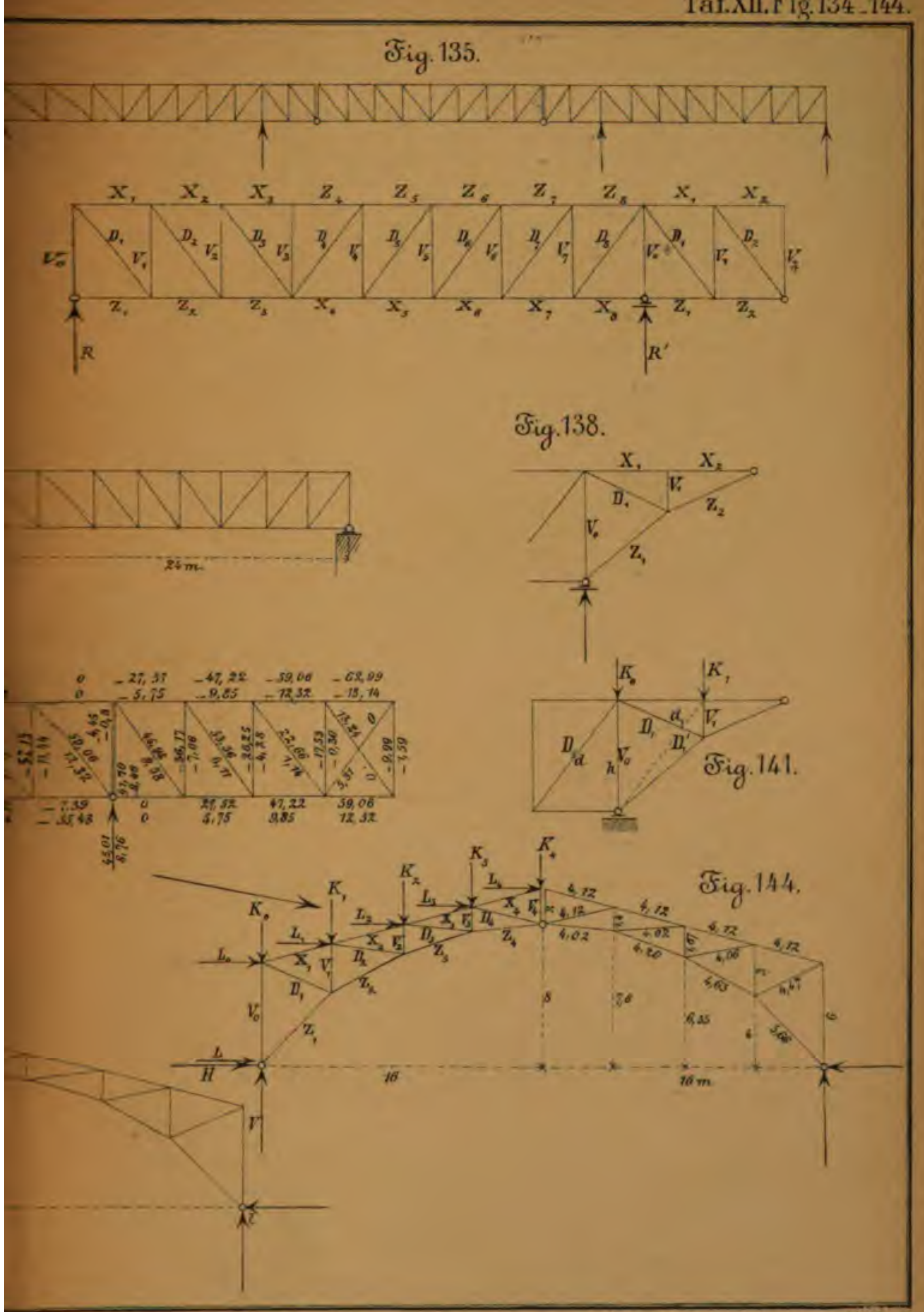

Fig. 121.
Mitte.
Fig. 124.
Fig 127.
Fig. 130.
Fig. 132.
X1 X2 X3 X4 X5 X1 X2
V0 V1 V2 V3 V4 V0 V1
D1 D2 D3 D4 D5 D1
Z1 Z2 Z3 Z4 Z5 Z1 Z2
R R'
20



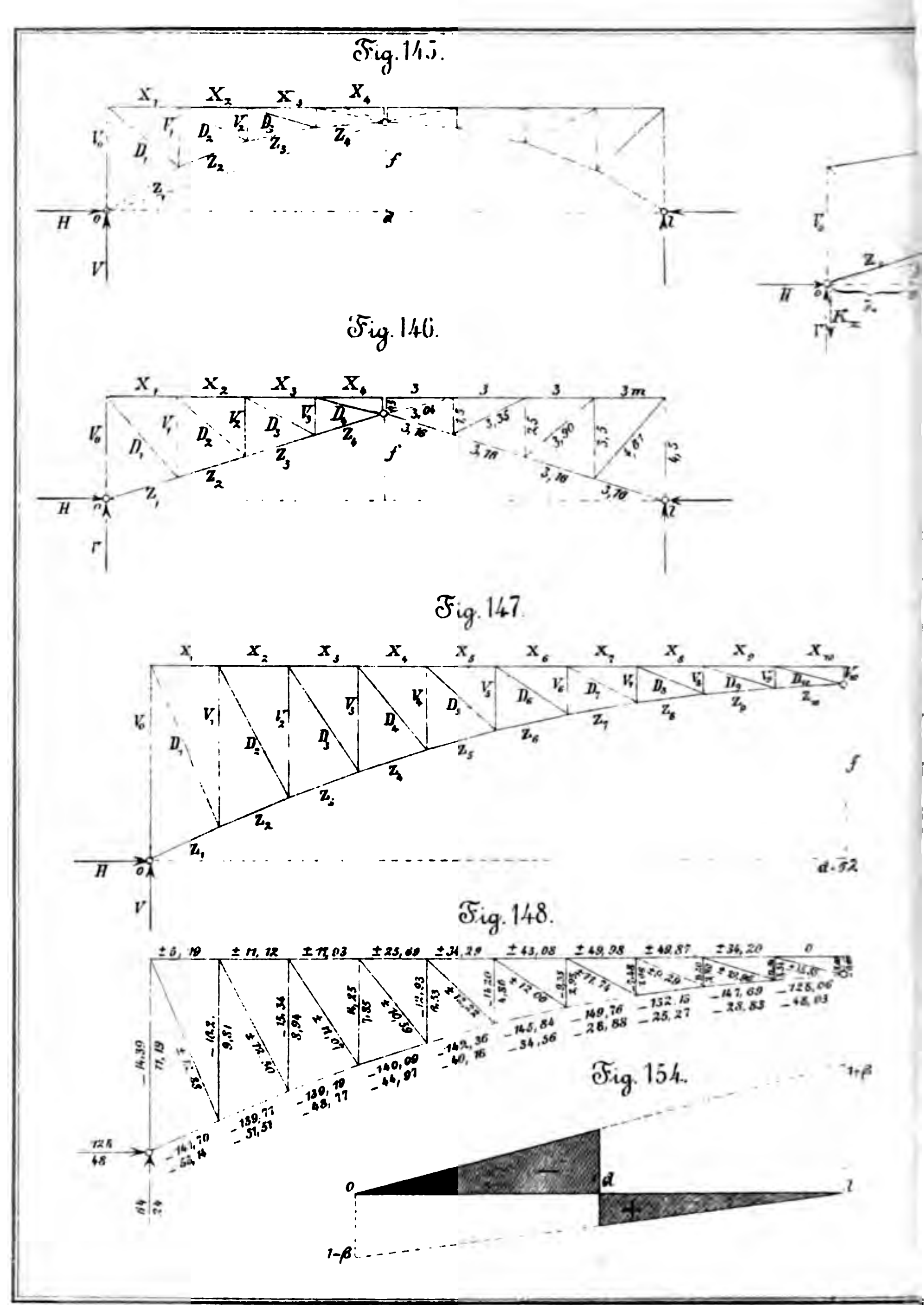
Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meißen



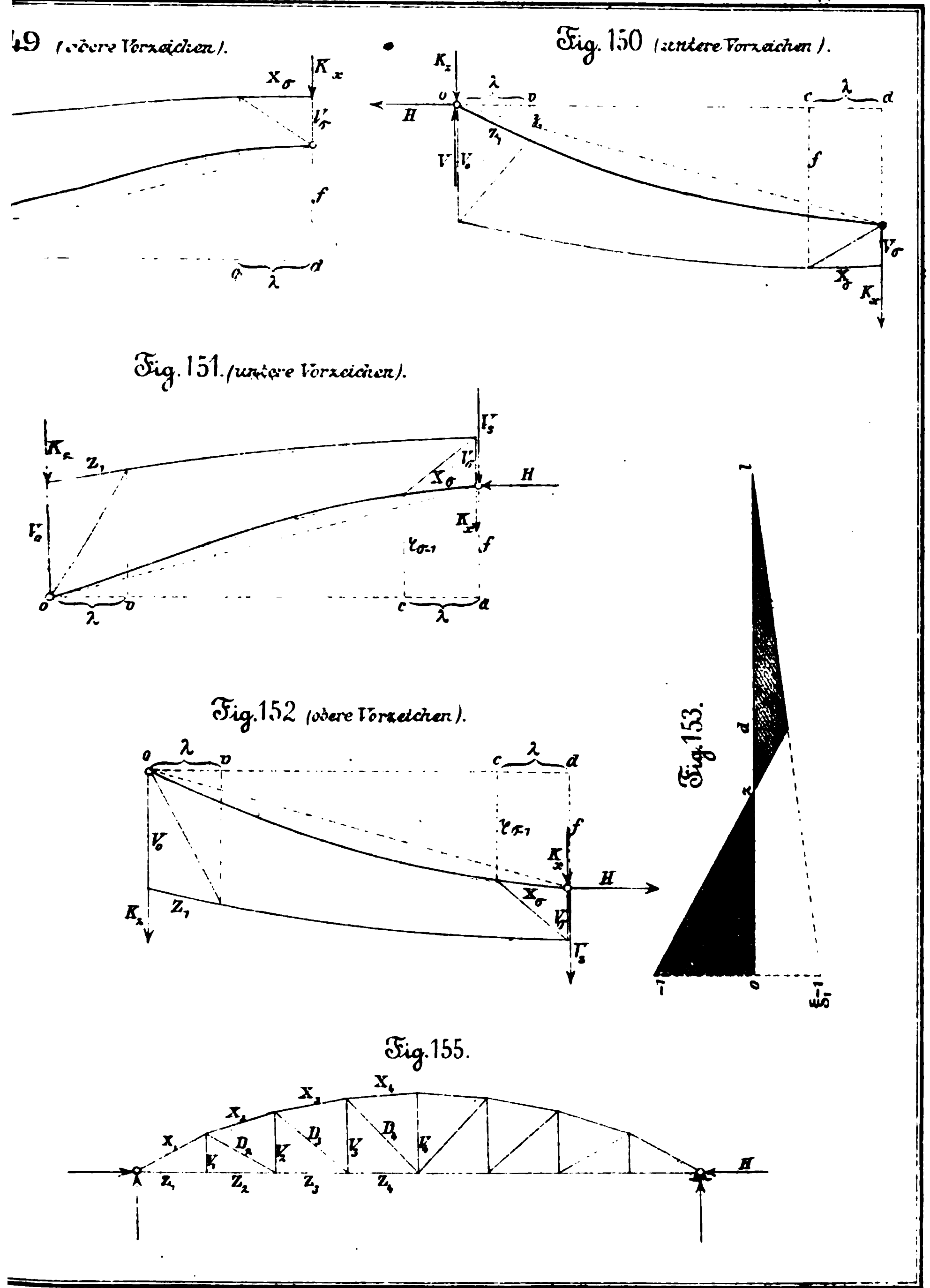
Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.



Lith v. Steinmetz & Bornemann Meißen

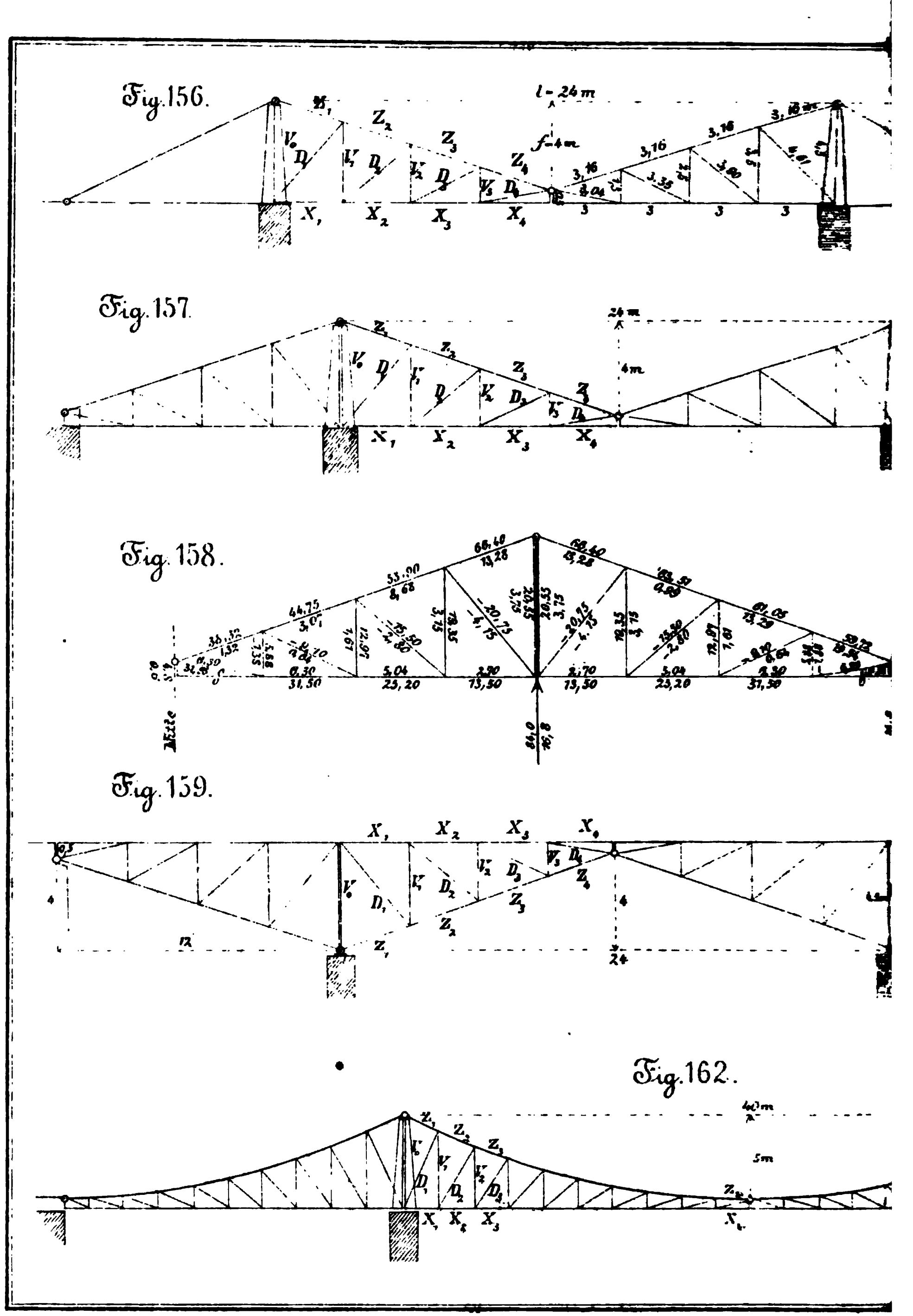


Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.



Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen.





Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.

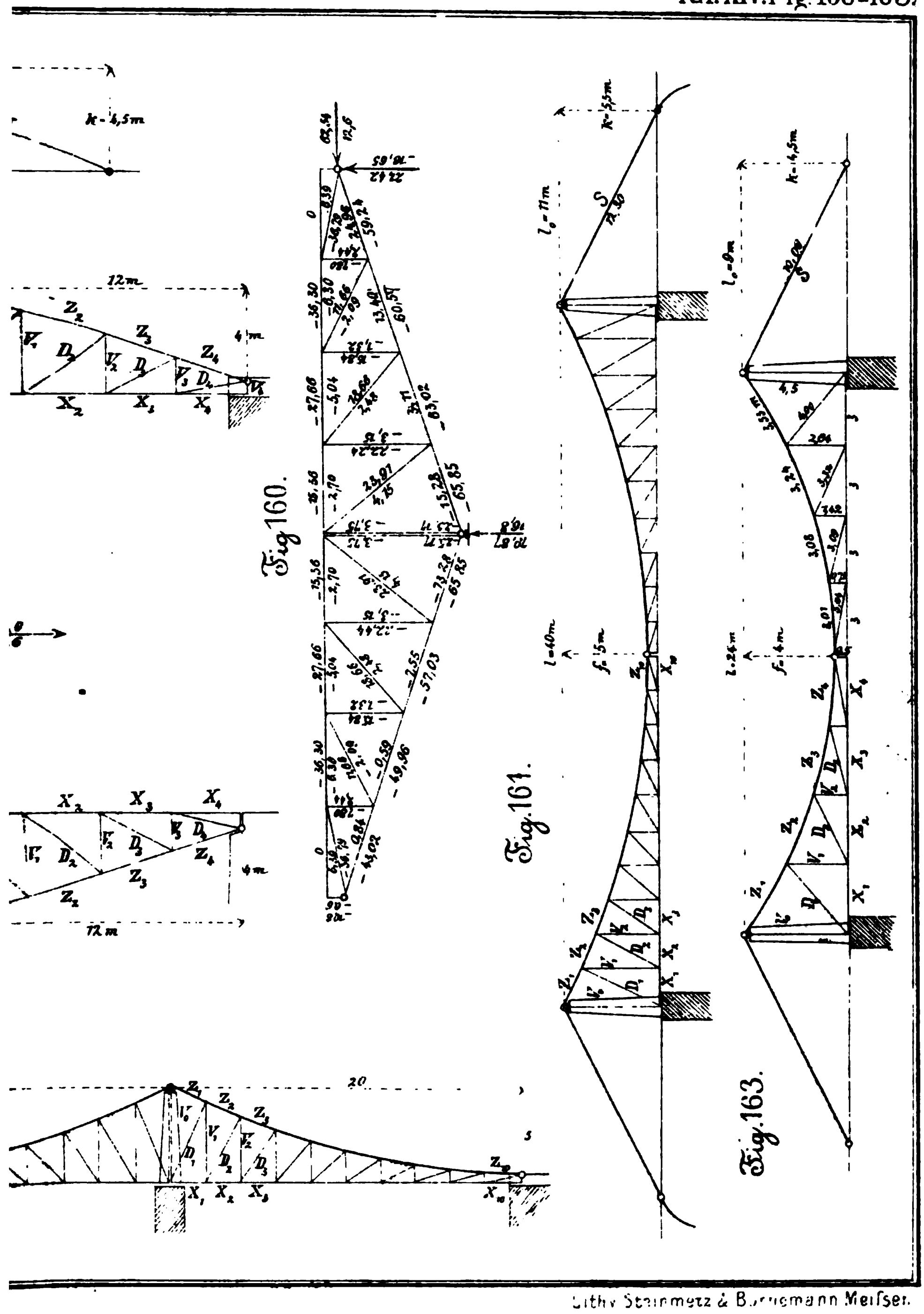
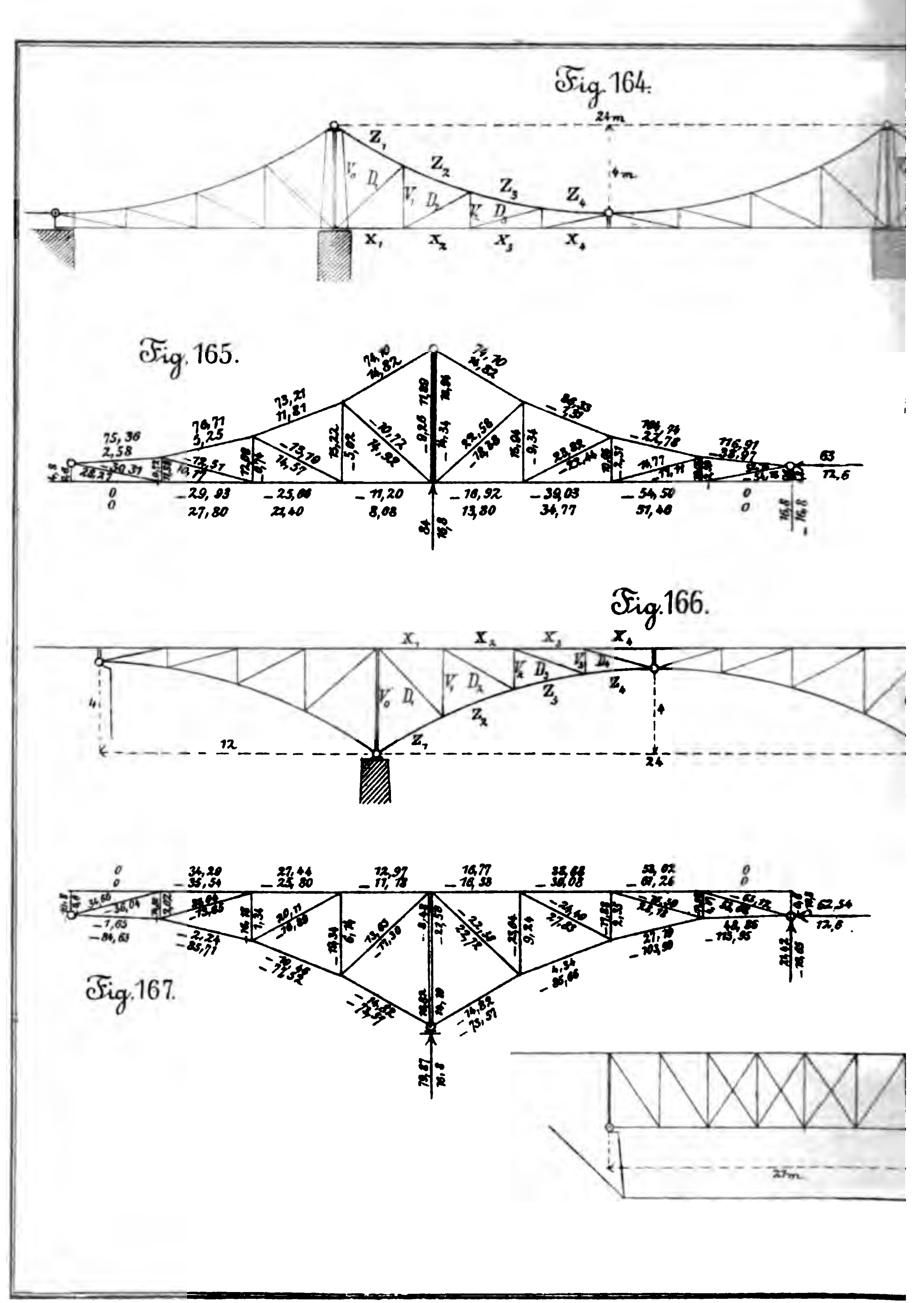


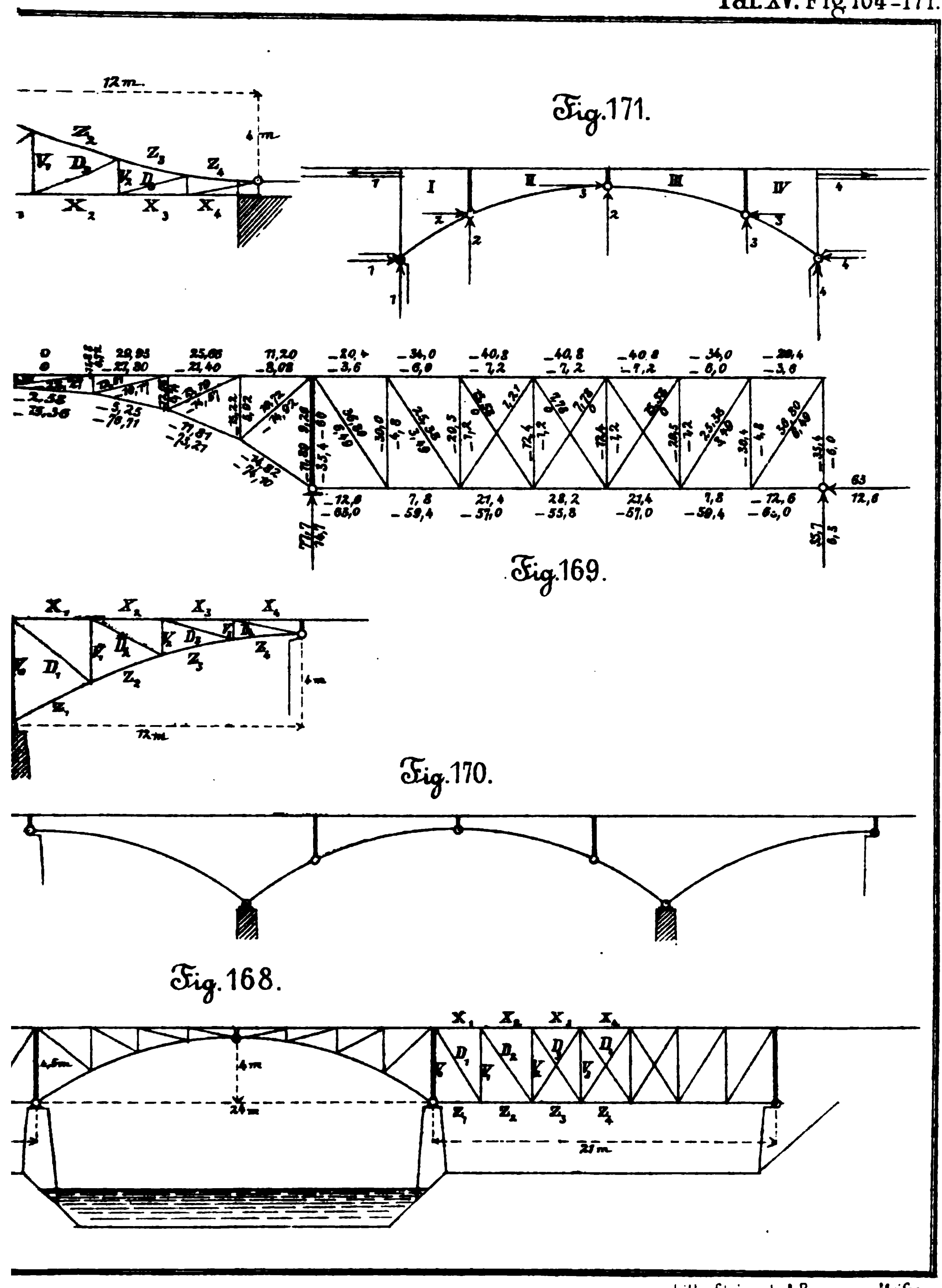
Fig. 160.

Fig. 161.

Fig. 163.

Lith. v. Steinmetz & Bornemann Meißen.


Fig. 164.
24m
4m
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.



Lith v Steinmetz & Bornemann Meifsen.

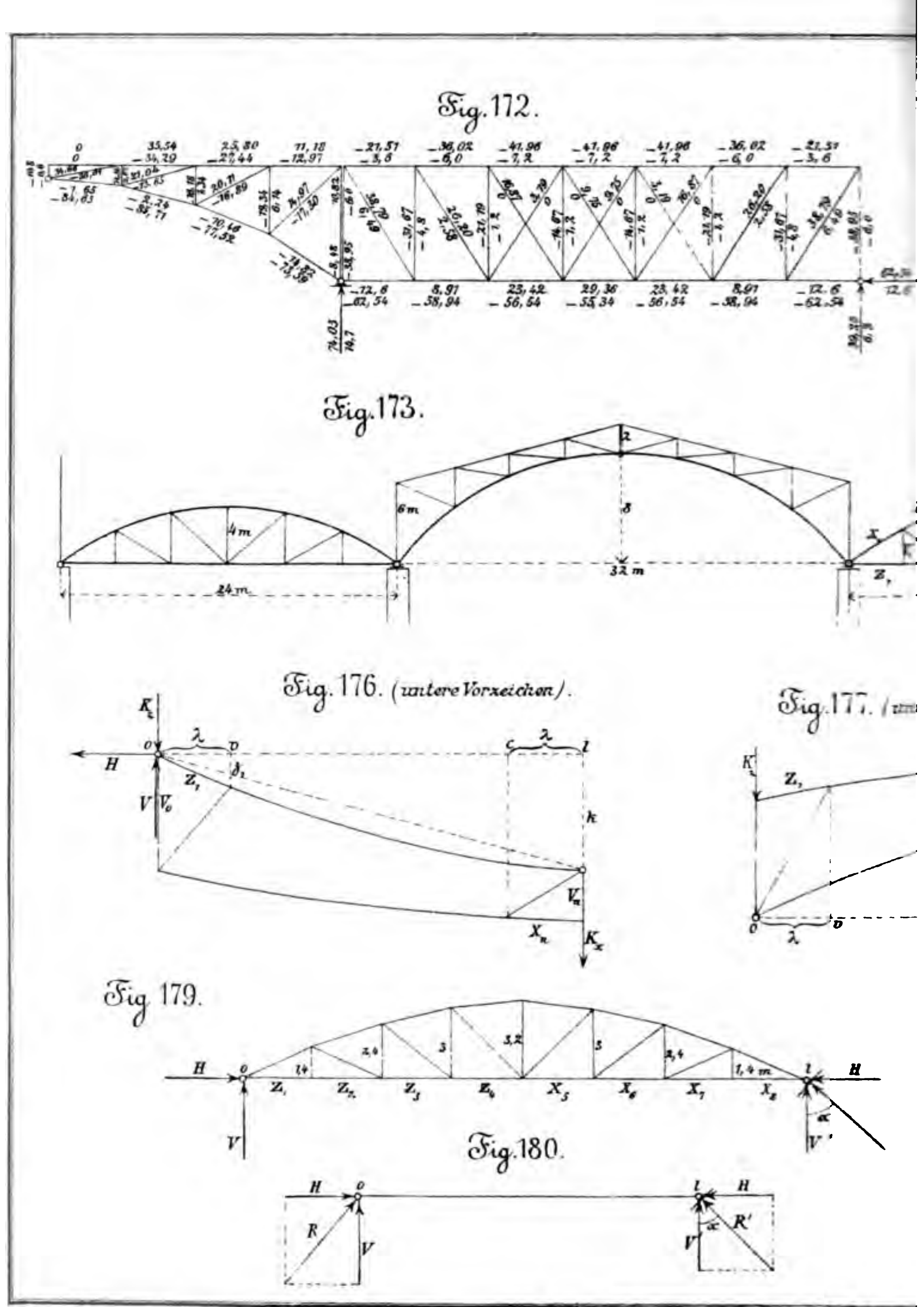


Fig. 172.

Fig. 173.

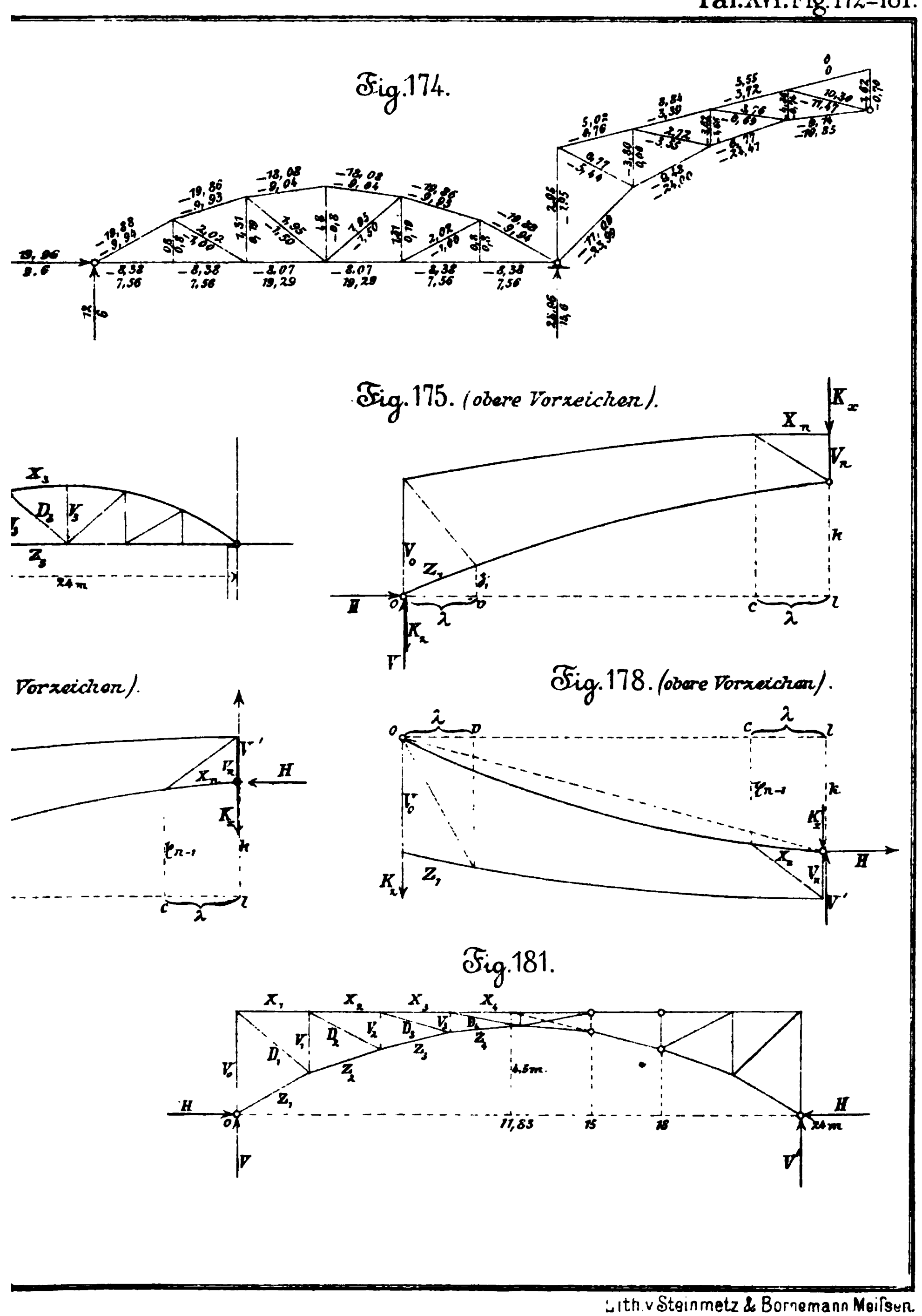
Fig. 176. (untere Vorzeichen).

Fig. 177. (un…

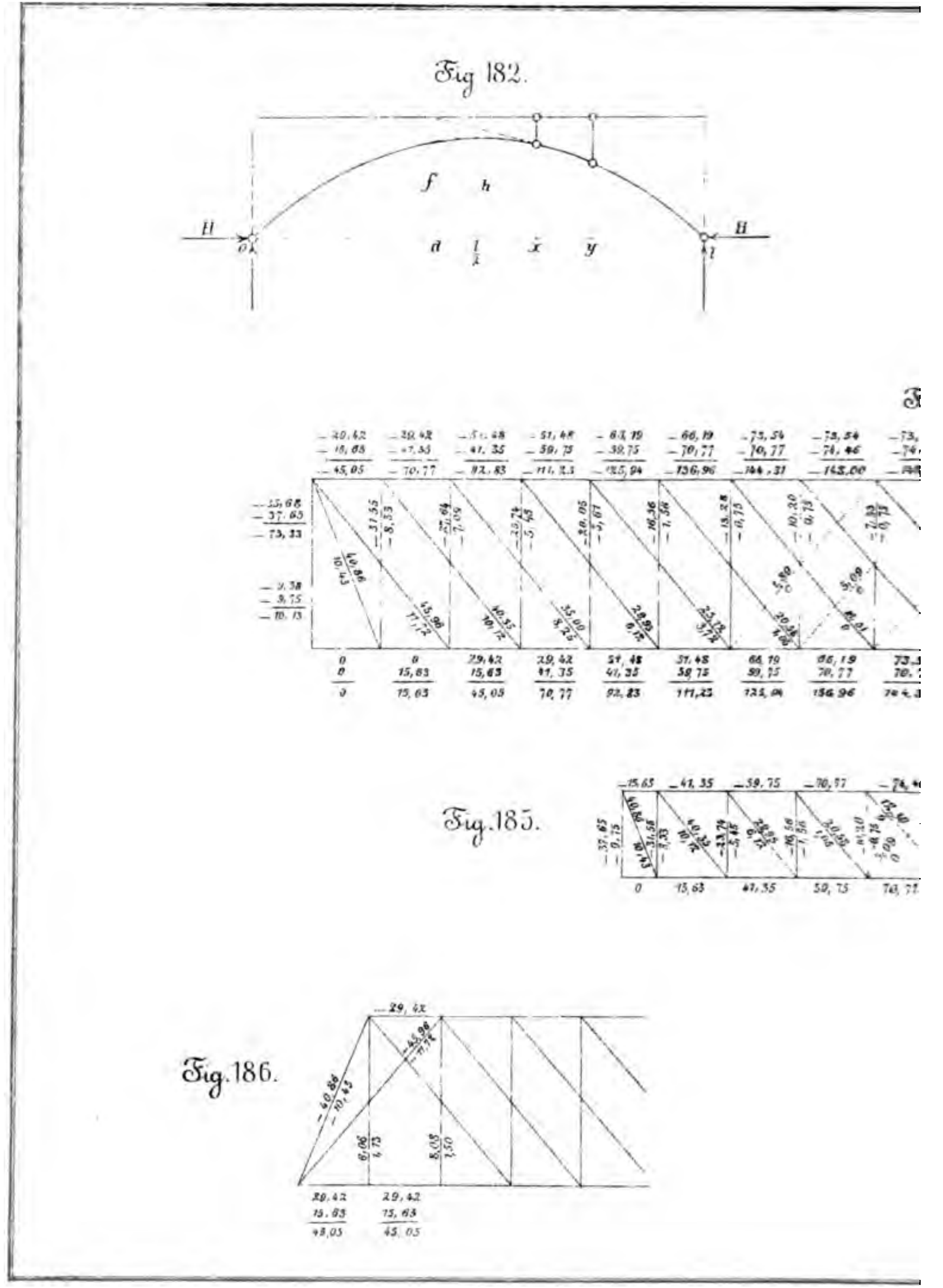
Fig 179.

Fig. 180.

Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.

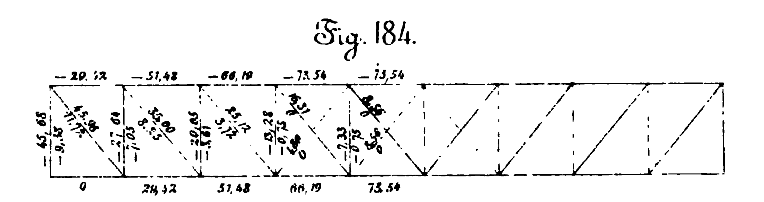


Lith. v. Steinmetz & Bornemann Meißen.

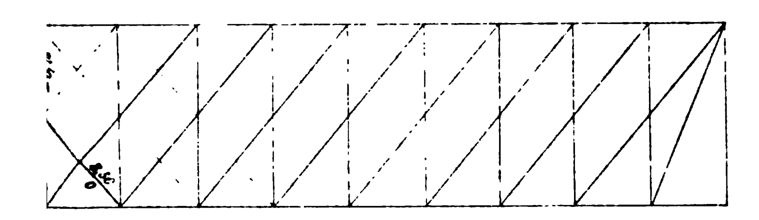


Weyrauch, Beispiele u. Aufgaben.

Fig. 184.



83.



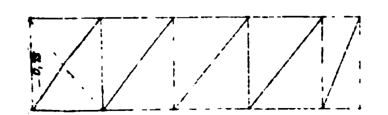
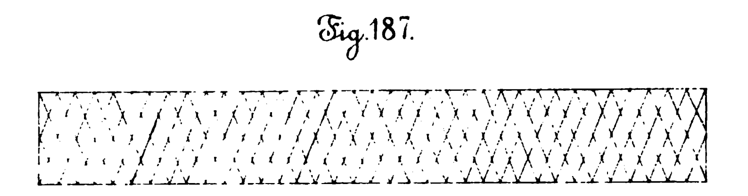
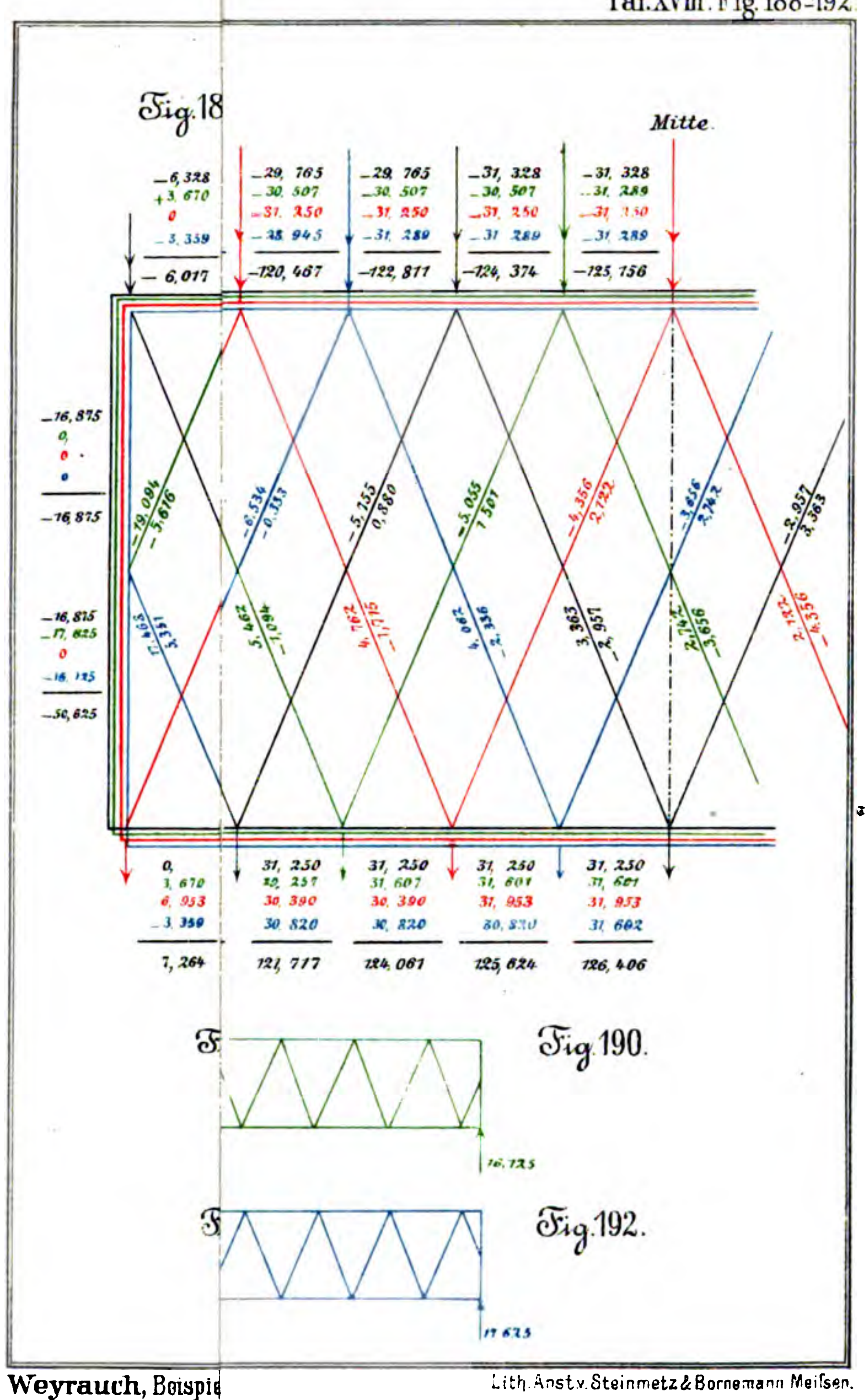


Fig. 187.



Lith. v. Steinmetz & Bornemann



Lith. Anst. v. Steinmetz & Bornemann Meißen.

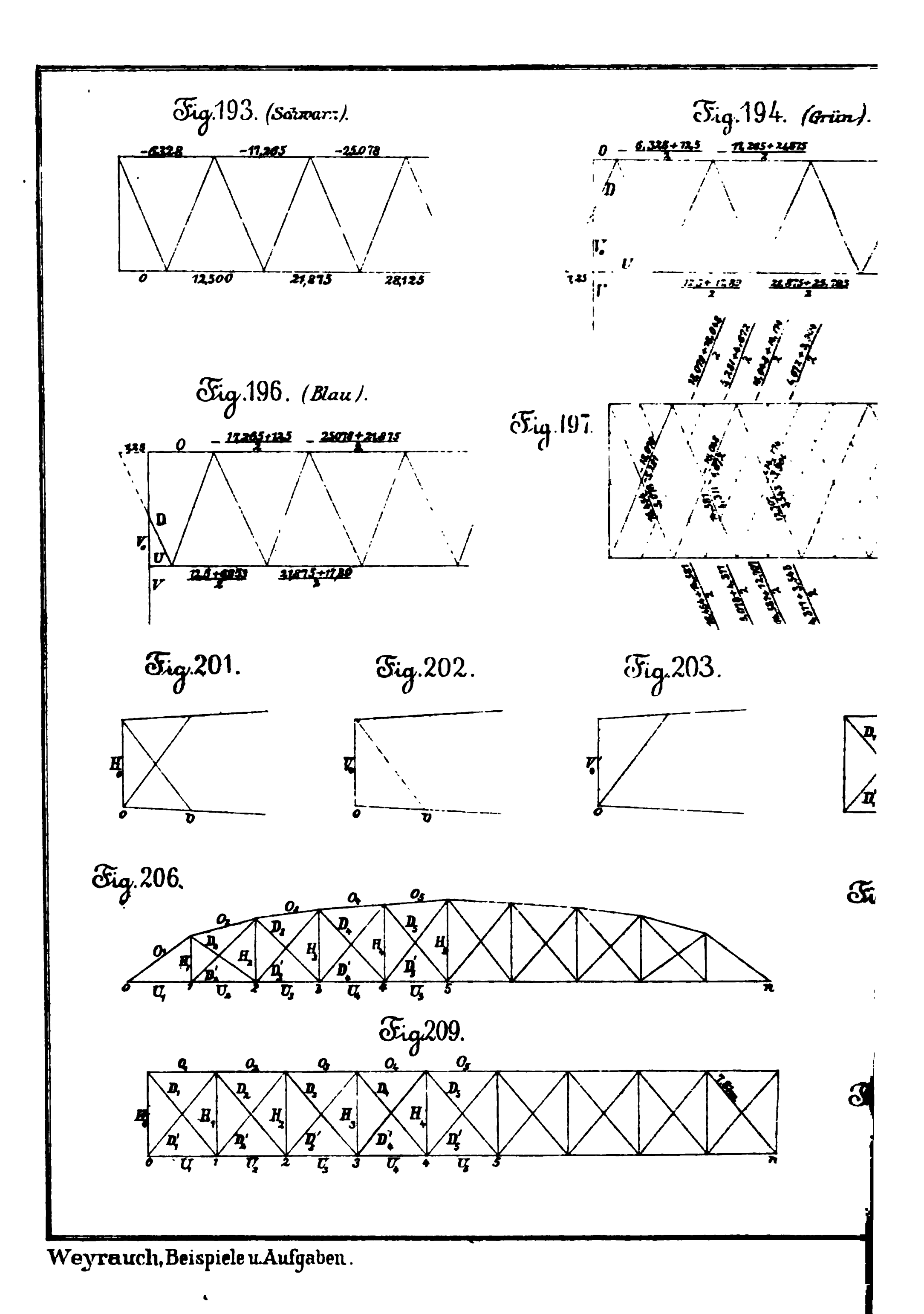
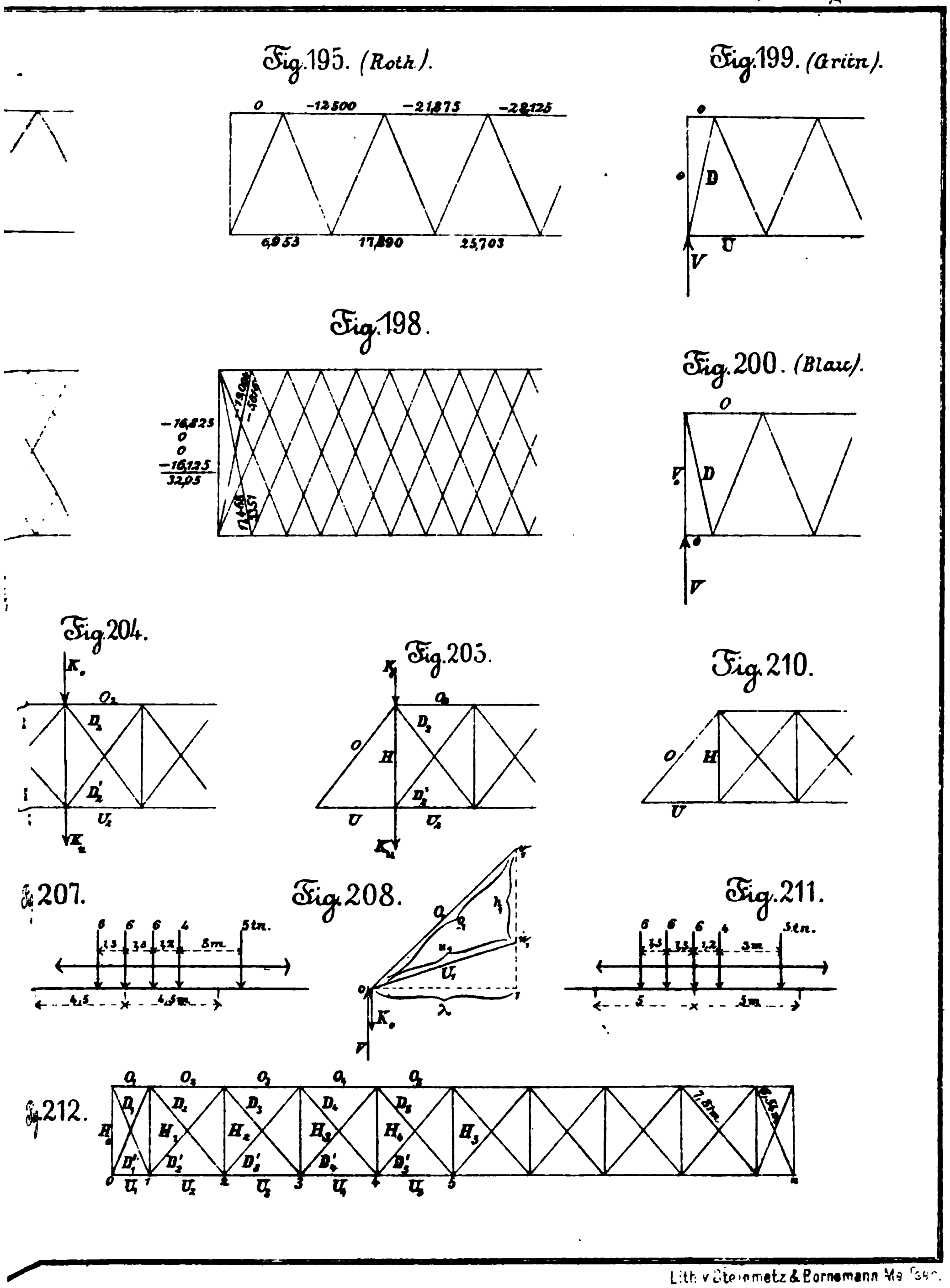
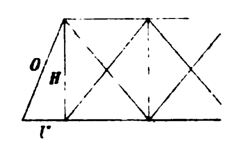


Fig. 193. (Schwarz).
Fig. 194. (Grün).
Fig. 196. (Blau).
Fig. 197.
Fig. 201.
Fig. 202.
Fig. 203.
Fig. 206.
Fig. 209.



Lith. v. Steinmetz & Bornemann Merseb.

Fig. 213.



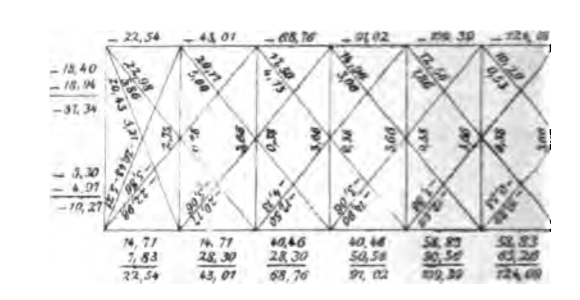


Fig. 214.

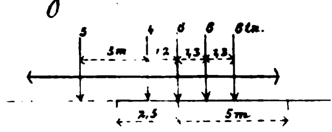


Fig. 216.

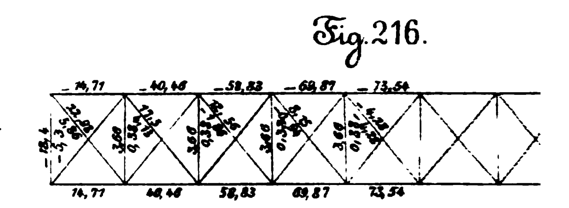


Fig. 218.

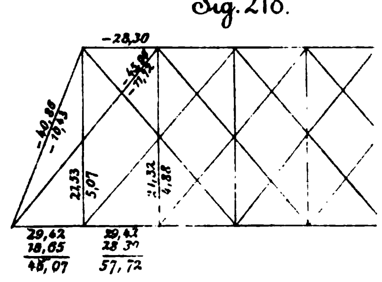


Fig.

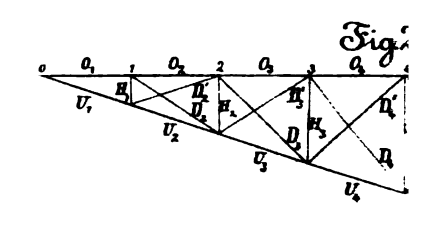
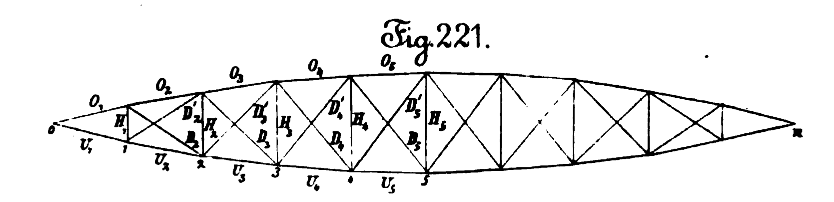


Fig. 221.



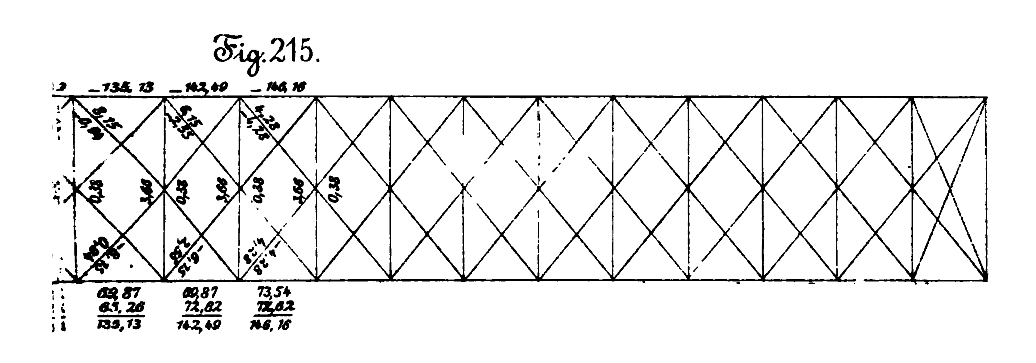
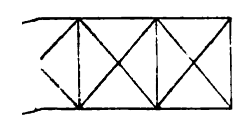


Fig. 215.



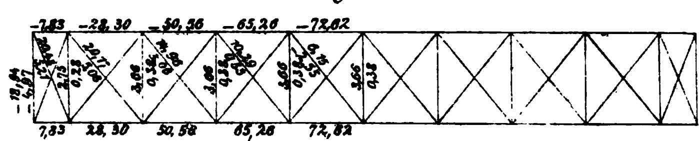


Fig. 217.

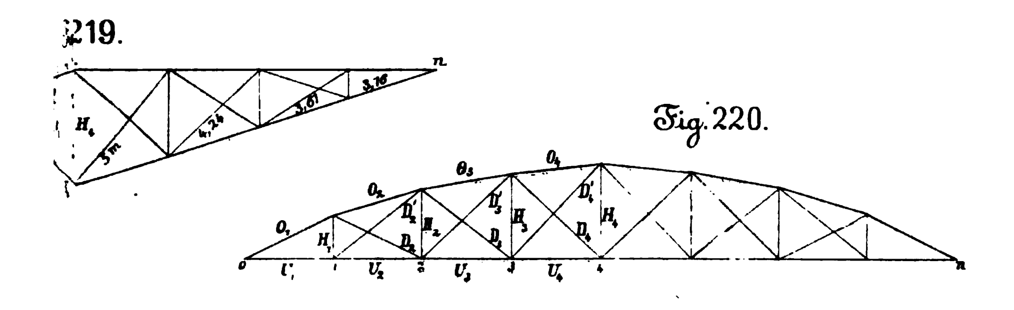


Fig. 219.

Fig. 220.

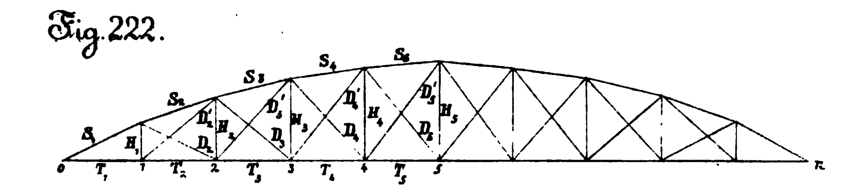


Fig. 222.

Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen